НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАК КЕНДРИКА-ФОН ФЕРСТЕРА

Д. А. Шоранова
Учреждение Российской Академии наук Научно - исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
(г. Нальчик)

Пусть $u(x,t)dx$ - количество клеток в единице объема в возрастном интервале от $x \geq 0$ до $x + dx$ в момент времени t. Если убыль клеток определяется естественной гибелью, вымыванием в случае проточного культивирования и убылью из данного возраста x при делении родительской клетки, то при интуитивно ясных предположениях относительно других характеристик другой популяции можно записать:

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = c(x,t)u(x,t).$$

Рассмотрим в области $G = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$ уравнение[1]

$$\partial^{\alpha}_{0t}u(x,t) + \partial^{\beta}_{0x}u(x,t) = c(x,t)u(x,t), \tag{1}$$

где $\partial^{\mu}_{0z}u(x,t)$- регуляризованная производная по Капуто порядка μ по переменной z, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$,

Задача. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области G удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 < x < l \tag{2}$$

$$u(0,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i,t), 0 < t < T \tag{3}$$

где φ -заданная функция, α_i - неотрицательные коэффициенты.

Краевые задачи для уравнения (1) исследовались в [см. 2, с.61 и библиографию там]. Отметим также [3], где для уравнения (1) исследовалась нелокальная краевая задача. Задача (1)-(3)относится к классу внутрикраевых задач с локальным смещением [4,с.29]

Вопрос о резрешимости задачи (1)-(3) сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра II рода.

$$\begin{cases} u(x_1,t) = F(x_1,t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^t u(x_i,\eta) w(x_1, t-\eta) d\eta, \\ u(x_2,t) = F(x_2,t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^t u(x_i,\eta) w(x_2, t-\eta) d\eta, \\ ... \\ u(x_j,t) = F(x_j,t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^t u(x_i,\eta) w(x_j, t-\eta) d\eta \end{cases}$$

где

$$F(t) = \int_0^x \varphi(s) \Big(-\frac{1}{x-s} \Big) e^{0,1}_{\alpha,\beta} \Big(-\frac{(x-s)^\alpha}{t^\beta} \Big) ds dx +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t c(s,\eta) e^{\alpha,0}_{\alpha,\beta} \Big(\frac{(x-s)^\alpha}{(t-\eta)^\beta} \Big) \frac{(x-s)^{\alpha-1}}{t-\eta} d\eta ds dx,$$

$$w(x_j,t) = \frac{1}{t-\eta} e^{1,0}_{\alpha,\beta} \Big(-\frac{x_j^\alpha}{(t-\eta)^\beta} \Big), \tag{4}$$

где $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$- функция типа Райта [2], $j = \overline{1,n}$.

С биологической точки зрения $u(x,t)$ - численность популяции возраста $x \in (0,l)$ в момент времени $t \in (0,T)$, а уравнение (1) моделирует динамику численности эволюционирующих популяций.

После определения функций $u(x_i,t)$, функция $u(x,t)$ находится как решение краевой задачи для уравнения (1) [2],[3].

Список литературы

[1] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. —301 с.

[2] Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. —Нальчик, 2005. —185 с.

[3] Шоранова Д.А.Нелокальная краевая задача для уравнения рождаемости Мак Кендрика-фон Ферстера с дробной производной Капуто по времени. Материалы Международной Российско - Болгарской VIII школы молодых ученных "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики"Нальчик - Хабез, 2010 г. — 120-122 с.

[4] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. —М.: Высш. шк., 2006. —287 с.