О равновесиях Вальраса и Эджворта в многорегиональных экономических системах*

В.А. Васильев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

vasilev@math.nsc.ru

Аннотация

В докладе обсуждаются условия эквивалентности равновесий Вальраса и Эджворта для одного класса многорегиональных экономических систем. Показано, что при строгой автаркичности и ненасыщенности таких систем имеет место совпадение их нечетких ядер и вальрасовских планов. Более того, используя представление равновесий Эджворта в виде элементов так называемого нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра, удается установить центральный результат доклада: строгая автаркичность и ненасыщенность достаточны и для совпадения множеств равновесных планов Вальраса и Эджворта. В целом, полученные результаты подтверждают известную гипотезу Эджворта об асимптотической эквивалентности ядер и равновесий для многорегиональных экономических систем достаточно общего вида. Указываются также некоторые приложения теорем эквивалентности к анализу условий существования равновесий Вальраса в моделях с неограниченными множествами региональных планов.

Введение

Работа продолжает исследования автора по вопросам эквивалентности равновесий Вальраса и Эджворта в неклассических рынках, начатые в [1]. Излагаемые в докладе результаты относятся к многорегиональным экономическим системам, изучавшимся в работах [2 - 7] и представляющим не только теоретический, но и значительный прикладной интерес. Отметим сразу же, что рассматриваемая проблематика тесно связана с задачей обоснования известной гипотезы Эджворта об асимптотической эквивалентности неблокируемых и равновесных распределений [8,9]. Показано, что найденные автором условия строгой автаркичности и ненасыщенности гарантируют совпадение нечетких ядер и вальрасовских планов анализируемых неклассических рыночных систем. Используя этот факт и полученное ранее представление равновесий Эджворта в виде элементов так называемого нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра многорегиональной системы [6], удается установить центральный результат доклада: строгая автаркичность и ненасыщенность достаточны и для совпадения множеств равновесных планов Вальраса и Эджворта. Учитывая, что вышеуказанные условия являются естественными модификациями стандартных требований положительности начальных запасов [10] и ненасыщаемости индивидуальных предпочтений [11], получаем, что для многорегиональных систем достаточно общего вида справедлив прямой

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН "Развитие теории, методологии и прикладных экономико-математических исследований"и Российского фонда фундаментальных исследований, № 10-06-00168а.

аналог известной теоремы Дебре-Скарфа о стягиваемости ядер реплик к равновесиям [11]. В целом, установленные теоремы эквивалентности дают исчерпывающее описание индивидуально-рациональных рыночных равновесий без использования какого-либо механизма цен, исключительно в терминах коллективной рациональности, характеризующей равновесия Эджворта. Такое двойственное описание, помимо самостоятельного интереса, может быть полезно при анализе условий существования равновесий Вальраса, основанном не на различных признаках существования неподвижной точки, а на теореме Скарфа о непустоте ядра кооперативной игры без побочных платежей [11,12][1]. Обсуждению некоторых перспектив этого анализа и посвящена заключительная часть доклада.

1 Модель $\mathcal{M}$

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [2], имеющая следующий вид:

$$\mathcal{M} =< R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} >, \tag{1}$$

где $R = \{1, \ldots, r\}$ - множество регионов; A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; G^s и H^s - прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, оисывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; b^s - вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; d^s - вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{l_s}_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x^s_i)^{l_s}_{i=1}$, $u^s = (u^s_j)^n_{j=1}$, $v^s = (v^s_j)^n_{j=1}$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ - степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (как обычно, символом $\mathbb{R}$ обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i,\ i = 1, \ldots, m$ для любых $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$). Элементы множества Z_s будем называть *планами* региона s.

Для оценки качества планов $z^s \in Z_s$ в дальнейшем используются функции t_s, сопоставляющие каждому вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту λ_s:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R \tag{2}$$

(другими словами, отображения $t_s : Z_s \to \mathbb{R}$ - целевые функции участников $s \in R$, характеризующие степень достижения целей их регионального развития).

Положим $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{s\in R} Z_s$ и через $Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s\}.$$

Важную роль в дальнейшем играют так называемые *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$\hat{Z}(s) = \hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R \tag{3}$$

[1]Напомним, что именно эта фундаментальная теорема теории игр и была использована для получения условий существования равновесий Эджворта в моделях многорегиональных экономических систем [6]

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathbb{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i,\ i = 1, \ldots, m$). Регион $s \in R$ будем называть *строго автаркическим*, если $\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$.

Кроме того, при анализе условий ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$ потребуется рассмотрение сбалансированных планов *однородной составляющей модели* $\mathcal{M}$, определяемой формулой

$$\mathcal{M}_0 =< R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s \in R} > . \tag{4}$$

Как видно из определения, модель $\mathcal{M}_0$ отличается от $\mathcal{M}$ только тем, что её начальный ресурсно-технологический потенциал равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

2 Вальрасовское равновесие и нечеткое ядро

Следуя [2], введем одно из основных понятий работы - определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$.

Определение 1. *Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является вальрасовским равновесием модели $\mathcal{M}$, если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ для всех $s \in R$, и при этом для любых $s \in R$ и $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ справедлива импликация*

$$\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$$

(как обычно, выражение $x \cdot y$ означает скалярное произведение векторов x и y).

Совокупность вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$ (элементы множества $W(\mathcal{M})$ будем называть также *вальрасовскими планами* модели $\mathcal{M}$). Напомним еще [2], что цены $\bar{p}$, фигурирующие в определении 1, называются *равновесными ценами*, а пара $(\bar{z}, \bar{p})$ - *равновесием Вальраса* модели $\mathcal{M}$.

Как вытекает из определения 1, региональные планы $\bar{z}^s = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)$ образуют вальрасовское равновесие модели $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда они сбалансированы (то есть когда системный план $(\bar{z}^s)_{s \in R}$ принадлежит множеству $Z_{\mathcal{M}}(R)$), и при некоторых ненулевых ценах $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ планы $\bar{z}^s$ доставляют максимальное значение целевым функциям t_s (заданным формулой (2)) на *бюджетных множествах* $B_s(\bar{p}),\ s \in R$. Последние определяются стандартными стоимостными соотношениями регионального экспорта-импорта

$$B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s\}, \quad s \in R.$$

Оказывается [7], что достаточно общие условия, гарантирующие существование вальрасовских равновесий модели $\mathcal{M}$, представляют собой естественное усиление указанных в [5] требований $(M1)$ и $(M2^o)$, обеспечивающих непустоту ядра модели $\mathcal{M}$. Дадим необходимые определения.

Определение 2. *Регион $s \in R$ называется строго автаркическим, если $\hat{Z}_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$ (или, более детально, если существует план $z^s_0 = (x^s_0, u^s_0, v^s_0, \lambda^0_s) \in Z_s$ такой, что $u^s_0 \gg v^s_0$).*

Определение 3. *Будем говорить, что ресурсно-технологические возможности региона $s \in R$ ограниченные, если множество Z_s ограничено.*

Теорема 1. *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, а их ресурсно-технологические возможности ограниченные, то в $\mathcal{M}$ существует равновесие Вальраса.*

В конце доклада будут сформулированы и другие условия существования вальрасовских равновесий, не включающие, в частности, требования ограниченности ресурсно-технологических возможностей регионов. Эти новые условия существования удалось получить с использованием двух теорем эквивалентности: 1)для вальрасовских равновесий и нечетких ядер, и 2) для вальрасовских и так называемых эджвортовских равновесий модели $\mathcal{M}$. Заключительная часть этого раздела целиком посвящена формулировке и доказательству первой из указанных теорем.

Для полноты изложения приведем сначала формулировку еще одного фундаментального понятия оптимальности в рассматриваемом классе моделей - понятия нечеткого ядра (совокупности сбалансированных планов, не блокируемых никакой нечеткой коалицией). Для формализации понятия блокирования напомним [1,2,13], что элементы множества σ_F, определяемого формулой

$$\sigma_F := \{\ f = (f_1, \ldots, f_r) \mid f \neq 0,\ f_s \in [0,1],\ s \in R\},$$

называются нечеткими коалициями. Величина компоненты f_s нечеткой коалиции f указывает степень участия региона $s \in R$ в координации усилий "большой коалиции"R. При этом обычные коалиции, как непустые части множества R, естественным образом отождествляются с соответствующими ненулевыми вершинами гиперкуба $[0,1]^r = \sigma_F \cup 0$, когда каждый регион s либо полностью участвует ($f_s = 1$), либо полностью уклоняется от участия ($f_s = 0$) в указанной координации. Через $R(f)$ будем обозначать носитель нечёткой коалиции $f = (f_1, \ldots, f_r)$, определяемый равенством $R(f) := \{s \in R \mid f_s > 0\}$. Следуя [2,11], введем определение нечеткого блокирования (блокирования нечеткими коалициями, в другой терминологии) во множестве $Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Определение 4. *Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ блокируется нечёткой коалицией $f = (f_1, \ldots, f_r)$, если существуют региональные планы $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s,\ s \in R(f)$, такие, что*

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(f)$,

(2) $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$.

Совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}$, не блокируемых никакой нечёткой коалицией $f \in \sigma_F$, будем обозначать через $C_F(\mathcal{M})$ и называть *нечётким ядром модели* $\mathcal{M}$.

Введем понятие ненасыщенности региона, используемое в дальнейшем при описании условий совпадения нечетких ядер и вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$.

Определение 5. *Регион $s \in R$ называется ненасыщенным, если для него выполняется неравенство*

$$\sup_{z^s\in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{z^s\in \widetilde{Z}_s} t_s(z^s)$$

где $\widetilde{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Замечание 1. *Нетрудно проверить, что при ненасыщенности всех регионов для любого равновесия Вальраса $(\bar{z}, \bar{p})$ имеют место равенства*

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \bar{v}^s, \quad s \in R.$$

Действительно, допуская, что $\bar{p} \cdot \bar{u}^s > \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ для некоторого s, получаем:

$$\bar{p} \cdot u^s(\nu_*) > \bar{p} \cdot v^s(\nu_*) \tag{5}$$

для достаточно малого $\nu_* \in (0,1)$. *Здесь* $u^s(\nu_*) = \bar{u}^s + \nu_*(u^s_* - \bar{u}^s)$, $v^s(\nu_*) = \bar{v}^s + \nu_*(v^s_* - \bar{v}^s)$, u^s_*, v^s_* *- объемы вывоза и ввоза в плане* z^s_*, *удовлетворяющем условию* $t_s(z^s_*) > t_s(\bar{z}^s)$ *(таковой существует ввиду сбалансированности* $\bar{z}$ *и ненасыщенности региона* s*). Но неравенство* (5) *противоречит определению равновесности плана* $\bar{z}$, *поскольку, очевидно,* $t_s(z^s(\nu)) > t_s(\bar{z}^s)$ *для всех* $\nu \in (0,1)$.

Один из главных результатов работы заключается в следующей теореме эквивалентности.

Теорема 2. *Если регионы модели* $\mathcal{M}$ *строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро* $C_F(\mathcal{M})$ *совпадает с множеством вальрасовских планов* $W(\mathcal{M})$.

Доказательство. Для полноты изложения приведем сначала доказательство известного (см, например, [2,6]) вложения $W(\mathcal{M}) \subseteq C_F(\mathcal{M})$, вытекающего непосредственно из определений вальрасовского равновесия и нечеткого ядра модели $\mathcal{M}$. Итак, пусть $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R}$ - равновесный план модели $\mathcal{M}$, а $\bar{p}$ - отвечающие ему равновесные цены. Допустим, что $\bar{z}$ блокируется некоторой нечеткой коалицией $f = (f_1, \ldots, f_r)$ с помощью региональных планов $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$, $s \in R(f)$. Согласно определению блокирования имеем: $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$ для каждого $s \in R(f)$. Поэтому, в силу включения $\bar{z} \in W(\mathcal{M})$ и на основании определения равновесности, получаем: $\bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$, $s \in R(f)$. Но умножение этих неравенств на соответствующие положительные компоненты вектора f и последующее суммирование полученных соотношений дает неравенство $\bar{p} \cdot \sum_{s\in R(f)} f_s u^s < \bar{p} \cdot \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$, противоречащее неотрицательности вектора $\bar{p}$ и неравенству $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$, вытекающему из блокирования $\bar{z}$ коалицией f с использованием региональных планов z^s, $s \in R(f)$. Полученное противоречие и доказывает включение $\bar{z} \in C_F(\mathcal{M})$.

Переходя к проверке нетривиального вложения $C_F(\mathcal{M}) \subseteq W(\mathcal{M})$, зафиксируем произвольный элемент $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R}$ из нечеткого ядра $C_F(\mathcal{M})$ и покажем, что существует ненулевой неотрицательный вектор $\bar{p}$, образующий вместе с планом $\bar{z}$ равновесие Вальраса модели $\mathcal{M}$. С этой целью введем в рассмотрение множества

$$\mathcal{K}_s(\bar{z}^s) := \{T_s(z^s) \mid z^s \in \mathcal{P}_s(\bar{z}^s)\}, \quad s \in R,$$

где $\mathcal{P}_s(\bar{z}^s) := \{z^s \in Z_s \mid t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)\}$, а преобразования T_s определяются формулами

$$T_s(z^s) := u^s - v^s, \quad z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

Отметим, что в силу включения $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ и предположения о ненасыщенности регионов все множества $\mathcal{K}_s(\bar{z}^s)$ непусты. Поэтому множество

$$\mathcal{K}(\bar{z}) := \{\sum_{s\in R} f_s w^s \mid (f_1, \ldots, f_r) \in \sigma_F,\ (w^1, \ldots, w^r) \in \prod_{s\in R} \mathcal{K}_s(\bar{z}^s)\}$$

определено корректно.

Покажем, что множество $\mathcal{K}(\bar{z})$ выпуклое. Пусть элементы $d^i := \sum_{s\in R} f_{si} w^{si}$, $i = 1, 2$, принадлежат $\mathcal{K}(\bar{z})$, а ν - произвольное число из интервала $(0,1)$. Покажем, что выпуклая комбинация $d(\nu) = \nu d^1 + (1-\nu) d^2$ тоже принадлежит $\mathcal{K}(\bar{z})$. С этой целью построим выпуклую комбинацию $f(\nu) := \nu f^1 + (1-\nu) f^2$ нечетких коалиций $f^1 = (f^{11}, \ldots, f^{r1})$ и $f^2 = (f^{12}, \ldots, f^{r2})$, фигурирующих в определении элементов d^1 и d^2. Далее, введем в рассмотрение элементы $w^s(\nu)$, определяемые формулой

$$w^s(\nu) = \begin{cases} [\nu f^{s1} w^{s1} + (1-\nu) f^{s2} w^{s2}]/f^s(\nu), & \text{если } s \in R(f^1) \bigcup R(f^2), \\ u^s_* - v^s_* & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{6}$$

где w^{si} - составляющие векторов $w^i := (w^{1i}, \ldots, w^{ri})$, $i = 1, 2$, участвующих в построении элементов d^1 и d^2, а u_*^s и v_*^s - объемы вывоза и ввоза региона $s \in R$, входящие в его план z_*^s, удовлетворяющий условию $t_s(z_*^s) > t_s(\bar{z}^s)$. Заметим, что существование указанных планов z_*^s гарантируется предположением о ненасыщенности всех регионов модели $\mathcal{M}$. Далее, отметим, что в силу линейности целевых функций t_s и выпуклости множеств Z_s все множества $\mathcal{P}_s(\bar{z}^s)$, $s \in R$, являются выпуклыми. Следовательно, выпуклыми являются и множества $\mathcal{K}_s(\bar{z}^s)$, $s \in R$, представляющие собой линейные образы последних (напомним, что по построению для каждого $s \in R$ выполняется равенство $\mathcal{K}_s(\bar{z}^s) = T_s(\mathcal{P}_s(\bar{z}^s))$. Отсюда, с учетом равенств $f^s(\nu) = \nu f^{s1} + (1-\nu) f^{s2}$, $s \in R$, вытекает, что для каждого $s \in R(f^1) \bigcup R(f^2)$ вектор $w^s(\nu)$, будучи выпуклой комбинацией векторов w^{s1} и w^{s2} из $\mathcal{K}_s(\bar{z})$, тоже принадлежит этому множеству. Что касается векторов $w_*^s = u_*^s - v_*^s$, то их принадлежность соответствующим множествам $\mathcal{K}_s(\bar{z}^s)$ вытекает непосредственно из равенств $w_*^s = T_s(z_*^s)$ и включений $z_*^s \in \mathcal{P}_s(\bar{z}^s)$, $s \in \widetilde{R}$, где $\widetilde{R} = R \setminus (R(f^1) \bigcup R(f^2))$. Суммируя вышесказанное, получаем, что линейная комбинация

$$c(\nu) := \sum_{s \in R(f^1) \bigcup R(f^2)} f^s(\nu) w^s(\nu) + \sum_{s \in \widetilde{R}} f^s(\nu)(u_*^s - v_*^s),$$

построенная по нечеткой коалиции $f(\nu)$ и вектору $w(\nu) = (w^1(\nu), \ldots, w^r(\nu)) \in \prod_{s \in R} \mathcal{K}_s(\bar{z}^s)$ (с составляющими $w^s(\nu)$, определяемыми формулой (6)), принадлежит множеству $\mathcal{K}(\bar{z})$. С другой стороны, прямое вычисление линейной комбинации $c(\nu)$ (с учетом формул для $f^s(\nu)$ и $w^s(\nu)$) дает равенство $c(\nu) = d(\nu)$, что и доказывает требуемое включение $d(\nu) \in \mathcal{K}(\bar{z})$.

Итак, множество $\mathcal{K}(\bar{z})$ непусто и выпукло. Непосредственно из включения $\bar{z} \in C_F(\mathcal{M})$ и определения нечеткого ядра вытекает соотношение $\mathcal{K}(\bar{z}) \bigcap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$, показывающее, что $\mathcal{K}(\bar{z})$ не пересекается с положительным ортантом $\mathbb{R}_+^n$. Применяя теорему отделимости Минковского, получаем: существует линейный функционал, определяемый некоторым ненулевым вектором $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$, разделяющий выпуклые множества $\mathcal{K}(\bar{z})$ и $\mathbb{R}_+^n$. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что выполняется неравенство

$$\sup_{d \in \mathcal{K}(\bar{z})} \bar{p} \cdot d \le \inf_{e \in \mathbb{R}_+^n} \bar{p} \cdot e. \tag{7}$$

Поскольку конус $\mathbb{R}_+^n$ содержит все лучи, проходящие через единичные орты, неравенство (7) может иметь место лишь при неотрицательности вектора $\bar{p}$. Итак, $\bar{p}$ является ненулевым неотрицательным вектором и, следовательно, нижняя грань в правой части соотношения (7) равна нулю. Значит, выполняются неравенства

$$\bar{p} \cdot d \le 0, \quad d \in \mathcal{K}(\bar{z}). \tag{8}$$

Далее, нетрудно убедиться, что для каждого $s \in R$ множество $\mathcal{K}_s(\bar{z}^s)$ содержится в $\mathcal{K}(\bar{z})$. Это легко вытекает из строения $\mathcal{K}(\bar{z})$ и включения $e^s \in \sigma_F$, где e^s - индикаторная функция одноэлементного множества $\{s\}$ из $R : e_m^s = 1$ при $m = s$ и $e_m^s = 0$ при $m \in R \setminus \{s\}$. Но из вложений

$$\mathcal{K}_s(\bar{z}^s) \subseteq \mathcal{K}(\bar{z}), \quad s \in R,$$

вытекает, что неравенства, аналогичные (8), имеют место и в региональном разрезе

$$\bar{p} \cdot w^s \le 0 \quad \text{для всех} \quad w^s \in \mathcal{K}(\bar{z}^s), \ s \in R. \tag{9}$$

Следовательно, для каждого $s \in R$ и регионального плана $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ справедлива импликация

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s) \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s \le \bar{p} \cdot v^s. \tag{10}$$

Убедимся, что указанные импликации позволяют установить равенства

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \bar{v}^s, \quad s \in R, \tag{11}$$

где $\bar{u}^s, \bar{v}^s$ - объемы вывоза и ввоза в региональном плане $\bar{z}^s$ - составной части рассматриваемого плана $\bar{z}$ из $C_F(\mathcal{M})$. Покажем сначала, что для каждого региона s выполняется неравенство $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$. С этой целью зафиксируем некоторое $s \in R$ и рассмотрим планы $z^s(\mu) := \bar{z}^s + \mu(z_*^s - \bar{z})^s,\ \mu \in (0,1)$, где z_*^s - уже упоминавшиеся планы региона s, удовлетворяющие устовию $t_s(z_*^s) > t_s(\bar{z}^s)$ (таковые существуют ввиду ненасыщенности регионов модели $\mathcal{M}$). Используя линейность целевой функции t_s легко видеть, что для всех $\mu \in (0,1)$ справедливы неравенства $t_s(z^s(\mu)) > t_s(\bar{z}^s)$. Но тогда на основании импликации (10) получаем:

$$\bar{p} \cdot u^s(\mu) \leq \bar{p} \cdot v^s(\mu) \quad \text{для всех } \mu \in (0,1), \tag{12}$$

где $u^s(\mu)$ и $v^s(\mu)$ - объемы вывоза и ввоза в региональном плане $z^s(\mu)$. По построению $z^s(\mu)$ имеем: $u^s(\mu) = \bar{u}^s + \mu(u_*^s - \bar{u}^s)$ и $v^s(\mu) = \bar{v}^s + \mu(v_*^s - \bar{v}^s)$. Поэтому, переходя к пределу при $\mu \to 0$ в соотношении (12), получаем упоминавшееся уже неравенство $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$. Ясно, что ввиду произвола в выборе s аналогичные соотношения имеют место и для всех остальных регионов модели и, следовательно, справедливы неравенства

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s, \quad s \in R. \tag{13}$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$\bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{v}^s. \tag{14}$$

Но ввиду сбалансированности плана $\bar{z}$ выполняется неравенство $\sum_{s \in R} \bar{u}^s \geq \sum_{s \in R} \bar{v}^s$. Отсюда, с учетом неотрицательность вектора $\bar{p}$ и неравенства (14), имеем: $\bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{v}^s$. Следовательно, все неравенства в соотношениях (13) реализуются как равенства, что и означает справедливость равенств (11).

В силу вышесказанного, для завершения доказательства того, что пара $(\bar{z}, \bar{p})$ составляет равновесие Вальраса модели $\mathcal{M}$ остается убедиться, что для любого региона s и для любого плана z^s, более предпочтительного, чем $\bar{z}^s$, выполняется неравенство $\bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$. Итак, пусть $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$ для некоторого $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$. На основании установленной ранее импликации (10) должно выполняться неравенство $\bar{p} \cdot u^s \leq \bar{p} \cdot v^s$. Допуская, что оно реализуется как равенство, рассмотрим выпуклые комбинации $z_0^s(\mu) = z^s + \mu(z_0^s - z^s),\ \mu \in (0,1)$, где z_0^s - некоторый строго автаркический план региона s (такие планы существуют в силу предположения о строгой автаркичности всех регионов модели $\mathcal{M}$). Ясно, что ввиду непрерывности функции t_s при достаточно малом значении параметра $\mu = \mu_*$ должно выполняться неравенство $t_s(z_0^s(\mu_*)) > t_s(\bar{z}^s)$. Отсюда, с учетом равенства $\bar{p} \cdot u^s = \bar{p} \cdot v^s$ и соотношений $u_0^s \gg v_0^s,\ \bar{p} \geq 0,\ \bar{p} \neq 0$, имеем: $\bar{p} \cdot u_0^s(\mu_*) > \bar{p} \cdot v_0^s(\mu_*)$, что противоречит импликации (10). Полученное противоречие и завершает доказельство теоремы. □

Замечание 2. *Отметим, что для классических моделей обмена, где совершенная конкуренция понимаетсяы как неатомичность пространства участников, вместо нечетких коалиций при описании ядра, совпадающего с множеством равновесий, достаточно ограничится обычными элементами соответствующей алгебры множеств. Именно, согласно известной теореме Аумана, в неатомических моделях обмена обычное ядро совпадает с множеством вальрасовских распределений* [9]*. Такой же эффект имеет место и* *для некоторых неклассических неатомических моделей обмена (см., например,* [14]*). Возможность замены нечеткого ядра на обычное в условиях неатомичности пространства участников обеспечивается знаменитой теоремой Ляпунова о выпуклости и компактности множества значений конечной вектор-значной неатомической меры* [15]*. Именно, согласно этой теореме, в условиях неатомичности ранг конечной вектор-значной меры совпадает с рангом ее аддитивного продолжения на множество нечетких коалиций. Этот феномен и позволяет, говоря неформально, ограничиваться обычным блокированием при обобщении результатов типа теоремы 2 на случай неатомических моделей.*

3 Равновесие Эджворта и нечеткое $\mathbb{Q}$-ядро

Переходя ко второй теореме эквивалентности, устанавливающей условия совпадения множеств вальрасовских и эджвортовских планов, напомним необходимые определения из [6], где было введено одно из основных понятий оптимальности для рассматриваемого класса моделей - понятие равновесия Эджворта. Несколько модифицируя классическое определение реплики в моделях типа Эрроу-Дебре [9 - 11], введём сначала определение *дробления (измельчения) модели* $\mathcal{M}$. Зафиксируем $k \geq 1$ и положим

$$R_{[k]} := \{(s, m) \mid s \in R,\ m = 1, \ldots, k\}. \qquad (15)$$

Далее, для каждого элемента $(s, m) \in R_{[k]}$ (понимаемого в дальнейшем как "номер"m-ой доли региона $s \in R$ исходной экономики $\mathcal{M}$) введём матрицы A^{sm}, G^{sm}, H^{sm} и векторы b^{sm}, d^{sm}, полагая

$$A^{sm} := A^s,\ G^{sm} := G^s,\ H^{sm} := H^s,\ b^{sm} := \frac{1}{k} b^s,\ d^{sm} := d^s. \qquad (16)$$

Определение 6. *Модель многорегиональной экономической системы*

$$\mathcal{M}_{[k]} :=< R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m)\in R_{[k]}} >, \qquad (17)$$

параметры которой определяются соотношениями (15), (16)*, будем называть дроблением ранга k (k-дроблением) модели $\mathcal{M}$. Словосочетания "дробление ранга k"и "k-дробление"будем использовать как синонимы.*

Отметим, что в силу соотношний между параметрами модели $\mathcal{M}$ и её k-дробления $\mathcal{M}_{[k]}$, для множеств

$$Z_{sm} = \{z^{sm} = (x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) \geq 0 \mid A^{sm}x^{sm} + G^{sm}u^{sm} + H^{sm}v^{sm} \geq b^{sm} + \lambda_{sm}d^{sm}\}$$

ресурсно-технологических возможностей регионов $(s, m) \in R_{[k]}$ выполняются равенства

$$Z_{sm} = \frac{1}{k} Z_s \quad \text{для каждого} \ \ s \in R \ \ \text{и} \ m = 1, \ldots, k.$$

Подчеркнём, что из соображений корректности множество допустимых планов участника (s, m) модели $\mathcal{M}_{[k]}$ следовало бы обозначать с использованием символа ранга дробления (например, так: Z^k_{sm}). То же самое относится и к обозначению векторов b^{sm}, характеризующих ресурсно-технологический потенциал регионов (s, m) модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Однако учитывая, что во всех рассматриваемых ниже случаях ранг дробления модели $\mathcal{M}$ фиксируется явным образом, во избежание излишней громоздкости символ этого ранга опускается. Обратим внимание также на то, что как и в исходной модели $\mathcal{M}$, целевые функции $t_{sm} : Z_{sm} \to \mathbb{R}$ регионов (s, m) дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ определяются формулой

$$t_{sm}(x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) := \lambda_{sm}, \quad (s, m) \in R_{[k]}.$$

Как видно из самого определения дробления ранга $k+1$, в $\mathcal{M}_{[k+1]}$ наряду с участниками исходной системы с уменьшенными в $k+1$ раз ресурсами, в равном количестве из k экземпляров представлены идентичные им доли соответствующих регионов, что усиливает уровень конкуренции в новой системе и позволяет (согласно известной гипотезе Эджворта [1, 8, 9]) более точно оценить равновесные распределения с помощью элементов ядер дроблений. В этом смысле вводимое далее понятие равновесия Эджворта является "предельным"вариантом развития указанной идеи аппроксимации вальрасовских состояний неблокируемыми в моделях типа (17), изображающих рост совершенной конкуренции при возрастании ранга дробления регионов.

Избегая громоздкой символики, положим $Z_{[k]} := Z_{\mathcal{M}_{[k]}} = \prod_{(s,m)\in R_{[k]}} Z_{sm}$ и, как и ранее, через $Z(R_{[k]})$ будем обозначать совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}_{[k]}$:

$$Z(R_{[k]}) := \{(z^{sm})_{(s,m)\in R_{[k]}} \in Z_{[k]} \mid \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} \geq \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm}\}.$$

Наконец, для $k \geq 1$ черз $z_{[k]}$ обозначим *k-дробление плана* $z = (z^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, представляющее собой сбалансированный (что будет видно из дальнейших пояснений) план модели $\mathcal{M}_{[k]}$, построенный из региональных составляющих z^s плана z по формуле:

$$(z_{[k]})^{sm} := \frac{1}{k} z^s, \quad s \in R,\ m = 1, \ldots, k.$$

Как вытекает непосредственно из определения дробления $z_{[k]}$, определяемый им план устанавливает одинаковые задания $\frac{1}{k}z^s$ однотипным[2] участникам модели $\mathcal{M}_{[k]}$. Отсюда, в силу сбалансированности z, и получается неравенство

$$\sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} = \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s = \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm},$$

доказывающее сбалансированность плана $z_{[k]}$ в модели $\mathcal{M}_{[k]}$.

Завершая описание конструкции, лежащей в основе понятия равновесия Эджворта, напомним [2,5] еще определение обычного (то есть порождаемого обычными коалициями $T \subseteq R$) блокирования и обычного ядра в модели $\mathcal{M}$.

Определение 7. *Коалиция $T \subseteq R$ блокирует $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, если у неё имеется такой план $(z^s)_{s\in T} = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in T} \in \prod_{s\in T} Z_s$, для которого выполняются соотношения*

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in T,$
(2) $\sum_{s\in T} u^s \geq \sum_{s\in T} v^s$.

Множество всех планов $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, которые не блокируются никакой коалицией $T \subseteq R$, будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть *ядром модели $\mathcal{M}$*.

Определим, наконец, одно из главных понятий оптимальности, изучаемых в работе - равновесие Эджворта модели межрегионального взаимодействия[3].

Определение 8. *План $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется равновесием Эджворта модели $\mathcal{M}$, если все его k-дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений модели $\mathcal{M}$:*

$$\bar{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]}) \quad \textit{для каждого} \quad k \geq 1.$$

[2]Участники (s,m) и (s',m') модели $M_{[k]}$ называются *однотипными*, если $s = s'$

[3]Аналогичное понятие вводилось и изучалось ранее лишь для классической модели Эрроу-Дебре и некоторых её модификаций, указанных, например, в [1, 11]

Совокупность равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

Завершая этот раздел, укажем используемую в дальнейшем кооперативную характеризацию равновесий Эджворта, полученную в [6]. Речь идет о представлении множества $E(\mathcal{M})$ в виде некоторого множества сбалансированных планов, не блокируемых специальными, так называемыми нечеткими $\mathbb{Q}$-коалициями, составляющими всюду плотное подмножество множества σ_F. Приведем необходимые определения из [6]. Обозначим через $\mathbb{Q}$ совокупность всех рациональных чисел и положим

$$\sigma_F^{\mathbb{Q}} := \{(f_1, \ldots, f_r) \in \sigma_F \mid f_s \in \mathbb{Q}, \quad s \in R\}.$$

Элементы множества $\sigma_F^{\mathbb{Q}}$, состоящего (по определению) из всех нечетких коалиций, имеющих только рациональные компоненты, будем называть *нечёткими $\mathbb{Q}$-коалициями.*

Ограничиваясь блокированием с помощью нечетких $\mathbb{Q}$-коалиций, как и в [6], введем в рассмотрение так называемое *нечеткое $\mathbb{Q}$-ядро* $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}$, определяемое формулой

$$C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}) := \{z \in Z_{\mathcal{M}}(R) \mid z \text{ не блокируется никакой коалиций из } \sigma_F^{\mathbb{Q}}\}.$$

Таким образом, сбалансированный план $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R}$ принадлежит нечеткому $\mathbb{Q}$-ядру $C_F^{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда не существует нечеткой коалиции $(f_1, \ldots, f_r)$ с рациональными компонентами $f_1, \ldots, f_r$, и региональных планов $z^s = (x^s, u^s, v^s, \ldots) \in Z_s$, $s \in R(f)$, таких, что все эти планы более предпочтительны, чем соответствующие региональные планы $\bar{z}^s$, $s \in R(f)$, и при этом выполняется балансовое соотношение $\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s$.

Оказывается [6], что вышеприведенное довольно громоздкое определение множества $E(\mathcal{M})$ равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ можно без каких-либо дополнительных условий заменить, где это уместно, следующим коротким описанием.

Предложение 1. *Для любой многорегиональной модели $\mathcal{M}$ вида* (1) *справедливо равенство $E(\mathcal{M}) = C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$.*

4 О совпадении множеств $W(\mathcal{M})$ и $E(\mathcal{M})$

Ясно, что в силу определения множества $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$, для ядер $C_F(\mathcal{M}$ и $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$ выполняется соотношение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$. Нетривиальным является тот факт, что для достаточно широкого класса моделей имеет место и обратное вложение.

Предложение 2. *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, то ее нечеткое ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с нечетким $\mathbb{Q}$-ядром $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, непосредственно из определения нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра вытекает вложение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$. Для доказательства обратного вложения $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}) \subseteq C_F(\mathcal{M})$ достаточно убедиться, что всякий план, не принадлежащий нечеткому ядру $C_F(\mathcal{M})$, блокируется некоторой коалицией из $\sigma_F^{\mathbb{Q}}$. Итак, пусть план $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ блокируется некоторой коалицией $f = (f_1, \ldots, f_r)$ из $\sigma_F \setminus \sigma_F^{\mathbb{Q}}$. Покажем, что существует коалиция $f^0 = (f_1^0, \ldots, f_r^0)$ из $\sigma_F^{\mathbb{Q}}$, также блокирующая $\bar{z}$. Напомним, что из блокируемости плана $\bar{z}$ коалицией f вытекает существование региональных планов $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R(f)$, таких, что

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(f), \tag{18}$$

и при этом выполняется неравенство

$$\sum_{s\in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s\in R(f)} f_s v^s. \tag{19}$$

Убедимся, что в условиях строгой автаркичности регионов можно, не уменьшая общности, считать, что все покомпонентные неравенства в (19) являются строгими. С этой целью для каждого $\mu \in (0,1]$ определим региональные планы $z_0^s(\mu) := z^s + \mu(z_0^s - z^s),\ s \in R(f)$, где $z_0^s = (x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0)$ - некоторые строго автаркические планы регионов $s \in R(f)$. В силу непрерывности функций t_s имеем: при достаточно малых $\mu \in (0,1]$ строгие неравенства (18) остаются в силе и при замене z^s на вышеопределенные планы $z_0^s(\mu),\ s \in R(f)$. С другой стороны, рассматривая линейную комбинацию $w(\mu) := \sum_{s\in R(f)} f_s[u_0^s(\mu) - v_0^s(\mu)]$, где $u_0^s(\mu) := u^s + \mu(u_0^s - u^s),\ v_0^s(\mu) := v^s + \mu(v_0^s - v^s)$, после элементарных преобразований получаем:

$$w(\mu) = (1-\mu)\sum_{s\in R(f)} f_s(u^s - v^s) + \mu \sum_{s\in R(f)} f_s(u_0^s - v_0^s).$$

Отсюда, на основании соотношений (19) и неравенств строгой автаркичности $u_0^s \gg v_0^s,\ s \in R$, вытекает строгое неравенство: $w(\mu) \gg 0$. Итак, заменяя z^s на новые региональные планы $z_0^s(\mu) = (x_0^s(\mu), u_0^s(\mu), v_0^s(\mu), \lambda_s^0(\mu))$, при достаточно малом $\bar\mu \in (0,1]$ получаем: $t_s(z_0^s(\bar\mu)) > t_s(\bar z^s),\ s \in R(f)$, и при этом выполняется требуемое строгое неравенство

$$\sum_{s\in R(f)} f_s u_0^s(\bar\mu) \gg \sum_{s\in R(f)} f_s v_0^s(\bar\mu). \tag{20}$$

Обозначим через m число элементов множества $R(f)$ и перенумеруем, если необходимо, элементы множества R так, чтобы первые m из них образовывали множество $R(f)$. Рассмотрим векторзначную функцию $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, определяемую формулой $\varphi(g_1,\ldots,g_m) := \sum_{k=1}^m g_k w_0^k(\bar\mu)$, где $w_0^k(\bar\mu) := u_0^k(\bar\mu) - v_0^k(\bar\mu),\ k = 1,\ldots,m$. Ясно, что эта функция непрерывна. Кроме того, на основании неравенства (20), все компоненты $\varphi_i(f_1,\ldots,f_m),\ i = 1,\ldots,n$, вектора $\varphi(f_1,\ldots,f_m)$ положительны. Отсюда вытекает существование достаточно малого положительного числа δ такого, что $\varphi_i(g_1,\ldots,g_m) > 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$ и для любых чисел $g_1,\ldots,g_m \in (0,1]$, удовлетворяющих соотношениям: $g_k = f_k$, если f_k - рациональное, и $|g_k - f_k| < \delta$, если f_k - иррациональное число. Следовательно, на основании плотности рациональных чисел в интервале $[0,1]$, получаем: существует нечеткая коалиция $f^0 = (f_1^0,\ldots,f_r^0)$ из $\sigma_F^{\mathbb{Q}}$ такая, что $R(f^0) = R(f)$, и при этом выполняются неравенства $|f_s^0 - f_s| < \delta,\ s \in R(f)$. Но тогда, в силу выбора δ, для нечеткой коалиции f^0 из $\sigma_F^{\mathbb{Q}}$ выполняется неравенство $\varphi(f_1^0,\ldots,f_m^0) \gg 0$, что вместе с отмечавшимися уже неравенствами $t_s(z_0^s(\bar\mu)) > t_s(\bar z^s),\ s \in R(f)$, и означает требуемое: наряду с коалицией f, план $\bar z$ блокируется и рационально-значной коалицией f^0. □

Объединяя теорему 2 и предложения 1 и 2, получаем один из главных результатов работы, устанавливающий эквивалентность вальрасовских и эджвортовских равновесий для обширного класса межрегиональных экономических систем.

Теорема 3. *Если все регионы системы $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то множество ее вальрасовских равновесий совпадает с множеством равновесий Эджворта*

$$W(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M}). \tag{21}$$

Доказательство. На основании теоремы 2 в принятых предположениях строгой автаркичности и ненасыщенности имеет место равенство $W(\mathcal{M}) = C_F(\mathcal{M})$. Далее, ввиду предложения 2, из строгой автаркичности регионов вытекает совпадение ядер $C_F(\mathcal{M})$ и $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M})$. Наконец, в силу предложения 1 справедливо равенство $C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M})$. Таким образом, в условиях теоремы 2 справедливы соотношения $W(\mathcal{M}) = C_F(\mathcal{M}) = C_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M})$, которые и доказывают требуемое равенство (21). □

5 Некоторые приложения теорем эквивалентности

Помимо отмечавшейся уже роли теорем эквивалентности в вопросах кооперативной характеризации вальрасовских равновесий (в терминах неблокируемости по отношению к некоторым классам коалиций), большой интерес представляют и возможности получения новых теорем существования равновесий Вальраса, основанные на применении нетрадиционного для этой прблематики аппарата теории кооперативных игр. В частности, как показывает работа [6], исследование условий существования равновесий Эджворта допускает прямое применение традиционных средств равновесного анализа и теории игр, включая известную теорему Скарфа о непустоте обычных ядер кооперативных игр[12]. Следовательно, новые условия существования равновесий Вальраса могут быть получены комбинацией теоремы 3 настоящей работы и теоремы 2 из [6].

Переходя к формулировке теоремы существования равновесия Вальраса, опирающейся на кооперативную характеризацию равновесных планов, указанную в теореме 2, и на упрощенное описание нечеткого ядра, данное в предложении 2, напомним некоторые условия непустоты нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра, найденные в [6].

Определение 9. *Будем говорить, что модель $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей этой модели исчерпывается нулевым планом:*

$$Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}. \tag{22}$$

Напомним (формула (4) из п.1), что однородная составляющая $\mathcal{M}_0$ отличается от модели $\mathcal{M}$ только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$. Поэтому отсутствие "рога изобилия" в смысле определения 9 означает, как и в классических моделях равновесного анализа [10], что при нулевом экономическом потенциале возможна лишь нулевая хозяйственная активность. Отметим еще, что в формальном плане соотношение (22) является необходимым и достаточным условием ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$ сбалансированных планов модели $\mathcal{M}$ (что вытекает из полиэдральности $Z_{\mathcal{M}}(R)$ и известных результатов выпуклого анализа [16]). Таким образом, отсутствие "рога изобилия"(оно же - условие $(M2a)$ из [6]) для модели $\mathcal{M}$ - значительно более слабое требование, чем условие ограниченности каждого из множеств $Z_s,\ s \in R$, фигурирующее в теореме 1 из [7].

Еще одно используемое в дальнейшем условие представляет собой модификацию требования ограниченной трансферабельности модели $\mathcal{M}$ из [6], эквивалентную так называемой *$\mathcal{P}$-регулярности* этой модели. Напомним, что план $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является Парето-оптимальным (слабо Парето-оптимальным), если не существует плана $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ такого, что $t(z) > t(\bar{z})$ $(t(z) \gg t(\bar{z}))$. Здесь используется сокращение $t(z) := (t_1(z^1), \ldots, t_r(z^r))$, а соотношение $t(z) > t(\bar{z})$ означает, как обычно, что $t(z) \geq t(\bar{z})$ и $t(z) \neq t(\bar{z})$.

Определение 10. *Будем говорить, что модель $\mathcal{M}$ является $\mathcal{P}$-регулярной, если $P'(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$, где $P(\mathcal{M})$ - множество Парето-оптимальных, а $P'(\mathcal{M})$ - слабо Парето-оптимальных планов из $Z_{\mathcal{M}}(R)$.*

Ясно, что $\mathcal{P}$-регулярность модели $\mathcal{M}$ означает справедливость импликации

$$\forall\ z, \bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)\{[t(z) > t(\bar{z})] \Rightarrow \exists\ \tilde{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)[t(\tilde{z}) \gg t(\bar{z})]\}. \tag{23}$$

Отметим, что хотя вопрос о простых достаточных условиях $\mathcal{P}$-регулярности в терминах параметров модели $\mathcal{M}$ не подвергался основательному анализу, представляется, что проверка импликации (23) для конкретных моделей межрегионального взаимодействия не должна вызывать больших затруднений.

Опираясь на теорему 3, предложение 1 и упоминавшийся уже результат из [6], касающийся условий непустоты нечеткого $\mathbb{Q}$-ядра модели $\mathcal{M}$, получаем новые условия существования вальрасовских равновесий в многорегиональных экономических системах, не предполагающие ограниченности множеств $Z_s,\ s \in R$.

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ является $\mathcal{P}$-регулярной и не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в $\mathcal{M}$ существует равновесие Вальраса.*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Vasil'ev V.A. On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets. Siberian Advances in Mathematics. 1996. V. 6, № 3. P. 96–150.

[2]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.

[3]. Суслов В.И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1991.

[4]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[5]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII, № 4(40). С. 23–34.

[6]. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений. Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII, № 1(41). С. 18–33.

[7]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. Дискретный анализ и исследование операций (в печати).

[8]. Edgeworth F.Y. Mathematical Psychics. London: Paul Kegan. 1881.

[9]. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике: Пер. с англ. М.: Наука. 1986.

[10]. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика: Пер. с англ. М.: Мир. 1972.

[11]. Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир. 1995.

[12]. Scarf H. The core of an N-person game. Econometrica. 1967. V. 35, № 1. P. 50–69.

[13]. Экланд И. Элементы математической экономики: Пер. с франц. М.: Мир. 1983.

[14]. Vasil'ev V.A. Core and equilibria in non-atomic mixed economy. Сб. трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А.А.Ляпунова (Новосибирск, 8 - 11 октября 2001г.). 2001. С. 107–115.

[15]. Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях. I. Изв. АН СССР, Сер. мат. 1940. **4**, № 6. С. 465–478.

[16]. Рокафеллар Т. Выпуклый анализ: Пер. с англ. М.: Мир. 1973.