МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПОЧВЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ТОЧНОГО ЗЕМЛЕДЕЛИЯ[1]

Л.А. Хворова
Алтайский государственный университет
e-mail: hla@math.asu.ru

Аннотация
Статья посвящена проблеме построения многомерной модели теплового режима почвы. Рассматриваются алгоритм и численный метод решения двумерной задачи.

MODEL OF THE THERMAL REGIME OF SOILS IN THE SPACE-DIFFERENTIATION TECHNOLOGY OF PRECISION AGRICULTURE

Khvorova L.A.

Abstract
The article is devoted to the problem of constructing a multidimensional model of the thermal regime of soil. We consider an algorithm and a numerical method for solving two-dimensional problem.

Разработка математических моделей, корректно учитывающих процессы теплопереноса в почве, является сложной и актуальной задачей. Соседствующие почвенные массивы (выделенные единицы управления в рамках одного поля) характеризуются различными теплофизическими величинами (параметрами), которые, в свою очередь, зависят от соотношения твердой, жидкой и газообразной составляющих, текстурных и структурных особенностей грунтов, состояния влаги и температуры.

Точное (ориентированное) земледелие или локально специфическое – это эффективное, рациональное управление процессами роста растений в соответствии с их потребностями в питательных веществах и условиях произрастания с различной степенью дифференциации. Точное земледелие – это система хозяйствования на земле с использованием пространственно-дифференцированных технологий, опирающихся на использование новейших достижений в области информатики, моделирования и техники: компьютерных систем генерации агротехнологических решений, глобальных систем позиционирования (GPS), геоинформационных технологий (ГИС), новейших информационных технологий, современной сельскохозяйственной техники, управляемой бортовой ЭВМ, а также многофункционального программного обеспечения, позволяющего принимать оптимальные решения при управлении сельскохозяйственным предприятием [1].

Урожайность сельскохозяйственной культуры на различных участках одного и того же поля, как правило, различна. Это связано в первую очередь с тем, что процесс получения продукции растениеводства реализуется в пространстве и во времени на конкретной территории, которая не является однородной даже в пределах одного поля. В традиционном земледелии все характеристики поля, как правило, считаются одинаковыми для всех его участков. Точное земледелие предполагает динамическую оптимизацию при выполнении агротехнических операций для каждого однородного участка поля в зависимости от складывающихся агрохимических, агрофизических, фитосанитарных факторов.

Одним из факторов, способствующих развитию сельского хозяйства, является использование информационных технологий, ядром которых являются динамические модели, позволяющие учитывать пространственную неоднородность различных участков в границах одного поля.

---

[1] Работа выполнена при поддержке ведомственно-аналитической программы «Развитие научного потенциала Высшей школы 2010–2011» №2.2.2.4/4278.

В подавляющем большинстве современные модели, описывающие продукционный процесс сельскохозяйственных растений, рассматривают однородный фиктивный посев, а стратификация его характеристик производится в единственном вертикальном направлении. В подобных моделях расчет производится отдельно для каждой опорной точки поля с параметрами, характерными только для данного типа почвы. Все точки считаются независимыми друг от друга, но предполагается, что все окружение данной точки обладает теми же свойствами и, соответственно, никаких горизонтальных перетоков вещества и энергии не происходит.

Для целей точного земледелия горизонтальная неоднородность поля является важнейшим фактором, влияющим на выбор агротехники и определяющим результат хозяйствования. Учет взаимодействия динамики продукционного процесса на соседних участках неоднородного поля требует построения принципиально иной, более сложной многомерной модели.

Один из упрощенных вариантов решения данной проблемы предложен в [2]. Влияние разных участков посева друг на друга в [2] предполагается осуществлять в рамках системы поливариантных расчетов при условии поддержки ею механизма параллельных вычислений нескольких сценариев для одномерного случая.

Многомерная модель теплового режима почвы

Колебания температуры – важный компонент почвенного микроклимата. Температура почвы существенно влияет на многие протекающие в ней процессы. С тепловым режимом почв тесно связаны начало и конец вегетационного периода, пространственное размещение растений, характер распространения корневых систем, скорость поступления к корням питательных элементов.

В рамках концепции пространственно-дифференцированных технологий точного земледелия рассмотрим трехмерную модель теплового режима почвы.

Математические модели, связанные с описанием явления теплопереноса в пределах почвенного компартмента, основаны на нестационарных трехмерных уравнениях параболического типа. Теплота, поступающая на поверхность почвы, под действием создаваемого градиента температур перераспределяется в объеме почвенного компартмента Ω.

Пусть *P=P(x,y,z)* – точка почвенного компартмента Ω, $P \in \Omega \subset R^3$, $T(P,t)$ – температура в точке P почвенного компартмента в момент времени t, $t \in [0,T]$. Тогда уравнение теплопереноса в почвенном компартменте можно Ω записать в виде:

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial z}\right) + f(x,y,z,t), \qquad (1)$$

где $\rho(x,y,z)$ – плотность почвы, $c(w(x,y,z))$ – теплоемкость, χ – коэффициент теплопроводности, зависящий от влажности почвы w: $\chi = \chi(w(x,y,z))$. Теплоперенос осуществляется вдоль координатных осей *Ox, Oy, Oz*; а $f(x,y,z,t)$ – функция источника тепла. Заметим, что влажность почвы w считается здесь заданной функцией.

Искомая функция $T(P,t)$ должна удовлетворять начальным условиям:

$$T(P,t)|_{t=0} = T(P,0) \text{ для } P \in \Omega \qquad (2)$$

и некоторым граничным условиям.

Нижняя граница помещается, как правило, на глубине, на которой температура либо полагается постоянной, либо зависящей от времени и точек границы известным образом. Следовательно, при $y = -H$ (на нижней плоскости почвенного компартмента Ω выполняется

$$T(-H,t) = \varphi_H(t)\,. \qquad (3)$$

В качестве верхнего граничного условия следует записать соотношение, обеспечивающее «сшивание» решений задачи в почве и в приземном воздухе. Наиболее корректным представляется условие теплового баланса на поверхности почвы вида (условие третьего рода):

$$\chi\frac{\partial T}{\partial n}+\beta(T-T_a)=q(x,t)\,. \tag{4}$$

Здесь T – температура поверхности почвы, T_a – температура воздуха, $n=(n_1,n_2,n_3)$ – вектор внешней нормали к верхней границе деятельной поверхности почвы; $\frac{\partial T}{\partial n}=\frac{\partial T}{\partial x}n_1+\frac{\partial T}{\partial y}n_2+\frac{\partial T}{\partial z}n_3$, функция q задает тепловой поток в почву, затраты тепла на турбулентный перенос в атмосферу и на испарение и т.д., β – коэффициент теплообмена с внешней средой.

Общее условие теплового баланса (4) на границе двух сред, в частности, на поверхности почвы, записанное в виде [2]:

$$(1-A_s)\cdot Q(0)+\Delta F(0)=\rho_a c_p D^T_{soil}(T_0-T_a(NL))+$$
$$+\rho_a\theta\cdot D^q_{soil}(q_0-q_a(NL))+\frac{2}{h_0+h_1}\chi_{0,1}(T_0-T_1)\,, \tag{4*}$$

представляет собой разностный аналог соотношения (4). В его левую часть входят приходные статьи теплового баланса: баланс коротковолновой ($(1-A_s)\cdot Q(0)$) и длинноволновой ($\Delta F(0)$) радиации; A_s – альбедо почвы. Слагаемые в правой части (4*) характеризуют затраты тепла на турбулентный перенос в атмосферу и на испарение (первое и второе слагаемые), а также поток тепла в почву (третье слагаемое). Здесь ρ_a – плотность воздуха, c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, D^T_{soil}, D^q_{soil} – коэффициенты проводимости тепла и паров воды, T_0, T_1 – температура верхних слоев почвы, $T_a(NL)$ – температура нижнего яруса посева, номер которого равен NL, θ – скрытая теплота парообразования, q_0 – концентрация паров воды в поровом пространстве почвы у поверхности, $q_a(NL)$ – удельная влажность воздуха, h_0, h_1 – высоты верхних слоев почвы, $\chi_{0,1}$ – теплопроводность верхнего слоя почвы. Заметим, что последнее слагаемое в (4*) представляет собой разностный аналог величины потока тепла на границе.

Численное решение задачи (1)–(4) можно найти при помощи метода стабилизирующей поправки [3, 4]. Разностная схема второго порядка аппроксимации для решения уравнения (1) может быть представлена в следующем общем виде:

$$\frac{T^{k+1/3}-T^k}{\Delta t}=\Lambda_1T^{k+1/3}+\Lambda_2T^k+\Lambda_3T^k+F^k,$$
$$\frac{T^{k+2/3}-T^{k+1/3}}{\Delta t}=\Lambda_2(T^{k+2/3}-T^k),$$
$$\frac{T^{k+1}-T^{k+2/3}}{\Delta t}=\Lambda_3\left(T^{k+1}-T^k\right),$$

где Λ_i, $(i=1,2,3)$ есть разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов ($\Lambda_i\sim\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$, $x_i=x,y,z$ для $i=1,2,3$, соответственно). Правая часть F сформирована здесь после введения коэффициента температуропроводности K и последующего приведения (1) к дивергентному виду. Не останавливаясь подробно на реализации метода стабилизирующей поправки для решения трехмерной задачи, перейдем к изучению двумерной аппроксимации задачи о распределении температуры в массивах почвы, имеющих вертикальную (относительно направления силы тяжести) границу раздела, связанную с неоднородностью структурных пластов почвы.

Двумерная задача

Рассмотрим следующий вариант задачи (1)–(4). Пусть неоднородный почвенный компартмент Ω состоит из двух участков, значительно отличающихся по влиянию характеристик поля на продукционный процесс посева и на движение почвенных растворов (в действительности свойства почвы меняются от точки к точке непрерывно и случайным образом). Целью «размежевания» поля на единицы управления является уменьшение теоретически бесконечной вариабельности условий произрастания к ограниченному набору вариантов. Тогда $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{-x_1 \le x \le 0; -H \le y \le 0\}$, $\Omega_2 = \{0 \le x \le x_2; -H \le y \le 0\}$. Здесь полагается, что границы участков Ω_1 и Ω_2 являются известными и прямолинейными. В случае криволинейных границ областей Ω_1 и Ω_2 задача также может быть сформулирована и успешно решена.

Пусть система координат выбрана таким образом, что ось *0y* проходит по границе раздела областей Ω_1 и Ω_2. Функция T_1 определяет температуру почвы в области Ω_1, а T_2 – температуру почвы в области Ω_2. Тогда в силу почвенной однородности областей Ω_1 и Ω_2 можно записать условия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -x_1; \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_2. \tag{6}$$

На границе раздела компартментов Ω_1 и Ω_2 $(x=0)$ должны выполняться условия непрерывности температур и тепловых потоков:

$$T_1 = T_2 \text{ и } \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \text{ при } x = 0. \tag{7}$$

Уравнение (1) в двумерном случае будет иметь вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi \frac{\partial T}{\partial y}\right) + f(x,y,t) \tag{8}$$

Численное исследование задачи о распределении температуры в областях Ω_1 и Ω_2 будет производиться с использованием конечно-разностных методов.

Введем коэффициент температуропроводности K: $K = \dfrac{\chi}{\rho c}$, который также будет функцией пространственных координат x, y и перепишем уравнение (8) в следующем дивергентом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{K}{\rho c}\left[\frac{\partial(\rho c)}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{1}{\rho c} f(x,y,t) \tag{9}$$

Для численного решения уравнения (9), описывающего процесс теплопереноса, применяется численный метод, разработанный в [5], с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений), формально имеющей второй порядок аппроксимации. Схема расчета записывается в следующем общем виде:

$$\frac{T^{k+\frac{1}{2}} - T^k}{0.5\cdot\Delta t} = \left[K T_x\right]_x^k + \left[K T_y\right]_y^{k+1/2} + F^k,$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+\frac{1}{2}}}{0.5\cdot\Delta t} = \left[K T_x\right]_x^{k+1} + \left[K T_y\right]_y^{k+1/2} + F^k. \tag{10}$$

Здесь $F = \dfrac{K}{\rho c}\left[\dfrac{\partial(\rho c)}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho c)}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial y}\right] + \dfrac{1}{\rho c} f(x,y,t)$, Δt – шаг по времени, $T^k = T(t_k,\cdot)$, $t_k = k\cdot\Delta t,\ k = 1,2,\ldots$.

Для реализации представленной схемы вводится равномерная разностная сетка (x_n, y_m) для каждой области Ω_i , $i = 1,2$, следующим образом:

для области Ω_1: (x_n, y_m), где $x_n = -x_1 + (n-1)h_1,\ n = 1,2,\ldots,N_1$, $h_1 = \dfrac{x_1}{N_1}$;

$$y_m = -H + (m-1)h_y,\ m = 1,2,\ldots,M,\ h_y = \frac{H}{M};$$

для области Ω_2: (x_n, y_m), где $x_n = (n-1)h_2,\ n = 1,2,\ldots,N_2$, $h_2 = \dfrac{x_2}{N_2}$;

$$y_m = -H + (m-1)h_y,\ m = 1,2,\ldots,M,\ h_y = \frac{H}{M};$$

Значение сеточной функции $T(x,y,t)$ в узлах сетки обозначим $T^k_{n,m} = T(x_n, y_m, t^k)$. При этом используется следующая разностная аппроксимация для входящих в (10) слагаемых:

$$\left[KT_x\right]_x \approx \bar{K}_{n+1}\frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{h_x^2} - \bar{K}_n\frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Здесь

$$\bar{K}_{n+1} = K_{n+1/2,m},\ K_{n+1/2,m} = K(x_{n+1/2}, y_m),$$

$$x_{n+1/2} = x_n + 0.5h_x,\ h_x = h_1 \text{ или } h_x = h_2.$$

В результате требуется решить системы линейных алгебраических уравнений

$$-a_{n,m}T^{k+1/2}_{n,m-1} + b_{n,m}T^{k+1/2}_{n,m} - c_{n,m}T^{k+1/2}_{n,m+1} = d_{n,m},$$

$$-a_{n,m}T^{k+1}_{n-1,m} + b_{n,m}T^{k+1}_{n,m} - c_{n,m}T^{k+1}_{n+1,m} = d_{n,m},$$

соответствующие (10). Данные системы решаются методом прогонки. При этом в направлении y используется обычный вариант данного метода [6].

Граничные значения температуры T_1 и T_2 следуют из (3), (4).

Для определения T_1 и T_2 на слое $(k+1)$ мы используем условия непрерывности температур и тепловых потоков на границе раздела (7) и представление решения (т.е. температуры в каждой из областей) в таком виде, когда $(T_1)_{n,m}$ и $(T_2)_{n,m}$ выражаются через неизвестные значения температуры $(T_1)_{N_1+1,m} = (T_2)_{1,m}$ на границе раздела $x = 0$. Представления вида

$$T_{1n,m} = \beta^1_{n,m} + \gamma^1_{n,m}\cdot\bar{T}_m,$$

$$T_{2n,m} = \beta^2_{n,m} + \gamma^2_{n,m}\cdot\bar{T}_m,$$

где $\bar{T}_m$ – температура на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2, позволяют организовать своеобразную прогонку с параметрами, коими являются граничные значения температуры $\bar{T}_m$, и найти сначала сами эти значения, а затем и распределение температуры в областях Ω_1 и Ω_2.

Первые производные, входящие в (7), внутри расчетной области аппроксимируются традиционно симметричными конечно-разностными аналогами со вторым порядком. Первые производные на границах расчетной области аппроксимируются несимметричными конечно-разностными аналогами также второго порядка.

Общая схема численного решения задачи состоит в осуществлении следующих этапов.

1. Переход на новый временной слой t^{k+1} начинается с расчета температуры $T_1^{k+\frac{1}{2}}$ и $T_2^{k+\frac{1}{2}}$ на промежуточном временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$. Расчет производится в каждой из областей Ω_1 и Ω_2

2. Затем, с помощью прогонки с параметрами, вычисляются значения температур $T_i^{k+1}, i=1,2$, на слое $(k+1)$ одновременно в обеих областях Ω_1 и Ω_2.

Отметим, что с использованием схемы (10) и введения итерационного параметра, может быть осуществлено вычисление распределения температуры в стационарном случае.

Дальнейшее математическое и численное моделирование двумерных задач следует проводить с учетом криволинейности границ раздела, а также подвижных границ раздела двух фаз и постановки на этих границах условий сопряжения и обобщенных условий Стефана.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Якушев В.П., Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И. Оценка технологий точного земледелия: аналитический обзор. Агрохим. вестник. 2002. № 3. С. 36–40.

[2]. Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Топаж А.Г. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. 396 с.

[3]. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.

[4]. Гончарова О.Н. Метод расщепления по физическим процессам для расчета трехмерных задач конвекции. Известия АлтГУ. 2007. №1. С. 39–44.

[5]. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.

[6]. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.