О. И. Ильин

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ

Камчатский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии
683000, Россия, Камчатский край, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Набережная, 18
e-mail: ilin@kamniro-avacha.kamchatka.ru

Аннотация

В статье рассматривается игровая задача управления эксплуатируемой биологической популяцией. Динамика распределения численности (биомассы) популяции описывается моделью типа МакКендрика - Фон Фёрстера. Популяция подвергается управлению со стороны некоторого набора управляющих, каждый из которых имеет свой критерий качества. Управляющие независимы между собой и имеют информацию о состоянии популяции. Используемым принципом оптимальности является оптимальное по Нэшу управление.

Популяции морских рыб, как правило, облавливаются несколькими промысловыми флотилиями (управляющими). Каждый из управляющих стремится максимизировать доход от промысла, в этой связи между ними могут возникать конфликтные ситуации. Вопрос о принятии решений в подобных ситуациях приводит к игровым задачам управления.

Рассматривается задача управления, в которой популяция подвергается управлению со стороны n управляющих, каждый из которых имеет орудие лова, отличное от других. Динамика распределения численности (биомассы) популяции описывается моделью типа МакКендрика - Фон Фёрстера [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \tau}=rx-\sum_{i=1}^{n} q_i u_i x,\ (t,\tau)\in G=[0;\,T]\times[0;\,\hat{\tau}],\\ x(0,\tau)=x_0(\tau),\ \ \tau\in[0;\,\hat{\tau}];\\ x(t,0)=\Phi(s),\ s=s(t)=\int_0^{\hat{\tau}}\alpha(t,\tau)x(t,\tau)\ d\tau,\ t\in[0;\,T],\end{gathered}\tag{1}$$

где t — время, τ — возраст, $x(t,\tau)$ — плотность численности (биомассы) популяции, $u_i(t)$ — интенсивность промыслового усилия i-го управляющего (число промысловых операций в единицу времени), $q_i(\tau)$ — функция, характеризующая избирательную способность орудий лова i-го управляющего. В задаче (1) функция $r(t,\tau)$ описывает процессы роста и смертности, $\alpha(t,\tau)\geq 0$ характеризует долю особей, участвующих в размножении, интеграл s представляет собой биомассу (численность) родителей. Функция $\Phi(s)\geq 0$ во внутреннекраевом условии описывает процессы рождаемости и выживаемости особей на ранних стадиях жизненного цикла. Функция $x_0(\tau)$ задает начальное распределение численности (биомассы).

Каждый из управляющих имеет свой критерий полезности $F_k(x,u_k)$ и выбирает свою управляющую функцию из условия максимизации этого критерия:

$$F_k(x,u_k)\to\sup_{u_k}.\tag{2}$$

Все управляющие независимы между собой и имеют информацию о состоянии эксплуатируемой популяции. Критерии оптимизации имеют интегральный вид:

$$F_k(x,u)=\int_0^T\int_0^\tau c_k q_k u_k x\,dt d\tau$$

и выражают доход от промыслового изъятия особей всех возрастов за время T (выигрыш) для каждого из управляющих. Функции $c_k = c_k(t,\tau)$ выражают стоимость одной единицы численности (биомассы) особей возраста τ, выловленных k-м игроком в момент времени t.

Максимизация функционалов F_k достигается выбором вектора управляющих воздействий $u(t)$ при заданных ограничениях:

$$0 \le u_k(t) \le U_k, k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Задача (1)-(2)-(3) относится к теории игр. Подобные задачи применительно к моделям однородных популяций рассматривались в ряде работ [2,3,4].

Оптимальное решение $(\hat{x}, \hat{u})$ задачи

$$\begin{cases} F_1(\hat{x}, \hat{u}_1) \ge F_1(\hat{x}, u_1), \\ \ldots, \\ F_n(\hat{x}, \hat{u}_n) \ge F_n(\hat{x}, u_n) \end{cases}$$

при ограничениях (1), (3) будем называть решением оптимальным по Нэшу.

С использованием принципа максимума Понтрягина [5] для задачи оптимальной эксплуатаци популяции [6] устанавливаются необходимые условия оптимальности по Нэшу.

Утверждение 1. *Если $(\hat{x}, \hat{u})$ — оптимальное по Нэшу управление в задаче (1)-(2)-(3), то $\hat{u}_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$ определяются из условий*

$$\hat{u}_k(t) = \begin{cases} 0, \textit{если} \int\limits_0^{\hat{\tau}} q_k(\tau)(\psi_k(t,\tau) - c_k(t,\tau))x(t,\tau)\, d\tau > 0, \\ \textit{произвольное } w_k(t), 0 \le w_k \le U_k, \textit{если} \int\limits_0^{\hat{\tau}} q_k(\psi_k - c_k)x d\tau = 0, \\ U_k, \textit{если} \int\limits_0^{\hat{\tau}} q_k(\tau)(\psi_k(t,\tau) - c_k(t,\tau))x(t,\tau)\, d\tau < 0, \end{cases}$$

где x — решение системы (1), а ψ_k — решение краевой задачи

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} = -r\psi_k + \psi_k \sum_{i=1}^{n} q_i u_i - c_k q_k u_k - \psi_k(t,0)\tfrac{d\Phi}{ds}\alpha;$$
$$\psi_k(T,\tau) = 0, \;\; \psi_k(t,\hat{\tau}) = 0,$$

соответствующие управлению $\hat{u} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. von Foerster H. In: The Kinetics of cellular prolifiration. N.Y., 1959.

2. Захаров В.В., Петросян А.А. Теоретико-игровой подход к проблеме окружающей среды //Вестник Ленингр. ун-та. вып. 1. №1. 1981. с.26-32.

3. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. Об одной задаче управления биоресурсами // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9. Вып. 2. С.293-306.

4. Реттиева А.Н. Методы динамических игр в задаче управления биоресурсами: подход с введением заповедной зоны: Автореф. дисс. …канд. физ.-мат. наук. Петрозаводск: Ин-т прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 2004. 23 с.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 391 с.

6. Ильин О.И. Об оптимальной эксплуатации популяции рыб с возрастной структурой // Сибирский журнал индустриальной математики, т. 10, № 3 (31), 2007. С. 43–57.