УПРАВЛЯЮЩИЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЛЯПУНОВА – ЯБЛОНСКОГО И РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА НЕЗАВИСИМОСТИ

М.А. Федоткин
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: fma5@rambler.ru

Аннотация

На сегодня классические методы создания моделей эволюционных систем с управлением исчерпываются тремя подходами [1, 2]. Первый подход основан на построении модели с позиции «черного ящика». Второй подход предполагает представление управляющей системы в виде составляющих её элементов. При этом каждый такой элемент является более простой управляющей системой, для изучения которой можно применять первый подход. В работах [1, 2] отмечаются недостатки указанных подходов. В связи с этим в этой работе доказывается целесообразность использования кибернетического подхода [3] для решения хорошо известного парадокса независимости в задаче Мостеллера [4, 5].

Задача Мостеллера. Построение вероятностных моделей реальных эволюционных систем с управлением является первоначальной задачей их изучения. С целью иллюстрации построения вероятностной модели статистически устойчивых экспериментов с управлением с позиции «черного ящика» рассмотрим формулировку и решение задачи Мостеллера [4].

Чтобы наградить сына, играющего в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд, по крайней мере, две теннисные партии против своего отца и мастера. Мастер играет лучше отца. Сын выигрывает у мастера с вероятностью p и у отца — с вероятностью $q > p$. Выигрыши сына независимы в совокупности. Сын имеет право выбрать один из двух вариантов очерёдности игры: 1) мастер затем отец и снова мастер; 2) отец затем мастер и снова отец. Какой вариант поведения следует выбрать сыну с точки зрения получения приза с наибольшей вероятностью?

Для проверки адекватности основных выводов различных подходов решения задачи Мостеллера необходимо большое число раз реализовать теннисную игру сына с отцом и мастером. Этот эксперимент не представляется легко осуществимым. Поэтому вместо теннисной игры рассмотрим аналогичный эксперимент, который автор работы имел возможность многократно проводить при приёме экзаменов по теории вероятностей на факультетах Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.

Задача об экзаменах. Студенты сдают экзамен по теории вероятностей, каждый из которых должен ответить по билету на три вопроса раздельно профессору и ассистенту. Студенты знают, что вопросы первый и третий являются теоретическими, а второй заключается в решении практической задачи. Студент сдаст экзамен, если он два раза подряд положительно отвечает на вопросы. Профессору студент отвечает положительно на любой вопрос с вероятностью p и ассистенту — с вероятностью $q > p$. Студенту предлагается выбрать один из двух вариантов поведения: 1) сначала студент отвечает профессору, затем — ассистенту и снова — профессору; 2) на первый вопрос студент отвечает ассистенту, на второй вопрос — профессору и на последний вопрос — ассистенту.

Рассмотрим классическое решение задачи Мостеллера на основе принципа «черного ящика», которое было предложено в работах [4, 5]. Одним из основных предметов теории вероятностей является построение адекватной вероятностной модели $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$ статистически устойчивого случайного эксперимента W_r с управлением r из некоторого множества $\mathcal{R}$. Произвольный элемент ω из множества Ω определяет с помощью некоторого языка описание так называемого элементарного исхода эксперимента W_r. Подмножество $\Im$ априори заданного множества всех допустимых исходов является σ-алгеброй и содержит все наблюдаемые исходы $D \subset \Omega$ эксперимента W_r. Наконец, вероятностная функция $\mathbf{P}_r(\cdot)\colon \Im \to [0,1]$ задается на σ-алгебре $\Im$ и зависит от выбранного управления $r \in \mathcal{R}$. Если используется подход «черного ящика», то W_r представляется в виде объекта управления E_r и системы управления C_r. Поэтому эксперимент W_r есть упорядоченная пара (E_r, C_r), и будем это записывать в виде $W_r = (E_r, C_r)$. Пусть отображения $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют выход объекта управления E_r и выход системы управления C_r, а функционал $\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))$ определяет доход эксперимент W_r от управления r. Если при управлении r математическое ожидание дохода равно $\mathrm{M}_r\Phi(\boldsymbol{\varphi}_r, \boldsymbol{\psi}_r)$, то цель эксперимента W_r состоит в использовании оптимального управления $r' \in \mathcal{R}$, для которого имеет место соотношение $\mathrm{M}_{r'}\Phi(\boldsymbol{\varphi}_{r'}, \boldsymbol{\psi}_{r'}) = \sup\{\mathrm{M}_r\Phi(\boldsymbol{\varphi}_r, \boldsymbol{\psi}_r): r \in \mathcal{R}\}$.

Пусть теперь для задачи об экзаменах объект управления E_r есть последовательные ответы студента преподавателям на три вопроса, а система управления C_r означает выбор студентом одного из двух вариантов поведения (управления). Здесь соотношение $r = 1$ означает выбор первого варианта управления, и равенство $r = 0$ означает выбор второго варианта поведения. Отсюда следует, что множество $\mathcal{R} = \{0, 1\}$. Заметим, что в этой задаче результаты объекта управления E_r не влияют на результаты системы управления C_r. Тогда приведенное ранее решение Мостеллером задачи об экзаменах на содержательном уровне фактически основано на представлении эксперимента W_r в виде управляющей системы (E_r, C_r) без канала обратной связи. Эта ситуация отображена на рис. 1.

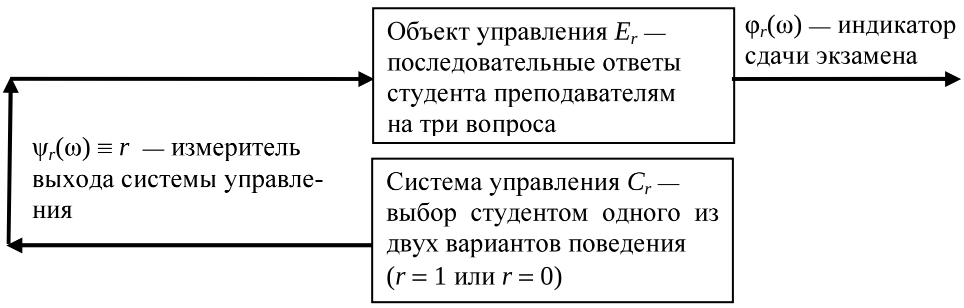


Рис. 1. Модель без канала обратной связи для эксперимента об экзаменах

Здесь величины $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют элементарный исход $\{\omega\}$ эксперимента W_r с точки зрения объекта управления E_r и соответственно с точки зрения системы управления C_r. Значение случайной величины $\varphi_r(\omega)$ равно единице, если студент сдал экзамен, и равно нулю в противном случае, а значение величины $\psi_r(\omega)$равно выбранному управлению $r = 0, 1$.

В качестве модели эксперимента W_r можно предложить вероятностное пространство $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$. Здесь $\Omega = \{\omega = (u_1, u_2, u_3): u_1, u_2, u_3 = 0, 1\}$ и $\Im = \{D: D \subset \Omega\}$. Для $i = 1, 2, 3$ полагаем $u_i = 1$, если студент положительно ответил на i-й вопрос. В противном случае принимаем $u_i = 0$. Например, событие $\{(1, 1, 1)\}$ означает, что студент положительно ответил на все три вопроса. В силу независимости ответов вероятности $\mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = pqp$ при $r = 1$ и $\mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = qpq$ при $r = 0$. Если событие A означает, что студент сдаст экзамен, то $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ и $\mathbf{P}_r(A) = \mathbf{P}_r(\{(1, 1, 0)\}) + \mathbf{P}_r(\{(0, 1, 1)\}) + \mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = rpq(q - p) + pq(2 - q)$. Так как $\varphi_r(\omega)$ — индикатор случайного события A, то математическое ожидание $\mathrm{M}_r\boldsymbol{\varphi}_r(\omega) = \mathbf{P}_r(A)$. Из неравенства $q > p$ и условия оптимальности $\mathrm{M}_{r'}\boldsymbol{\varphi}_{r'}(\omega) = \sup\{\mathbf{P}_r(A): r \in \mathcal{R}\}$ получим, что оптимальное управление $r' = 1$. Значит, студентам целесообразно пользоваться первым вариантом поведения, хотя он два раза должен отвечать профессору. Мостеллер этот вывод объясняет важностью для студента умение решать практические задачи. Напротив, Секей говорит о том, что полученное решение этой задачи и выводы существенно опирались на факт независимости ответов студента. Однако статистические наблюдения автора этой работы показывают, что студенты, которые в течение 1967—1992 гг. сдавали экзамены, в основном выбирали первый вариант поведения. После 1992 г. студенты всё чаще выбирают более разумный на их взгляд второй вариант поведения. Чтобы объяснить такое поведение студентов, приведём нетрадиционный способ [1, 2] в проблеме изучения и оптимизации случайных экспериментов с управлением.

Задача Мостеллера как управляющая кибернетическая система. Приведенный выше подход изучает статически устойчивый эксперимент с управлением с позиции «черного ящика», как это обычно делается в известных задачах автоматического регулирования. Основной недостаток этого подхода заключается в том, что величины $\psi_r(\omega)$ и $\varphi_r(\omega)$ являются всего лишь математической моделью измерителей входа и соответственно выхода объекта управления E_r, а не вероятностной моделью статистически устойчивого эксперимента W_r в целом. Поэтому простой и доступный по структуре принцип «черного ящика» не требует детального изучения эксперимента W_r, и, значит, не позволяет в полной мере одновременно учитывать как детерминированную, так и вероятностную его природу.

При изучении реальной управляющей системы всегда возникают трудные вопросы эффективного способа описания и методов изучения с подробным учётом её конкретной физической природы и цели функционирования. В силу этого на реальную систему целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения её общих фундаментальных свойств и методологического понятия управляющей системы, впервые данного в математической кибернетике [5]. Эта точка зрения по существу была поддержана и последовательно развивалась в работах [1, 2]. В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели управляющей системы лежат следующие фундаментальные положения:

— любая управляющая система обладает такими свойствами как схемой, информацией, координатами и функцией;

— принцип дискретности актов функционирования управляющей системы во времени τ_i, $i \geq 0$, где точечный процесс $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени;

— принцип строения схемы из структурных блоков: внешней среды, входных и выходных полюсов, внешней и внутренней памяти, устройств по переработке информации внешней и внутренней памяти.

Рассмотрим теперь применение кибернетического подхода для решения парадокса независимости [4, 5]. Задача Мостеллера или задача об экзаменах может быть адекватно отображена посредством управляющей системы, блочная схема которой приведена на рис. 2.

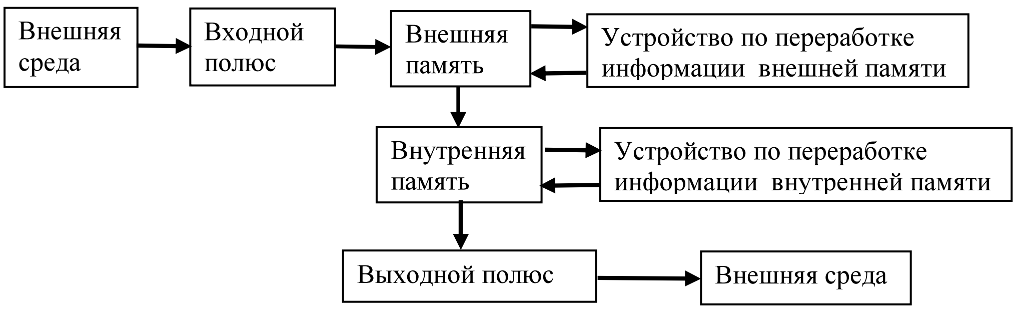


Рис. 2. Схема управляющей системы для задачи об экзаменах

Выясним неформальный смысл всех структурных блоков схемы управляющей системы, соответствующей задаче об экзаменах. Для этого обозначим на оси времени через τ_0 момент получения студентом выбранного им билета с тремя вопросами и объявления первого варианта поведения с вероятностью $r \in [0, 1]$ или второго варианта с вероятностью $1 - r$. Пусть τ_i есть момент завершения ответа студентом на i-й вопрос, где $i = 1, 2, 3$. При этом рассмотрим общий случай задачи, когда не предполагается независимость в совокупности последовательных ответов студента на вопросы для любой стратегии его поведения. Сначала пунктом 1) определим математическое описание и свойства внешней среды, а затем пунктами 2) — 7) описание и свойства каждого из остальных структурных блоков схемы.

1) Процессы формирования внешней среды занимают значительное время и являются консервативными. Внешняя среда представляет собой условия перед экзаменом, которые навязывают студенту на интуитивном уровне случайно выбрать конкретный вариант поведения. Отсюда вытекает, что внешняя среда имеет два состояния: а) профессор — ассистент — профессор (b_1); б) ассистент — профессор — ассистент (b_2). Будем считать, что внешняя сре-

да в некоторый момент τ_0 принимает значение b_1 с вероятностью $r \in [0, 1]$ и значение b_2 с вероятностью $1 - r$. Другими словами, студент выбирает план ответов вида: профессор — ассистент — профессор с вероятностью r и стратегию ответов вида: ассистент — профессор — ассистент с вероятностью $1 - r$. Информация внешней среды есть множество {профессор — ассистент — профессор, ассистент — профессор— ассистент} = $\{b_1, b_2\}$ из двух состояний внешней среды. Координаты внешней среды — номера 1, 2 её состояний b_1 и b_2. Состояние внешней среды в момент τ_i есть случайный элемент $\chi_i \equiv \chi_0$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации внешней среды есть случайный вектор $\chi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$. При этом распределение вероятностей $\mathbf{P}(\chi_0 = b_1) = r$, $\mathbf{P}(\chi_0 = b_2) = 1 - r$ случайного элемента χ_0 определяет распределение случайного вектора χ.

2) Входной полюс означает получение студентом в момент τ_0 три последовательных вопроса w_1, w_2 и w_3 билета. Информация входного полюса есть множество $\{(w_1, w_2, w_3)\}$ из одного состояния (w_1, w_2, w_3) входного полюса. Вектор $\alpha_i \equiv (w_1, w_2, w_3)$ определяет состояние входного полюса в момент τ_i, где $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации входного полюса есть вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с равными компонентами.

3) Внешняя память фиксирует очередные вопросы, на которые студент должен отвечать. Информация внешней памяти есть множество$\{(w_1, w_2, w_3), (w_2, w_3), w_3, \varnothing\}$ из четырёх состояний $d_1 = (w_1, w_2, w_3)$, $d_2 = (w_2, w_3)$, $d_3 = w_3$ и $d_4 = \varnothing$ внешней памяти. Координаты внешней памяти — номера 1, 2, 3, 4 её состояний d_1, d_2, d_3, d_4. Состояние внешней памяти в момент τ_i есть $\beta_i = d_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации внешней памяти — вектор вида $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

4) Устройство по переработке информации внешней памяти детерминировано удаляет вопросы, на которые студент закончил отвечать и, тем самым, изменяет номер состояния внешней памяти в последовательности 1, 2, 3 и 4. Информация блока по переработке внешней памяти есть множество $\{\varnothing, w_1, (w_1, w_2), (w_1, w_2, w_3)\}$ из четырёх состояний $e_1 = \varnothing$, $e_2 = w_1$, $e_3 = (w_1, w_2)$ и $e_4 = (w_1, w_2, w_3)$ этого блока. Координаты блока по переработке внешней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний e_1, e_2, e_3 и e_4 блока. Состояние блока по переработке внешней памяти в момент τ_i есть $\zeta_i = e_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока по переработке внешней памяти есть вектор $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$.

5) Внутренняя память фиксирует как выбранный заранее студентом вариант поведения, так и запоминает последовательность из трёх результатов его ответов преподавателям на три вопроса. Информация блока внутренней памяти есть множество {студент выбрал первую схему ответа (f_1), студент выбрал вторую схему ответа (f_2), студент ответил на вопрос (f_3), студент не ответил на вопрос (f_4)} из четырёх состояний f_1, f_2, f_3 и f_4 внутренней памяти. Координаты внутренней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний f_1, f_2, f_3 и f_4. Состояние внутренней памяти в момент τ_i есть случайный элемент η_i при $i = 0, 1, 2, 3$. Здесь $\eta_0 \in \{f_1, f_2\}$, $\eta_1 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_2 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_3 \in \{f_3, f_4\}$. Код информации внутренней памяти есть случайный вектор $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Напомним, что согласно условиям задачи об экзаменах последовательные ответы студента происходят случайным и, в общем случае, зависимым образом. Эта зависимость при заданном значении параметра $\varepsilon \ge 0$ определяется следующими соотношениями для условных вероятностей случайных элементов η_0, η_1, η_2, η_3:

$$\mathbf{P}(\eta_0 = f_1) = r,\ \mathbf{P}(\eta_1 = f_3|\eta_0 = f_1) = p,\ \mathbf{P}(\eta_1 = f_3|\eta_0 = f_2) = q,\ \mathbf{P}(\eta_2 = f_3|\eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3) =$$
$$= q + \varepsilon - \varepsilon/p \ge p,\ \mathbf{P}(\eta_2 = f_3|\eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3|\eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) =$$
$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3|\eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = q + \varepsilon < 1,\ \mathbf{P}(\eta_3 = f_3|\eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) = q,$$
$$\mathbf{P}(\eta_2 = f_3|\eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3) = \mathbf{P}(\eta_2 = f_3|\eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) =$$
$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_3) =$$
$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = p.$$

Эти ограничения на вероятности формализуют случайный механизм выбора последовательности ответов студента, условия задачи Мостеллера, естественную зависимость его последовательных ответов и, наконец, модель обучения плохо подготовленных студентов на экзаменах.

6) Устройство по переработке информации внутренней памяти определяет по некоторому алгоритму условные вероятности очередного положительного ответа студента в зависимости от предыдущих его результатов, и реализовывает случайный механизм оценки ответов на вопросы. Информация блока по переработке внутренней памяти есть множество вида $\{r, (p, q), (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p), (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)\}$, которое состоит из четырёх состояний: $g_1 = r$, $g_2 = (p, q)$, $g_3 = (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p)$, $g_4 = (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)$. Координаты блока по переработке внутренней памяти суть номера 1, 2, 3, 4 состояний g_1, g_2, g_3, g_4. Состояние блока в момент τ_i есть $\theta_i = g_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока — вектор $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

7) Выходной полюс определяет наблюдаемые исходы экзамена студента. Информация этого блока есть пространство $\Omega = \{\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3)$: $x_0 \in \{f_1, f_2\}, x_1, x_2, x_3 \in \{f_3, f_4\}\}$ из 16 состояний: $\omega_1 = (f_1, f_3, f_3, f_3)$, $\omega_2 = (f_1, f_3, f_3, f_4)$, $\omega_3 = (f_1, f_3, f_4, f_3)$, $\omega_4 = (f_1, f_3, f_4, f_4)$, $\omega_5 = (f_1, f_4, f_3, f_3)$, $\omega_6 = (f_1, f_4, f_3, f_4)$, $\omega_7 = (f_1, f_4, f_4, f_3)$, $\omega_8 = (f_1, f_4, f_4, f_4)$, $\omega_9 = (f_2, f_3, f_3, f_3)$, $\omega_{10} = (f_2, f_3, f_3, f_4)$, $\omega_{11} = (f_2, f_3, f_4, f_3)$, $\omega_{12} = (f_2, f_3, f_4, f_4)$, $\omega_{13} = (f_2, f_4, f_3, f_3)$, $\omega_{14} = (f_2, f_4, f_3, f_4)$, $\omega_{15} = (f_2, f_4, f_4, f_3)$, $\omega_{16} = (f_2, f_4, f_4, f_4)$. Координаты блока выходного полюса суть номера 1, 2, …, 16 состояний ω_1, ω_2, …, ω_{16}. Состояние блока в момент времени τ_3 есть случайный элемент ξ, где $\xi(\omega) \equiv \omega$ при $\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Код информации блока выходного полюса есть случайный вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $\xi_i(\omega) \equiv x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Теперь нетрудно построить вероятностную модель $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$ эксперимента W_r. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{16}\}$, $\Im = \{B: B \subset \Omega\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_{65536}\}$ и вероятностная функция $\mathbf{P}_r(\cdot))$ задается равенствами: $\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) = rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)p$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) = rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)(1 - p)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_3\}) = rp(1 - q - \varepsilon + \varepsilon/p)p$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_4\}) = rp(1 - q - \varepsilon + \varepsilon/p)(1 - p)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) = r(1 - p)p \times (q + \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_6\}) = r(1 - p)(q + \varepsilon)(1 - p)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_7\}) = r(1 - p)(1 - q - \varepsilon)p$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1 - p) \times (1 - q - \varepsilon)(1 - p)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) = (1 - r)qpq$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) = (1 - r)qp(1 - q)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) = (1 - r)q \times (1 - p)(q + \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{12}\}) = (1 - r)q(1 - p)(1 - q - \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) = (1 - r)(1 - q)p(q + \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{14}\}) = (1 - r)(1 - q)p(1 - q - \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\}) = (1 - r)(1 - q)(1 - p)(q + \varepsilon)$, $\mathbf{P}_r(\{\omega_{16}\}) = (1 - r) \times (1 - q)(1 - p)(1 - q - \varepsilon)$. Например, элементарное событие $\{\omega_8\} = \{(f_1, f_4, f_4, f_4)\} \in \Im$ означает, что студент выбрал первый вариант последовательности ответов и отрицательно ответил на все три вопроса. При этом вероятность $\mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1 - p)(1 - q - \varepsilon)(1 - p)$. Построенная вероятностная модель $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$ эксперимента W_r позволяет выписать функциональную связь между блоком внешней среды и выходным полюсом в виде равенств: $\chi_0(\omega_1) = \chi_0(\omega_2) = \ldots = \chi_0(\omega_8) = b_1$, $\chi_0(\omega_9) = \chi_0(\omega_{10}) = \ldots = \chi_0(\omega_{16}) = b_2$. Аналогично найдём функциональную связь между внутренней памятью и выходным полюсом. Например, функциональная связь между внутренней памятью в моменты τ_3 и выходным полюсом задается равенством $\eta_3(\omega_s) = f_3$ при нечетном значении s. Приведенные здесь и остальные функциональные связи являются поточечным заданием случайных элементов $\chi(\omega)$, $\eta(\omega)$ и $\xi(\omega)$. Поэтому их законы распределения и связанные с этими элементами условные вероятности могут быть найдены по правилам теории вероятностей. Так, $\mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1) = \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1, \eta_2 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1) = (\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_6\}))/r = pq + p\varepsilon - \varepsilon + (1 - p)(q + \varepsilon) = q$. Однако, условная вероятность $\mathbf{P}_r(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2) = \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2, \eta_3 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2) = (1 - r)^{-1} \times (\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\})) = q + \varepsilon(1 - pq) > q$. Значит, произошло обучение студента на экзаменах.

Математическое описание внешней среды, входного полюса, внешней памяти, устройства по переработке информации внешней памяти, внутренней памяти, устройства по переработке информации внутренней памяти и выходного полюса выполняется векторами $\chi(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\zeta(\omega)$, $\eta(\omega)$, $\theta(\omega)$ и $\xi(\omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$. Функция эксперимента W_r об экзамене заключается в случайном выборе студентом одного из двух вариантов поведения и в его ответах на три последовательных вопроса с целью определения объективной оценки преподавателями знаний студента.

Оптимальное поведение студента и решение парадокса Мостеллера—Секея. Пусть случайное событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_9, \omega_{10}\ \omega_{13}\}$ означает, что студент сдал экзамен. Тогда вероятность $\mathbf{P}_r(A) = \mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) = r[pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq)] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q)$. Формулировка задачи оптимизации для эксперимента W_r заключается в определении такого $r' \in [0, 1]$, для которого выполняется условие оптимальности: $\mathbf{P}_{r'}(A) = \sup\{\mathbf{P}_r(A)\colon 0 \le r \le 1\}$. При определении оптимальной стратегии выбора последовательности ответов в задаче Мостеллера об экзаменах с обучением необходимо учитывать ограничения $0 < p$, $q < 1$, $q > p$, $\varepsilon \ge 0$, $q + \varepsilon < 1$, $q + \varepsilon - \varepsilon/p \ge p$ на параметры p и q, которые определяют уровень подготовки студента, и на параметр обучения ε. Теперь нетрудно показать следующие утверждения.

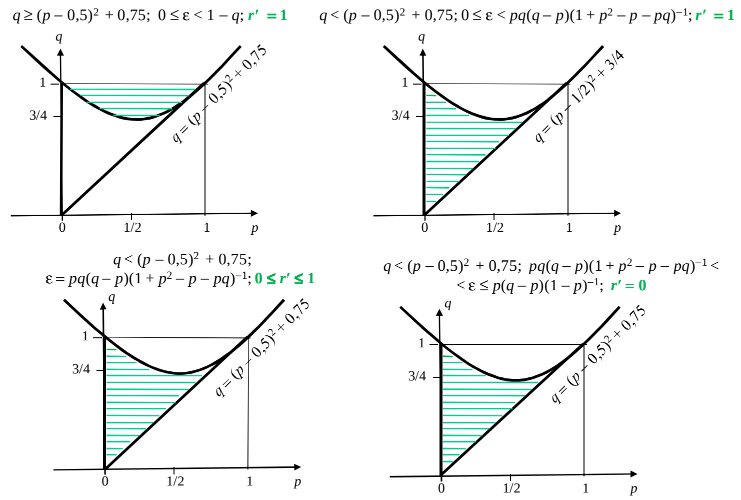
Лемма 1. Если выполняется неравенство $q \ge (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $q + \varepsilon < 1$, то $r' = 1$.

Лемма 2. Пусть $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $0 \le \varepsilon < pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$, то $r' = 1$.

Лемма 3. Если $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $\varepsilon = pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$, то $0 \le r' \le 1$.

Лемма 4. Пусть имеет место $pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \le p(q-p)(1-p)^{-1}$ и $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$. Тогда оптимальный план $r' = 0$.

На следующих рисунках приведены заштрихованные области p, q и промежутки изменения ε, в которых следует применять оптимальный план ответов студента на экзамене.



Приведём решение парадокса о независимости. Так для отлично подготовленных студентов, ответы которых, скорее всего, будут независимыми случайными событиями ($\varepsilon = 0$) или удовлетворяют условию $q \ge (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$, целесообразно пользоваться первым вариантом поведения. Напротив, для плохо подготовленных студентов и при хорошей их обучаемости в случае, когда $0 < p$, $q < 1$, $q > p$, $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \le p(q-p)(1-p)^{-1}$, целесообразно применять второй вариант поведения. Такая ситуация, по-видимому, сложилась после 1992 г. не только в Нижегородском госуниверситете.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. 1996. Вып. 6. С. 51–70

[2]. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. 1998. Вып. 7. С. 332–344.

[3]. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики. Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. 1963. Вып. 9. С. 5–22.

[4]. Mosteller F. Fifty challenging problems in probability with solutions. Reading, MA: Addison-Wesley. 1965.

[5]. Székely G. Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. Budapest: Akadémiai Kiadó. 1986.