О бесконечномерных квазигруппах конечных порядков *

В. Н. Потапов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
vpotapov@math.nsc.ru

Аннотация

Пусть Σ — конечное множество мощности k, $\mathbb{A}$ — некоторое бесконечное множество индексов переменных, $\mathcal{F} \subseteq \Sigma^{\mathbb{A}}$ — подмножество состоящее из наборов с конечным носителем. Функция $f : \Sigma^{\mathbb{A}} \to \Sigma$ называется $\mathbb{A}$-квазигруппой порядка k, когда $f(\overline{y}) \neq f(\overline{z})$ для упорядоченных наборов $\overline{y}$ и $\overline{z}$, различающихся ровно в одной позиции. Доказано, что $\mathbb{A}$-квазигруппа f порядка 4 является разделимой (представимой в виде суперпозиции) или полулинейной на каждом смежном классе по $\mathcal{F}$.

Предложена конструкция неизмеримых по Лебегу множеств основывающаяся на бесконечномерных квазигруппах.

Ключевые слова: n-арная квазигруппа, разделимость, полулинейные квазигруппы.

Пусть Σ — некоторое конечное множество, $\mathbb{A}$ — некоторое конечное или бесконечное множество, элементами которого нумеруются переменные. Определим функцию $d : \Sigma^{\mathbb{A}} \times \Sigma^{\mathbb{A}} \to [0, \infty]$ так, что $d(\overline{y}, \overline{z})$ — число различающихся компонент в $\overline{y}, \overline{z} \in \Sigma^{\mathbb{A}}$. Функция $f : \Sigma^{\mathbb{A}} \to \Sigma$ называется $\mathbb{A}$-*квазигруппой* (далее просто квазигруппой или если $|\mathbb{A}| = n$, то n-арной квазигруппой, см. [1]) порядка $|\Sigma|$, когда $f(\overline{y}) \neq f(\overline{z})$ при $d(\overline{y}, \overline{z}) = 1$.

Без ограничения общности можно положить $\Sigma = \{0, \dots, |\Sigma| - 1\}$. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Элементы множества $\Sigma^{\mathbb{N}}$ можно рассматривать как $|\Sigma|$-ичные представления вещественных чисел $\delta \in [0, 1]$. Отождествим вещественные числа и их $|\Sigma|$-ичные представления. Используя инвариантность меры Лебега относительно сдвигов, нетрудно доказать

Утверждение 1. *Для любой квазигруппы $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma$ конечного порядка и $a \in \Sigma$ множество $\{\delta \in [0, 1] \mid f(\delta) = a\}$ неизмеримо по Лебегу.*

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00616)и ФЦП <Научные и научно-педагогические кадры инновационной России> на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429)

Определим $\operatorname{supp}\overline{y} = \{i \in \mathbb{A} \mid y_i \neq 0\}$. Пусть множество $\mathbb{A}$ бесконечно. Обозначим через $\mathcal{I}$ совокупность конечных подмножеств множества $\mathbb{A}$. Рассмотрим $\mathcal{F} = \{\overline{y} \in \Sigma^{\mathbb{A}} \mid \operatorname{supp}\overline{y} \in \mathcal{I}\}$. Ясно, что множество $\Sigma^{\mathbb{A}}$ представимо в виде дизъюнктного объединения подмножеств вида $\mathcal{F}_{\overline{a}} = \overline{a} + \mathcal{F}$. Причём если $\mathcal{F}_{\overline{a}} \neq \mathcal{F}_{\overline{b}}$, то $d(\overline{y}, \overline{z}) = \infty$ для любых $\overline{y} \in \mathcal{F}_{\overline{a}}$ и $\overline{z} \in \mathcal{F}_{\overline{b}}$. Поэтому квазигруппа f может быть независимо определена на каждом $\mathcal{F}_{\overline{a}}$. Ниже будем подразумевать, что $f : \mathcal{F} \to \Sigma$. Квазигруппы на $\mathcal{F}$ допускают конструктивное определение, в то время как для определения квазигрупп на $\Sigma^{\mathbb{A}}$ необходимо выбирать по представителю из каждого класса $\mathcal{F}_{\overline{a}}$.

Символом x всюду будем обозначать переменную в квазигруппе, через x_J будем обозначать выборку переменных с индексами из множества J, $J \subset \mathbb{A}$. *Ретрактом* квазигруппы f называется подфункция, полученная из f подстановкой констант в некоторые переменные, причём только конечное число констант может быть отлично от нуля. Через $f_J(x_J)$ будем обозначать ретракт квазигруппы $f : \mathcal{F} \to \Sigma$, в котором фиксированы нулём все переменные, кроме имеющих индексы из множества J. Если множество J конечно, то ретракт f_J можно рассматривать как $|J|$-арную квазигруппу.

Обозначим через S_0 группу перестановок на Σ, сохраняюших нуль. *Изотопией* (сохраняющей нуль) называется элемент множества $S_0 \times S_0^{\mathbb{A}}$. Две квазигруппы f и g называются *изотопными*, если $g(x_{\mathbb{A}}) \equiv \theta_0(f(\theta_{\mathbb{A}} x_{\mathbb{A}}))$. Квазигруппа f называется *приведённой*, если для любого $a \in \Sigma$ и $i \in \mathbb{A}$ справедливо равенство $f(a_{\{i\}}, \overline{0}_{\mathbb{A}\setminus\{i\}}) = a$.

Квазигруппа f называется *разделимой*, если она может быть представлена в виде суперпозиции, т. е. $f(x_{J_1}, x_{J_2}) = g(h(x_{J_1})_{\{j\}}, x_{J_2})$, где g и h — квазигруппы, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $|J_1| \geq 2$, $|J_2| \geq 1$, $j \in J_1$. В противном случае квазигруппа называется *неразделимой*.

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы из [2].

Утверждение 2. *Разделимую n-арную квазигруппу f можно представить в виде*

$$f(x_J) = F(q_1(x_{J_1}), ..., q_m(x_{J_m})), \qquad (1)$$

где q_j суть n_j-квазигруппы при $i, 1 \leq i \leq m$, F есть неразделимая m-квазигруппа, $\{J_i\}$ — разбиение множества $J \in \mathcal{I}$ на наборы мощности $n_1, \ldots, n_m$. Причём, если $m \geq 3$, то в данном представлении разбиение $\{J_i\}$ единственно.

Квазигруппа $f : \mathcal{F} \to \Sigma$ порядка 4 называется *полулинейной*, если она удовлетворяет равенству $f(\{0,1\}^{\mathbb{A}} \cap \mathcal{F}) = \{0,1\}$ или f изотопна квазигруппе, удовлетворяющей этому равенству. В частности, *приведённая линейная* квазигруппа $f(x_{\mathbb{A}}) = \sum\limits_{\beta \in \mathbb{A}} x_\beta$ является полулинейной. Здесь подразумевается сложение изоморфное групповой операции в $Z_2 \times Z_2$. Квазигруппы изотопные приведённой линейной квазигруппе также называются *линейными*.

В [3] получено описание n-квазигрупп порядка 4 в определённых выше терминах, а именно, доказано

Утверждение 3. *Для любого конечного n каждая n-арная квазигруппа порядка 4 является разделимой или полулинейной.*

Зафиксируем некоторую квазигруппу $f : \mathcal{F} \to \Sigma$. Будем говорить, что множество $M \subseteq \mathbb{A}$ *неразделимое* (относительно f), если $|M| \geq 3$ и для любого конечного набора $J \subseteq M$ найдётся такой конечный набор J', $J \subseteq J' \subseteq M$, что квазигруппа $f_{J'}$

неразделимая.

Основываясь на утверждениях 2 и 3, нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $f : \mathcal{F} \to \Sigma$ — *квазигруппа порядка* 4.

(a) *Множество* M *неразделимое тогда и только тогда, когда квазигруппа* f_M *неразделимая.*

(b) *Квазигруппа* f *является разделимой или полулинейной.*

Список литературы

1. Белоусов В.Д. n-Арные квазигруппы. Кишинёв: "Штиинца". 1972.

2. Черёмушкин А.В. Каноническое разложение n-арных квазигрупп // Мат. исследования. Кишинёв:"Штиинца", 1988. вып. 102. С. 97–105.

3. Krotov D.S., Potapov V.N. n-Ary quasigroups of order 4 // SIAM J. Discrete Math. 2009. V. 23, N 2. P. 561-570.