УПРАВЛЯЮЩИЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЛЯПУНОВА – ЯБЛОНСКОГО И РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА НЕЗАВИСИМОСТИ

М.А. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: fma5@rambler.ru

Аннотация

На сегодня классические методы создания моделей эволюционных систем с управлением исчерпываются тремя подходами [1, 2]. Первый подход основан на построении модели с позиции «черного ящика». Второй подход предполагает представление управляющей системы в виде составляющих её элементов. При этом каждый такой элемент является более простой управляющей системой, для изучения которой можно применять первый подход. В работах [1, 2] отмечаются недостатки указанных подходов. В связи с этим в этой работе доказывается целесообразность использования кибернетического подхода [3] для решения хорошо известного парадокса независимости в задаче Мостеллера [4, 5].

1. Введение. Все начинается с предков Ляпунова Алексея Андреевича

В 2011 году исполняется 100 лет, как появился на Божий Свет выдающийся математик и один из основоположников кибернетики в России — Алексей Андреевич Ляпунов (1911 – 1973). Откуда взялось название этой фамилии? Можно предложить некоторую версию о происхождении этой фамилии на основании следующих фактов. На севере западе Куркинского района Тульской области расположена деревня Ляпуновка.

Куркинский Район

Деревня Ляпуновка Куркинского района

Населенные пункты

Такое название этой деревни было дано в честь её владельцев – потомков братьев Александра, Григория, Прокопия, Захария и Степана Ляпуновых. Ляпуновы – сподвижники Минина и Пожарского были героями времён изгнания в 1611 – 1612 поляков с русской земли. С этой интересной информацией можно познакомиться в архиве краеведческого Куркинского музея и в книге [6]. В деревне Ляпуновка проживали дальние родственники моей мамы. Поэтому по совету и настоятельной просьбе этих родственников наша семья из десяти человек переехала жить в 1952 году в рабочий поселок городского типа Куркино. До 1952 года семья жила в деревне Киселёвка Липецкой области в двадцати километрах от посёлка Куркино. Единственную возможность что-то продать и купить жителям предоставлял базар в районном центре Куркино. Когда наши родственники из деревни Ляпуновки приезжали на базар, то теперь они ночевали в нашем доме. До этого они должны были одним днём сделать все свои дела и возвращаться в Ляпуновку, и это было утомительно. Всегда мрачный свет от плетеного горящего фитиля, помещенного в металлическую емкость с керосином, давал загадочное освещение крестьянских изб деревни Ляпуновка. Мятежные и разноцветные бабочки-мотельки в позднее вечернее и ночное время летели на мерцающий свет и лепили стекла окон. Поэтому часто одному из жителей этой деревни, который обладал невероятно пылким и деятельным характером, давали дополнительное имя Ляпун-мотылёк. Эту красивую и необычную легенду услышала наша семья от этих родственников. Я впервые познакомился с А.А. Ляпуновым в 1969 году на первой конференции по проблемам теоретической кибернетики в Академгородке Новосибирска после защиты кандидатской диссертации по специальности «Теоретическая кибернетика». Я ему рассказал это предположение о происхождении названий фамилии Ляпунов и деревни Ляпуновка. А.А. Ляпунов утвердительно ответил, что Иван Борисович Ляпун является прямым его предком, который был помещиком в Нижегородском уезде в середине пятнадцатого века.

Потом мы встречались на различных конференциях, в частности, на Всесоюзной конференции «Методы Монте-Карло и их применения», которая состоялась в Новосибирске в

1971 году. На этой конференции я делал доклад «Изучение методом Монте-Карло нелинейного процесса обслуживания с целью оптимизации управления конфликтными потоками». Более тесное моё сотрудничество с А.А. Ляпуновым стало возможным и предметным после детального изучения по совету С.В. Яблонского их совместной публикации по управляющим кибернетическим системам [3]. Наиболее полная информация о жизни, научной, педагогической и общественной деятельности выдающегося русского учёного А.А. Ляпунова приведена в замечательных книгах [7, 8]. Поэтому ниже, используя доступные архивные краеведческие источники записи церковных книг малых городов Рязанской, Липецкой и Тульской области, приводятся мои многолетние изыскания по истории знаменитых предков А.А. Ляпунова. Следует отметить, что мой мудрый школьный учитель математики С.Н. Алмазов, который интересовался историей Куркинского края, по-видимому, один из первых в России составил краткую родословную Прокопия Ляпунова. По его инициативе я стал заниматься этим вопросом с 1953 года. Приведем теперь схему – ветку рода Ляпуновых, из которой следует, что А.А. Ляпунов является потомком Рюрика в сороковом колене.

Родословная Алексея Андреевича Ляпунова (08. 10.1911 – 23. 06.1973)

Первое колено от Рюрика
Рюрик – Рорик – Рерик (839?–879), первый русский князь в Новгороде с 862 по 879 г.

Второе колено от Рюрика
Игорь Рюрикович (876?–945), киевский князь с 912 по 945 г.

Третье колено от Рюрика
Святослав Игоревич (927?–972), великий князь киевский с 945 по 972 г.

Четвертое колено от Рюрика
Владимир Святославич, Красное Солнышко (948?–1015), великий киевский князь с 980 по 1015 г., в крещении Василий (987), Святой и Равноапостольный

Пятое колено от Рюрика
Ярослав I Владимирович Мудрый (978–1054), великий киевский князь с 1019 по 1054 г.

Шестое колено от Рюрика
Всеволод Ярославич (1030–1093), в крещении Андрей, князь всея Руси, знал пять языков, женат на дочери византийского императора Константина IX Мономаха

Седьмое колено от Рюрика
Владимир Всеволодович Мономах (1053–1125), великий князь киевский с 1113 по 1125 г.

Восьмое колено от Рюрика
Юрий Долгорукий (1090–1157), князь суздальский и великий князь киевский с 1125 по 1157 г.

Девятое колено от Рюрика
Всеволод Юрьевич Большое Гнездо (1154–1212), в крещении Дмитрий, великий князь владимирский с 1176 г.

Десятое колено от Рюрика
Ярослав Всеволодович (1191–1246), великий князь владимирский с 1238 г., 3-й сын Всеволода Большое Гнездо

Одиннадцатое колено от Рюрика
Константин Ярославич Галицкий (1227?–1255), первый удельный галицкий князь (Галич-Мерское), младший брата Александра Ярославича Невского (1220–1263)

Двенадцатое колено от Рюрика
Давыд Константинович Галицкий (1248?–280), галицкий князь и дмитровский князь с 1255 по 1280 г.

Тринадцатое колено от Рюрика
Федор Давыдович Галицкий (1270?–1335?), галицкий князь

Четырнадцатое колено от Рюрика
Иван Федорович Галицкий (1305?–1354), галицкий и дмитровский князь с 1335 по 1354 г.

Пятнадцатое колено от Рюрика
Князь Дмитрий Иванович Галицкий (1325?–1375?), в 1363 г. изгнанный Дмитрием Донским из своего удела, уехал в Нижний Новгород, поступил на службу к местному архиепископу

Шестнадцатое колено
Василий Дмитриевич (1355?–?), потерял княжеский титул

Семнадцатое колено
Василий Васильевич (1380?–?)

Восемнадцатое колено
Борис Васильевич (1405?–?), в 1440 боярин Дмитрия Шемяки (1420–1453)

Девятнадцатое колено
Семен Борисович Осина (1425?–?), родоначальник Осининых, Ильиных и Ляпуновых

Двадцатое колено
Борис Семенович Третьяк Осинин (1445?–?), получил поместье в Дмитровком погосте Бежецкой пятины. Территория расположена между рекой Мста и притоками Волги

Двадцать первое колено
Иван Борисович Ляпун (1465?–?), боярин архиепископа Пимена, в 1526 г. посол к германскому императору, в 1538 г. голова в полках в Коломне. Помещик в Новгороде и в Нижегородском уезде

Двадцать второе колено
Василий Иванович Ляпунов (1485?–?), воевода в Алысте (1563 г.)

Двадцать третье колено
Василий Васильевич Ляпунов (1505?–?)

Двадцать четвёртое колено
Григорий Васильевич Ляпунов (1525?–?)

Двадцать пятое колено
Степан Григорьевич Ляпунов (1545?–?)

Двадцать шестое колено
Юрий Степанович Ляпунов (1565?–?)

Двадцать седьмое колено
Алексей Юрьевич Ляпунов (1585?–?), переведен Иваном IV Грозным из Нижнего Новгорода в Кострому

Двадцать восьмое колено
Иван Алексеевич Ляпунов (1615? – ?), в 1639 г. дворянин, с 1640 по 1651 г. воевода, с 1654 по 1655 г. сотенный голова. Имел вотчину в селе Покровское Кинешемского уезда

Двадцать девятое колено
Тихон Иванович Ляпунов (1635?–), помещик

Тридцатое колено
Матвей Тихонович Ляпунов (1655?–?)

Тридцать первое колено
Федор Матвеевич Ляпунов (1675?–?)

Тридцать второе колено
Иван Федорович Ляпунов (1695?–?), гв. капрал (1758 г.)

Тридцать третье колено
Степан Иванович Ляпунов (1715–?)

Тридцать четвёртое колено
Иван Степанович Ляпунов (1736–?),
имел 34 души в селе Байкалка Сызранского уезда

Тридцать пятое колено
Александр Иванович Ляпунов (1757?–?)

Тридцать шестое колено
Василий Александрович Ляпунов (1778–1847), с 1825 г. бухгалтер правления Казанского университета, в 1846 г. уволен по прошению

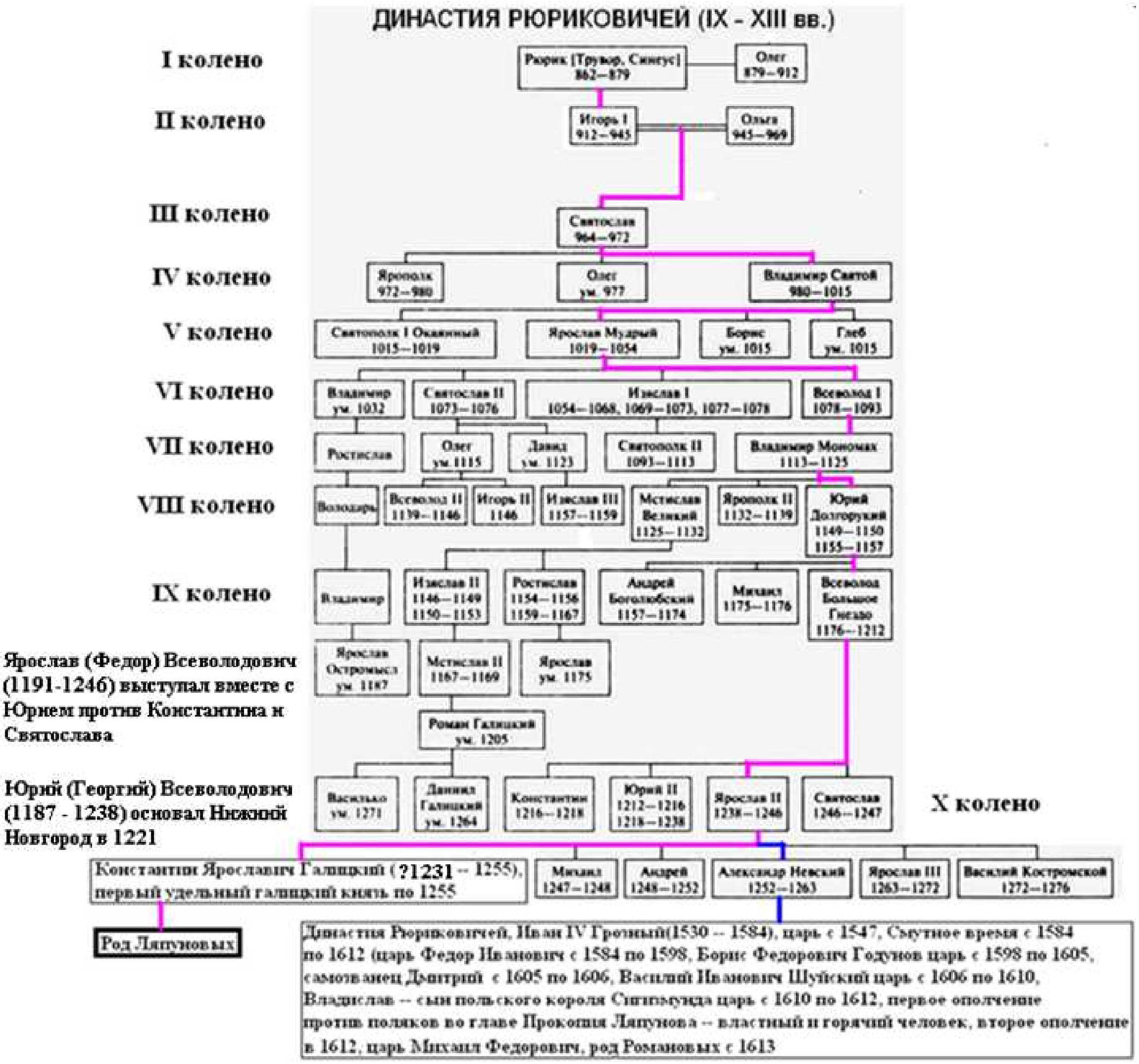
Тридцать седьмое колено
Виктор Васильевич Ляпунов (1817–1856), известный медик

Тридцать восьмое колено
Николай Викторович Ляпунов
(1850–1914),
инженер-мостостроитель

Тридцать девятое колено
Андрей Николаевич Ляпунов (1879–1923), геофизик

Сороковое колено
Алексей Андреевич Ляпунов (8.10.1911 – 23.06.1973), профессор МГУ (1952–1962), с 1962 г. работает в Сибирском отделении АН СССР, член-корреспондент АН СССР (1964). Математик, специалист в области теории функций и математических вопросов кибернетики. Одним из первых ученых оценил значение кибернетики и внес большой вклад в организацию работ по кибернетике в СССР, награжден орденом Ленина, Золотой медалью “Computer Pioneer” и другими медалями.

Ниже приводится династия Рюриковичей, из которой следует, что выделенная родословная Ляпуновых является судьбоносной веткой истории Руси.



Со второй половины восемнадцатого века род Ляпуновых прочно входит в мир созидателей духовной культуры России — науки, медицины, музыки, литературы. Родственные отношения Ляпуновых тесно переплетаются с Сеченовыми, Филатовыми, Крыловыми, Капицами, Зайцевыми. На следующих двух схемах – ветках демонстрируется родственная связь этих великих семей России. На первой схеме представлена родственная связь семей Ляпуновых, Сеченовых, Зайцевых, Крыловых и Капиц.

Тридцать шестое колено от Рюрика
Василий Александрович Ляпунов (1778–1847), с 1825 по 1846 г. бухгалтер правления Казанского университета

Виктор Васильевич Ляпунов (1817–1856), известный медик

Михаил (1820–1868) директор обсерватории Казанского университета

Екатерина Сеченова (Ляпунова) (1834–1912)

Наталья Зайцева (Ляпунова) (1819–1897)

Николай Викторович Ляпунов (1850–1914), инженер-мостостроитель

Софья Крылова (Ляпунова) (1842–1913), муж Николай Александрович Крылов (1830–?), боевой офицер, участник англо-франко-русской войны 1855–1856 гг., писатель

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918), создатель теории устойчивости

Наталья Ляпунова (Сеченова) (?–918)

Александр Михайлович Зайцев (1841–1910), химик-органик, ученик А.М. Бутлерова

Андрей (1879–1923), геофизик, жена Елена Васильевна Ляпунова (1887–1976))

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945), математик, механик и кораблестроитель

Иван Михайлович Сеченов (1829–1905), выдающийся русский физиолог и мыслитель, брат мужа Екатерины Сеченовой (Ляпуновой), специалиста по арабским языкам

Анна Алексеевна Капица (Крылова) (1903–1996), муж Петр Леонидович Капица (1894–1984), академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии по физике (1978)

Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973), специалист в области теории функций и основатель кибернетики

Елена Алексеевна (1936), цитогенетик

Наталья Алексеевна (1937), биолог

Сергей Петрович Капица (1928), физик

На второй схеме этой страницы отображена родственная связь семей Филатовых, Крыловых и Ляпуновых.

Род Филатовых впервые упоминается в 1587 (писцовая книга, Тула)
Михаил Федорович Филатов (1768–1861), помещик

Мария Михайловна Филатова (1804–?), жена Александра Алексеевича Крылова (1785–1840), который награжден золотым оружием за храбрость и орденами за боевые заслуги в Отечественной войне

Федор Михайлович Филатов (1813–?), ротмистр гвардейского пехотного полка

Николай Александрович Крылов (1830–?), боевой офицер, участник англо-франко-русской войны с 1855 по 1856 г., писатель, жена Софья Викторовна Ляпунова

Петр Федорович Филатов (1848–?), хирург и офтальмолог

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945), математик, механик и кораблестроитель, академик (1916), Герой Социалистического Труда (1943)

Владимир Петрович Филатов (1875–1956), советский офтальмолог и хирург, академик АМН СССР (1944), Герой Социалистического Труда (1950)

Вспоминая прекрасные фотографии из [7, 8], я позволю поместить некоторые из них. Мы всегда будем помнить и гордиться Ляпуновыми, Сеченовыми, Филатовыми, Крыловыми, Капицами. Представители этих семей вписали славные страницы в решении фундаментальных проблемы отечественной и мировой науки.

Константин Ярославич Галицкий (1227?–1255)

Прокопий Петрович Ляпунов (?–1611)

Михаил Васильевич (1820–1868), астроном

Сергей Михайлович (1859–1924), композитор

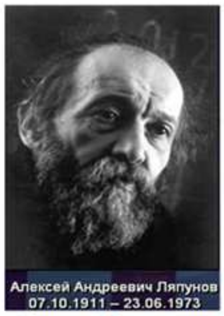
Борис Михайлович (1862–1943), филолог

Сергей Семёнович Намёткин, химик

Николай Викторович Ляпунов (1850–1914)

Елена Васильевна Ляпунова (1887–1976)

Андрей Николаевич Ляпунов (1879–1923)



Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973)

Иван Михайлович Сеченов (1829–1905)

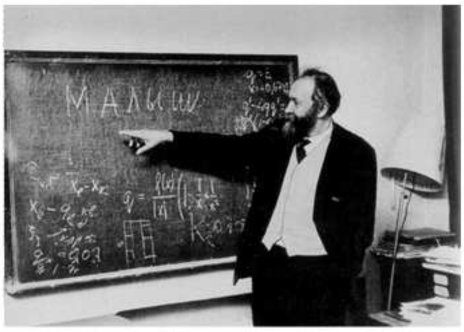
Александр Михайлович Зайцев (1841–1910)

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945)

Владимир Петрович Филатов (1875–1956)

Пётр Леонидович Капица (1894–1984)



Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973)

2. Задача Мостеллера и её традиционное решение

Построение адекватных вероятностных моделей реальных эволюционных систем с управлением является первоначальной задачей их изучения. Во втором разделе с целью иллюстрации построения вероятностной модели статистически устойчивых экспериментов с управлением с позиции «черного ящика» рассмотрим решение задачи Мостеллера [4].

Задача Мостеллера. Чтобы наградить сына, играющего в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд, по крайней мере, две теннисные партии против своего отца и мастера. Мастер играет лучше отца. Сын выигрывает у мастера с вероятностью p и у отца — с вероятностью $q > p$. Выигрыши сына независимы в совокупности. Сын имеет право выбрать один из двух вариантов очерёдности игры: 1) мастер затем отец и снова мастер; 2) отец затем мастер и снова отец. Какой вариант поведения следует выбрать сыну с точки зрения получения приза с наибольшей вероятностью?

Для проверки адекватности основных выводов решения задачи Мостеллера [4, 5] необходимо практически большое число раз реализовать теннисную игру сына с отцом и мастером. Этот эксперимент не представляется легко осуществимым. Поэтому вместо теннисной игры рассмотрим аналогичный эксперимент, который автор работы имел возможность многократно проводить при приёме экзаменов по теории вероятностей на факультетах Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.

Задача об экзаменах. Студенты сдают экзамен по теории вероятностей, каждый из которых должен ответить по билету на три вопроса раздельно профессору и ассистенту. Студенты знают, что вопросы первый и третий являются теоретическими, а второй заключается в решении практической задачи. Студент сдаст экзамен, если он два раза подряд положительно отвечает на вопросы. Профессору студент отвечает положительно на любой вопрос с вероятностью p и ассистенту — с вероятностью $q > p$. Студенту предлагается выбрать один из двух вариантов поведения в последовательности ответов: 1) сначала студент отвечает профессору, затем — ассистенту и снова — профессору; 2) на первый вопрос студент отвечает ассистенту, на второй вопрос — профессору и на последний вопрос — ассистенту. Рассмотрим на содержательном уровне решение этой поучительной задачи, которое было предложено в работах [4, 5].

Пусть события A_1, A_2, A_3 и A означают, что студент положительно ответил на первый вопрос профессору, на второй вопрос — ассистенту, на третий вопрос — профессору и студент сдаст экзамен при первом варианте его поведения. Аналогичные события введём, если студент выбрал второй вариант поведения. Тогда случайные события B_1, B_2, B_3 и B заключаются в том, что на первый вопрос студент положительно ответил ассистенту, на второй вопрос — профессору, на третий вопрос — ассистенту и студент сдаст экзамен при втором варианте его поведения. Для событий A и B находим равенства:

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3), \quad B = (B_1 \cap B_2) \cup (B_2 \cap B_3).$$

Обозначим через $\mathbf{P}_1(\bullet)$ вероятность для первого варианта поведения студента и через $\mathbf{P}_0(\bullet)$ вероятность второго варианта его поведения. Тогда при независимых ответах студента преподавателям имеем:

$$\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_1(A_1 \cap A_2) + \mathbf{P}_1(A_2 \cap A_3) - \mathbf{P}_1(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = pq + qp - pqp,$$

$$\mathbf{P}_0(B) = \mathbf{P}_0(B_1 \cap B_2) + \mathbf{P}_0(B_2 \cap B_3) - \mathbf{P}_0(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = qp + pq - qpq.$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{P}_1(A) > \mathbf{P}_0(B)$ при $q > p$. Значит, студентам целесообразно пользоваться первым вариантом поведения. Мостеллер в [4] этот вывод объясняет важностью для студента умение решать практические задачи. Другими словами, соотношение $\mathbf{P}_1(A_2) = q > \mathbf{P}_0(B_2) = p$ имеет большее значение для сдачи экзамена, чем трудности два раза отвечать профессору при первом варианте поведения. Напротив, Секей в [5] говорит о том, что полученное решение этой задачи и выводы существенно опирались на факт независимости ответов студента. Однако статистические наблюдения автора этой работы показывают, что студенты, которые в течение 1967—1992 гг. сдавали экзамены, в основном выбирали первый вариант поведения. После 1992 г. студенты всё чаще выбирают более разумный на их взгляд второй вариант поведения. Чтобы объяснить такое поведение студентов, сначала приведём формальное решение этой задачи, используя первый классический способ на основе принципа «черного ящика», а затем нетрадиционный способ [1, 2] в изучении случайных экспериментов с управлением.

3. Классическое решение задачи Мостеллера на основе принципа <<черного ящика>>

Известно [2], что одним из основных предметов теории вероятностей является построение адекватной вероятностной модели $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$ статистически устойчивого случайного эксперимента W_r с управлением r из некоторого множества $\mathcal{R}$. Произвольный элемент ω из множества Ω определяет с помощью некоторого языка описание так называемого элементарного исхода эксперимента W_r. Подмножество $\Im$ априори заданного множества всех допустимых исходов является σ-алгеброй и содержит все наблюдаемые исходы $D \subset \Omega$ эксперимента W_r. Наконец, вероятностная функция вида $\mathbf{P}_r(\cdot)$: $\Im \to [0,1]$ задается на σ-алгебре $\Im$ и зависит от выбранного управления $r \in \mathcal{R}$. Если используется подход «черного ящика», то W_r представляется в виде объекта управления E_r и системы управления C_r. В этом случае предполагается, что в результате проведения и наблюдения элементарного исхода каждого из экспериментов E_r и C_r однозначно по некоторому закону определяется элементарный исход эксперимента W_r. Поэтому эксперимент W_r есть упорядоченная пара (E_r, C_r), и будем это записывать в виде $W_r = (E_r, C_r)$. Пусть отображения $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют выход объекта управления E_r и выход системы управления C_r, а функционал $\Phi(\varphi_r(\omega), \psi_r(\omega))$ определяет доход эксперимент W_r от управления r. Если при управлении r математическое ожидание дохода равно $\mathrm{M}_r\Phi(\boldsymbol{\varphi}_r, \boldsymbol{\psi}_r)$, то цель эксперимента W_r состоит в использовании оптимального управления $r' \in \mathcal{R}$, для которого имеет место соотношение

$$\mathrm{M}_{r'}\Phi(\boldsymbol{\varphi}_{r'}, \boldsymbol{\psi}_{r'}) = \sup\{\mathrm{M}_r\Phi(\boldsymbol{\varphi}_r, \boldsymbol{\psi}_r) \colon r \in \mathcal{R}\}.$$

Пусть теперь для задачи об экзаменах объект управления E_r есть последовательные ответы студента преподавателям на три вопроса, а система управления C_r означает выбор студентом одного из двух вариантов поведения (управления). Здесь соотношение $r = 1$ означает выбор первого варианта управления, и равенство $r = 0$ означает выбор второго варианта поведения. Отсюда следует, что множество $\mathcal{R} = \{0, 1\}$. Заметим, что в этой задаче результаты объекта управления E_r не влияют на результаты системы управления C_r. Тогда приведенное ранее решение Мостеллером задачи об экзаменах на содержательном уровне фактически основано на представлении эксперимента W_r в виде управляющей системы (E_r, C_r) без канала обратной связи. Эта ситуация отображена на рис. 1.

Рис. 1. Модель без канала обратной связи для эксперимента об экзаменах

На этом рисунке величины $\varphi_r(\omega)$ и $\psi_r(\omega)$ измеряют элементарный исход эксперимента W_r с точки зрения объекта управления E_r и соответственно с точки зрения системы управления C_r. При этом значение случайной величины $\varphi_r(\omega)$ равно единице, если студент сдал экзамен, и равно нулю в противном случае, а значение величины $\psi_r(\omega)$ тождественно равно выбранному управлению $r = 0, 1$. Имеет место утверждение.

Лемма 1. Оптимальное управление $r' = 1$ и, следовательно, студентам целесообразно отвечать сначала профессору, затем — ассистенту и снова — профессору.

Доказательство. В качестве модели эксперимента W_r можно предложить вероятностное пространство $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\cdot))$. Здесь $\Omega = \{\omega = (u_1, u_2, u_3): u_1, u_2, u_3 = 0, 1\}$ и $\Im = \{D: D \subset \Omega\}$. Для $i = 1, 2, 3$ полагаем $u_i = 1$, если студент положительно ответил на i-й вопрос. В противном случае принимаем $u_i = 0$. Например, событие $\{(1, 1, 1)\}$ означает, что студент положительно ответил на все три вопроса, а событие $\{(0, 0, 1)\}$ заключается в том, что студент положительно ответил только на третий вопрос. В силу независимости ответов студента вероятности $\mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = pqp$, $\mathbf{P}_r(\{(0, 0, 1)\}) = (1 - p)(1 - q)p$ при $r = 1$ и $\mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = qpq$, $\mathbf{P}_r(\{(0, 0, 1)\}) = (1 - q)(1 - p)q$ при $r = 0$. Если событие A означает, что студент сдаст экзамен, то $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ и $\mathbf{P}_r(A) = \mathbf{P}_r(\{(1, 1, 0)\}) + \mathbf{P}_r(\{(0, 1, 1)\}) + \mathbf{P}_r(\{(1, 1, 1)\}) = rpq(q - p) + pq(2 - q)$. Так как $\varphi_r(\omega)$ — индикатор случайного события A, то математическое ожидание $\mathrm{M}_r\boldsymbol{\varphi}_r(\omega) = \mathbf{P}_r(A)$. Из неравенства $q > p$ и условия оптимальности $\mathrm{M}_{r'}\boldsymbol{\varphi}_{r'}(\omega) = \sup\{\mathbf{P}_r(A): r \in \mathcal{R}\}$ получим, что оптимальное управление $r' = 1$. Другими словами, студент должен выбирать первый вариант поведения с точки зрения наиболее успешной сдачи экзамена преподавателям.

4. Задача Мостеллера как управляющая кибернетическая система

Приведенный в третьем разделе подход фактически основан на формальном описании связи между входом $\psi_r(\omega)$ и выходом $\varphi_r(\omega)$ объекта управления E_r. Эта связь задается формулой $\mathbf{P}_r(\{\omega: \varphi_r(\omega) = 1\}) = rpq(q - p) + pq(2-q)$, которая определяет распределение случайной величины $\varphi_r(\omega): \Omega \to \{0, 1\}$. Иначе говоря, этот подход изучает статически устойчивый эксперимент $W_r = (E_r, C_r)$ с управлением $r \in \mathcal{R}$ с позиции «черного ящика», как это обычно делается в известных задачах автоматического регулирования. Основной недостаток этого подхода заключается в том, что случайные величины $\psi_r(\omega)$ и $\varphi_r(\omega)$ на самом деле являются всего лишь удобной математической моделью измерителей входа и соответственно выхода объекта управления E_r, а не вероятностной моделью статистически устойчивого эксперимента W_r в целом. Поэтому простой и доступный по структуре принцип «черного ящика» не требует детального изучения строения эксперимента W_r, и, значит, не позволяет в полной мере одновременно учитывать как детерминированную, так и вероятностную природу эксперимента W_r.

При изучении реальной управляющей системы всегда возникают трудные вопросы эффективного способа описания и методов изучения с подробным учётом её конкретной физической природы и цели функционирования. В силу этого на реальную систему целесообразно смотреть не с позиции «черного ящика», а с точки зрения её общих фундаментальных свойств и методологического понятия управляющей системы, впервые данного в математической кибернетике [5]. Эта точка зрения по существу была поддержана и последовательно развивалась в работах [1, 2]. В основе кибернетического подхода при построении, анализе и оптимизации модели управляющей системы лежат следующие фундаментальные положения:

— любая управляющая система обладает такими свойствами как схемой, информацией, координатами и функцией;

— принцип дискретности актов функционирования управляющей системы во времени τ_i, $i \geq 0$, где точечный процесс $\{\tau_i; i \geq 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени;

— принцип строения схемы из структурных блоков: внешней среды, входных и выходных полюсов, внешней и внутренней памяти, устройств по переработке информации внешней и внутренней памяти.

При таком нетрадиционном подходе построение вероятностной модели управляющей системы в общем случае включает следующие основные этапы.

— Выделение схемы, информации, координат и функции системы.
— Определение для схемы так называемых её структурных блоков.
— Задание алгоритмов управления изменениями состояний структурных блоков.
— Кодирование информации или нелокальное описание структурных блоков.
— Выявление функциональных и статистических связей между блоками схемы.
— Выбор основных исходных и искомых характеристик системы.
— Решение задач анализа, синтеза и оптимизации управляющей системы.

Рассмотрим теперь применение кибернетического подхода для решения парадокса независимости [4, 5]. Задача Мостеллера или задача об экзаменах может быть адекватно отображена посредством управляющей системы, блочная схема которой приведена на рис. 2. Блочная схема состоит из внешней среды, входных и выходных полюсов, внешней и внутренней памяти, устройств по переработке информации внешней и внутренней памяти.

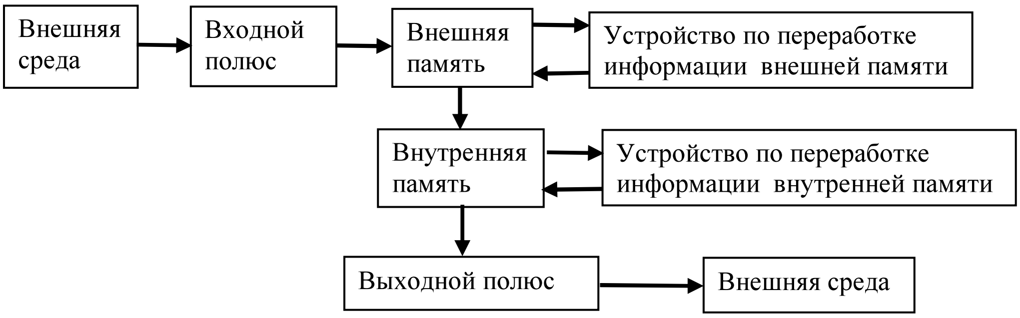


Рис. 2. Схема управляющей системы для задачи об экзаменах

Выясним неформальный смысл всех структурных блоков схемы управляющей системы, соответствующей задаче об экзаменах. Для этого обозначим на оси времени через τ_0 момент получения студентом выбранного им экзаменационного билета с тремя вопросами и объявления первого варианта поведения с вероятностью $r \in [0, 1]$ или второго варианта с вероятностью $1 - r$. Пусть τ_i есть момент завершения ответа студентом на i-й вопрос, где $i = 1, 2, 3$. При этом рассмотрим общий случай задачи, когда не предполагается независимость в совокупности последовательных ответов студента на вопросы для любой стратегии его поведения. Сначала пунктом 1) определим математическое описание и свойства внешней среды, а затем пунктами 2) — 7) математическое описание и свойства каждого из остальных структурных блоков схемы.

1) Процессы формирования внешней среды занимают значительное время и являются консервативными. Внешняя среда представляет собой условия и обстановку перед экзаменом, которые навязывают студенту на интуитивном уровне случайно выбрать конкретный вариант поведения в последовательности ответов из двух возможных. Отсюда вытекает, что внешняя среда имеет два следующих состояния: а) профессор — ассистент — профессор (b_1); б) ассистент — профессор — ассистент (b_2). Будем считать, что внешняя среда в некоторый момент τ_0 принимает значение b_1 с вероятностью $r \in [0, 1]$ и значение b_2 с вероятностью $1 - r$. Другими словами, студент выбирает план ответов вида: профессор — ассистент — профессор с вероятностью r и стратегию ответов вида: ассистент — профессор — ассистент с вероятностью $1 - r$. Информация внешней среды есть множество {профессор — ассистент — профессор, ассистент — профессор— ассистент} = $\{b_1, b_2\}$ из двух состояний внешней среды. Координаты внешней среды — номера 1, 2 её состояний b_1 и b_2. Состояние внешней среды в момент τ_i есть случайный элемент $\chi_i \equiv \chi_0$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации внешней среды есть случайный вектор $\chi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$. При этом распределение вероятностей $\mathbf{P}(\chi_0 = b_1) = r$, $\mathbf{P}(\chi_0 = b_2) = 1 - r$ случайного элемента χ_0 определяет распределение случайного вектора χ и ориентированный граф переходов состояний внешней среды:

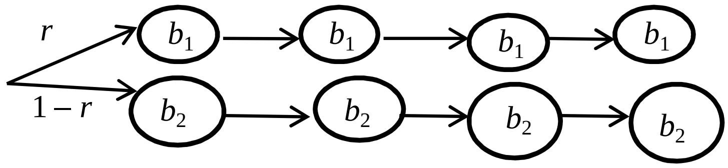


Рис. 3. Граф переходов состояний внешней среды

2) Входной полюс означает получение студентом в момент τ_0 три последовательных вопроса w_1, w_2 и w_3 экзаменационного билета. Информация входного полюса есть множество $\{(w_1, w_2, w_3)\}$ из одного состояния (w_1, w_2, w_3) входного полюса. Вектор $\alpha_i \equiv (w_1, w_2, w_3)$ определяет состояние входного полюса в момент τ_i, где $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации входного полюса есть вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с равными компонентами. Поэтому ориентированный граф переходов состояний входного полюса можно представить в виде рис. 4:

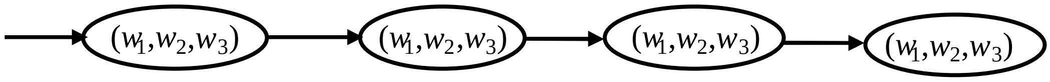


Рис. 4. Граф переходов состояний входного полюса

3) Внешняя память фиксирует очередные вопросы, на которые студент должен отвечать. Информация внешней памяти есть множество$\{(w_1, w_2, w_3), (w_2, w_3), w_3, \varnothing\}$ из четырёх состояний $d_1 = (w_1, w_2, w_3)$, $d_2 = (w_2, w_3)$, $d_3 = w_3$ и $d_4 = \varnothing$ внешней памяти. Координаты внешней памяти — номера 1, 2, 3, 4 её состояний d_1, d_2, d_3, d_4. Состояние внешней памяти в момент τ_i есть $\beta_i = d_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации внешней памяти — вектор вида $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Отсюда вытекает, что ориентированный граф переходов состояний внешней памяти можно отобразить в виде рис. 5:

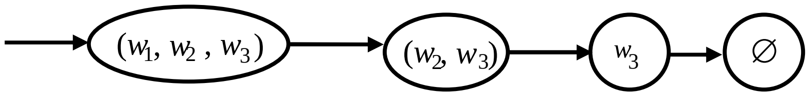


Рис. 5. Граф переходов состояний внешней памяти

4) Устройство по переработке информации внешней памяти детерминировано удаляет вопросы, на которые студент закончил отвечать и, тем самым, изменяет номер состояния внешней памяти в последовательности 1, 2, 3 и 4. Информация блока по переработке внешней памяти есть множество $\{\varnothing, w_1, (w_1, w_2), (w_1, w_2, w_3)\}$ из четырёх состояний $e_1 = \varnothing$, $e_2 = w_1$, $e_3 = (w_1, w_2)$ и $e_4 = (w_1, w_2, w_3)$ этого блока. Координаты блока по переработке внешней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний e_1, e_2, e_3 и e_4 блока. Состояние блока по переработке внешней памяти в момент τ_i есть $\zeta_i = e_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока по переработке внешней памяти есть вектор $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, а ориентированный граф переходов состояний этого блока отображается в виде рис. 6:

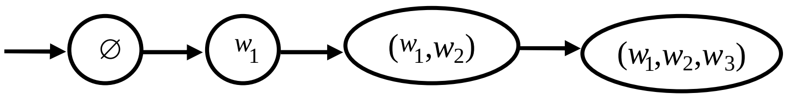


Рис. 6. Граф переходов состояний блока по переработке информации внешней памяти

5) Внутренняя память фиксирует как выбранный заранее студентом вариант поведения, так и запоминает последовательность из трёх результатов его ответов преподавателям на три вопроса. Информация блока внутренней памяти есть множество {студент выбрал первую схему ответа (f_1), студент выбрал вторую схему ответа (f_2), студент ответил на вопрос (f_3), студент не ответил на вопрос (f_4)} из четырёх состояний f_1, f_2, f_3 и f_4 внутренней памяти. Координаты внутренней памяти суть номера 1, 2, 3 и 4 состояний f_1, f_2, f_3 и f_4. Состоя-

ние внутренней памяти в момент τ_i есть случайный элемент η_i при i = 0, 1, 2, 3. Здесь $\eta_0 \in \{f_1, f_2\}$, $\eta_1 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_2 \in \{f_3, f_4\}$, $\eta_3 \in \{f_3, f_4\}$. Код информации внутренней памяти есть случайный вектор $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Напомним, что согласно условиям задачи об экзаменах последовательные ответы студента происходят случайным и, в общем случае, зависимым образом. Эта зависимость при заданном значении параметра $\varepsilon \geq 0$ определяется следующими соотношениями для условных вероятностей случайных элементов η_0, η_1, η_2, η_3:

$$\mathbf{P}(\eta_0 = f_1) = r,\ \ \mathbf{P}(\eta_1 = f_3 \mid \eta_0 = f_1) = p,\ \mathbf{P}(\eta_1 = f_3 \mid \eta_0 = f_2) = q, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3) = q + \varepsilon - \varepsilon/p \geq p, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) =$$

$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = q + \varepsilon < 1, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) = q, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_3) = \mathbf{P}(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_2, \eta_1 = f_4) =$$

$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_3) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_3, \eta_2 = f_4) =$$

$$= \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_3) = \mathbf{P}(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_1, \eta_1 = f_4, \eta_2 = f_4) = p. \tag{5}$$

Эти соотношения позволяют построить граф переходов состояний блока внутренней памяти. Ориентированный граф переходов состояний блока внутренней памяти с указанием вероятности на каждом из его ребер представлен на рис. 7.

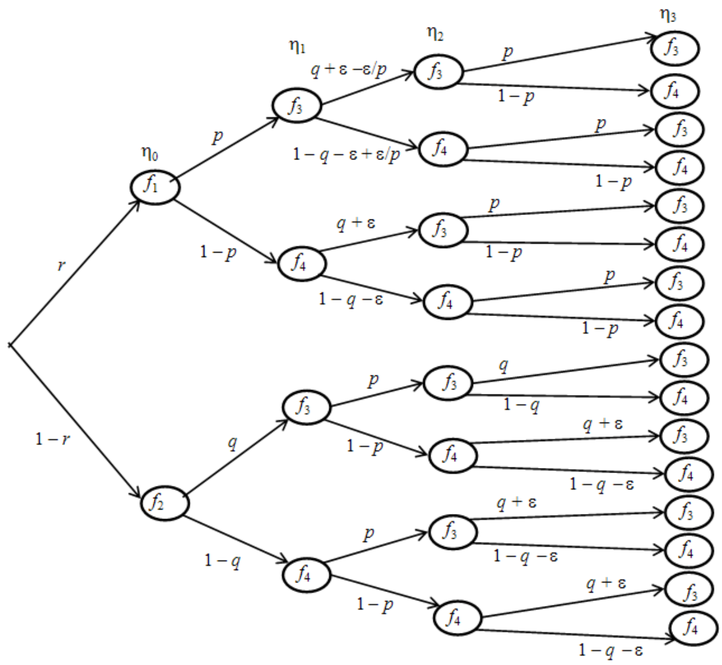


Рис. 7. Граф переходов состояний блока внутренней памяти

Поясним на содержательном уровне ограничения (1) — (5) на условные вероятности, которые формализуют зависимость последовательных ответов студента. Ограничение (1) непосредственно следует из случайного механизма выбора последовательности ответов студента и из условий задачи Мостеллера. Условие (2) показывает, что произошло уменьшение вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после удачного предыдущего ответа профессору. Это обстоятельство можно проинтерпретировать тем, что у студента часто появляется некоторое психологическое самомнение после удачного ответа профессору. Соотношение (3) означает увеличение на ε вероятности следующего ответа плохо подготовленного студента ассистенту после неудачного его предыдущего ответа. Этот факт подтверждается большим числом наблюдений, когда слабо подготовленные студенты стараются более внимательно и ответственно отвечать на очередной вопрос при неудовлетворительном предыдущем ответе. С другой стороны, очень часто на экзаменах преподаватели высокой квалификации используют последнюю возможность обучения плохо подготовленных студентов при их неудачных ответах. Таким способом происходит дополнительное обучение студента высококвалифицированным и опытным преподавателем. Равенство (4) соответствует вполне естественной ситуации, когда ответ студента на третий вопрос не зависит от его положительных ответов на первые два вопроса. Наконец, группа ограничений (5) свидетельствует о том, что профессор оценивает студента более строго и в то же время более объективно по сравнению с ассистентом. Другими словами, оценка студента профессором не зависит от удачных или неудачных его предыдущих ответов. С помощью такого простого алгоритма здесь заложена модель обучения плохо подготовленных студентов на экзаменах.

Далее рассмотрим устройство по переработке информации внутренней памяти, которое реализует эту модель обучения на экзаменах плохо подготовленных студентов.

6) Устройство по переработке информации внутренней памяти определяет по некоторому алгоритму условные вероятности очередного положительного ответа студента в зависимости от предыдущих его результатов, и реализовывает случайный механизм оценки ответов на вопросы. Информация блока по переработке внутренней памяти есть множество вида $\{r, (p, q), (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p), (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)\}$, которое состоит из четырёх состояний: $g_1 = r$, $g_2 = (p, q)$, $g_3 = (q + \varepsilon - \varepsilon/p, q + \varepsilon, p, p)$, $g_4 = (p, p, p, p, q, q + \varepsilon, q + \varepsilon, q + \varepsilon)$. Координаты блока по переработке внутренней памяти суть номера 1, 2, 3, 4 состояний g_1, g_2, g_3, g_4. Состояние блока в момент τ_i есть $\theta_i = g_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2, 3$. Код информации блока — вектор $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Поэтому ориентированный граф переходов состояний этого блока имеет простой в виде рис. 8:

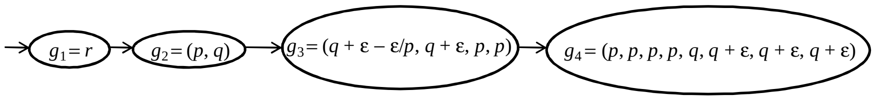


Рис. 8. Граф переходов состояний блока по обработке информации внутренней памяти

7) Выходной полюс определяет наблюдаемые исходы экзамена некоторого студента. Информация блока выходного полюса данного эксперимента есть пространство

$$\Omega = \{\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3)\colon x_0 \in \{f_1, f_2\}, x_1, x_2, x_3 \in \{f_3, f_4\}\}$$

из 16 его состояний:

$$\omega_1 = (f_1, f_3, f_3, f_3),\ \omega_2 = (f_1, f_3, f_3, f_4),\ \omega_3 = (f_1, f_3, f_4, f_3),\ \omega_4 = (f_1, f_3, f_4, f_4),\ \omega_5 = (f_1, f_4, f_3, f_3),$$

$$\omega_6 = (f_1, f_4, f_3, f_4),\ \omega_7 = (f_1, f_4, f_4, f_3),\ \omega_8 = (f_1, f_4, f_4, f_4),\ \omega_9 = (f_2, f_3, f_3, f_3),\ \omega_{10} = (f_2, f_3, f_3, f_4),$$

$$\omega_{11} = (f_2, f_3, f_4, f_3),\ \omega_{12} = (f_2, f_3, f_4, f_4),\ \omega_{13} = (f_2, f_4, f_3, f_3),\ \omega_{14} = (f_2, f_4, f_3, f_4),$$

$$\omega_{15} = (f_2, f_4, f_4, f_3),\ \omega_{16} = (f_2, f_4, f_4, f_4).$$

Координаты блока выходного полюса суть номера 1, 2, …, 16 состояний ω_1, ω_2, …, ω_{16}. Состояние этого блока в момент времени τ_3 есть случайный элемент ξ, где $\xi(\omega) \equiv \omega$ при $\omega = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Код информации блока выходного полюса есть случайный вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $\xi_i(\omega) \equiv x_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Используя соотношения (1) — (5) и граф переходов состояний внутренней памяти построим ориентированный граф появлений состояний выходного полюса в виде рис. 9:

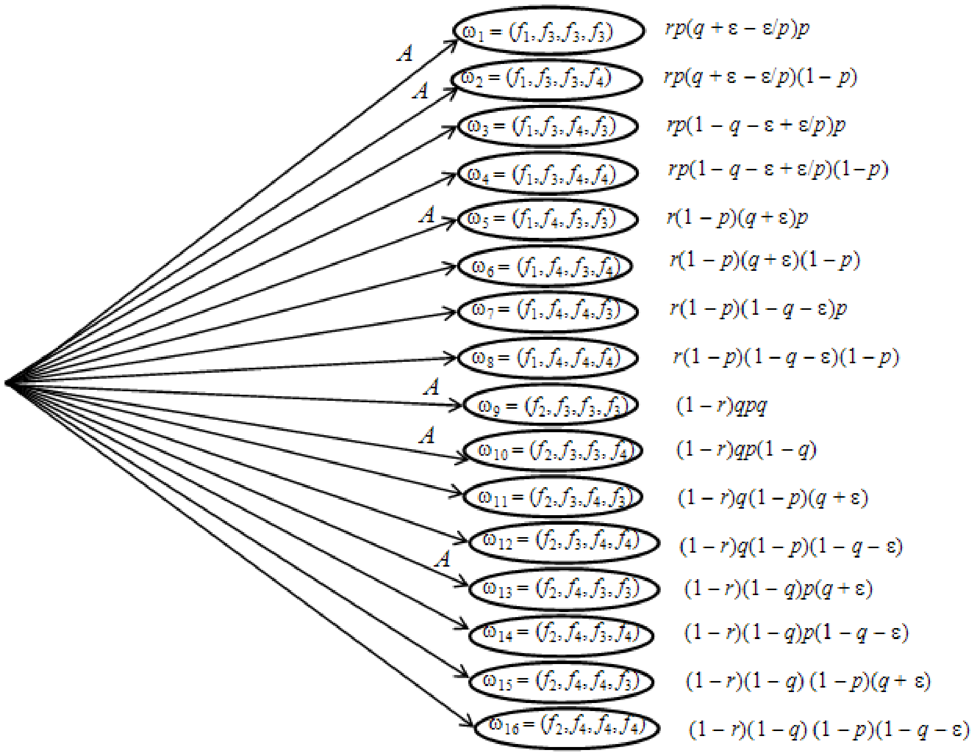


Рис. 9. Граф появлений состояний блока выходного полюса

На этом рисунке показаны также вероятности появлений тех или иных состояний выходного полюса и символом A отмечены состояния ω_1, ω_2, ω_5, ω_9, ω_{10} и ω_{13} выходного полюса, в каждом из которых студент сдал экзамен.

5. Построение колмогоровской вероятностной модели на основе кибернетического подхода

Результаты работ [1, 2] показывают, что кибернетический подход позволяет найти не только функциональные и статистические связи между блоками схемы, но эффективно выбрать основные исходные и искомые характеристики управляющей системы с целью решения задач анализа и оптимизации. Это утверждение имеет место и для задачи Мостеллера. Действительно, за исключением блоков внешней среды, внутренней памяти и выходного полюса, поведение каждого из остальных блоков схемы носит либо детерминированный характер, либо однозначно определяется состоянием других её блоков. Поэтому, наблюдая только случайные состояния блока выходного полюса в момент времени τ_3, можно восстановить полную картину хода поведения управляющей системы по приёму экзамена. В частности, можно определить все состояния блока выходного полюса, когда студент сдал экзамен. Следовательно, в качестве основной характеристики задачи об экзаменах можно выбрать состояние блока выходного полюса. При этом блок выходного полюса моделирует работу статистически устойчивого эксперимента W_r, а каждое состояние блока выходного полюса отождествляется с описанием некоторого элементарного исхода эксперимента W_r.

Теперь нетрудно построить вероятностную модель $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\bullet))$ эксперимента W_r. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{16}\}$, $\Im = \{B\colon B \subset \Omega\} = \{B_1, B_2, \ldots, B_{65536}\}$ и вероятностная функция $\mathbf{P}_r(\bullet))$ задается равенствами:

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) = rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)p,\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) = rp(q + \varepsilon - \varepsilon/p)(1 - p),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_3\}) = rp(1 - q - \varepsilon + \varepsilon/p)p,\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_4\}) = rp(1 - q - \varepsilon + \varepsilon/p)(1 - p),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) = r(1 - p)(q + \varepsilon)p,\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_6\}) = r(1 - p)(q + \varepsilon)(1 - p),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_7\}) = r(1 - p)(1 - q - \varepsilon)p,\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1 - p)(1 - q - \varepsilon)(1 - p),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) = (1 - r)qpq,\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) = (1 - r)qp(1 - q),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) = (1 - r)q(1 - p)(q + \varepsilon),\ \mathbf{P}_r(\{\omega_{12}\}) = (1 - r)q(1 - p)(1 - q - \varepsilon),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) = (1 - r)(1 - q)p(q + \varepsilon),\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_{14}\}) = (1 - r)(1 - q)p(1 - q - \varepsilon),$$

$$\mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\}) = (1 - r)(1 - q)(1 - p)(q + \varepsilon),\ \ \mathbf{P}_r(\{\omega_{16}\}) = (1 - r)(1 - q)(1 - p)(1 - q - \varepsilon).$$

Например, элементарное событие $\{\omega_8\} = \{(f_1, f_4, f_4, f_4)\} \in \Im$ означает, что студент выбрал первый вариант последовательности ответов и отрицательно ответил на все три вопроса. При этом вероятность $\mathbf{P}_r(\{\omega_8\}) = r(1 - p)(1 - q - \varepsilon)(1 - p)$. Построенная вероятностная модель $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\bullet))$ эксперимента W_r позволяет выписать функциональную связь между блоком внешней среды и выходным полюсом в виде равенств: $\chi_0(\omega_1) = \chi_0(\omega_2) = \ldots = \chi_0(\omega_8) = b_1$, $\chi_0(\omega_9) = \chi_0(\omega_{10}) = \ldots = \chi_0(\omega_{16}) = b_2$. Аналогично найдём функциональную связь между внутренней памятью и выходным полюсом. Например, функциональная связь между внутренней памятью в моменты τ_3 и выходным полюсом задается равенством $\eta_3(\omega_s) = f_3$ при нечетном значении s. Приведенные здесь и остальные функциональные связи являются на самом деле поточечным заданием случайных элементов $\chi(\omega)$, $\eta(\omega)$ и $\xi(\omega)$. Поэтому их законы распределения и связанные с этими элементами условные вероятности могут быть найдены по правилам теории вероятностей. Так,

$$\mathbf{P}_r(\eta_2 = f_3 \mid \eta_0 = f_1) = \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1, \eta_2 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_1) =$$

$$= (\mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_6\}))/r = pq + + p\varepsilon - \varepsilon + (1 - p)(q + \varepsilon) = q.$$

Однако, условная вероятность

$$\mathbf{P}_r(\eta_3 = f_3 \mid \eta_0 = f_2) = \mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2, \eta_3 = f_3)/\mathbf{P}_r(\eta_0 = f_2) =$$

$$= (\mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{11}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{15}\}))/(1 - r) = q + \varepsilon(1 - pq) > q.$$

Значит, произошло обучение студента на экзаменах.

Итак, окончательные результаты пунктов 1) — 7) можно сформулировать в виде следующего доказанного утверждения.

Теорема. Математическое описание внешней среды, входного полюса, внешней памяти, устройства по переработке информации внешней памяти, внутренней памяти, устройства по переработке информации внутренней памяти и выходного полюса выполняется векторами $\chi(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\zeta(\omega)$, $\eta(\omega)$, $\theta(\omega)$ и $\xi(\omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}_r(\bullet))$.

Функция эксперимента W_r об экзамене заключается в случайном выборе студентом одного из двух вариантов поведения и в его ответах на три последовательных вопроса с целью определения объективной оценки преподавателями знаний студента. Окончательный результат экзамена данного студента существенно оказывает влияние на отношение студента к экзаменаторам и, значит, в той или иной степени изменяет неконтролируемые условия внешней среды. Итак, для задачи об экзаменах (Мостеллера) выделены схема, информация, координаты и функция.

6. Оптимальное поведение студента и решение парадокса Мостеллера—Секея

Пусть случайное событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_9, \omega_{10}\ \omega_{13}\}$ означает, что студент сдал экзамен. Тогда

$$\mathbf{P}_r(A) = \mathbf{P}_r(\{\omega_1\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_2\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_5\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_9\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{10}\}) + \mathbf{P}_r(\{\omega_{13}\}) =$$

$$= r[pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq)] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q).$$

Формулировка задачи оптимизации для эксперимента W_r заключается в определении такого $r' \in [0, 1]$, для которого выполняется условие оптимальности: $\mathbf{P}_{r'}(A) = \sup\{\mathbf{P}_r(A){:}\ 0 \le r \le 1\}$. При определении оптимальной стратегии выбора последовательности ответов в задаче Мостеллера об экзаменах с обучением необходимо учитывать естественные ограничения

$$0 < p,\ q < 1,\ q > p,\ \varepsilon \ge 0,\ q + \varepsilon < 1,\ q + \varepsilon - \varepsilon/p \ge p$$

на параметры p и q, которые определяют уровень подготовки студента, и на параметр обучения ε. Рассмотрим всевозможные случаи изменения параметров p, q и ε при выполнении указанных ограничений.

Лемма 2. Если выполняется неравенство $q \ge (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $q + \varepsilon < 1$, то $r' = 1$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство $q \ge (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$. Тогда имеем соотношение

$$1 - q \le p(q-p)(1-p)^{-1} \le pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}.$$

Если $0 \le \varepsilon < 1 - q$, то $q + \varepsilon - \varepsilon p^{-1} > p$ и $pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0$. Вероятность события A равна $\mathbf{P}_r(A) = r[pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq)] + qp(2-q) + p\varepsilon(1-q)$. Отсюда $r' = 1$.

Лемма 3. Пусть $q < (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $0 \le \varepsilon < pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$. Тогда оптимальный план $r' = 1$.

Доказательство. Так как $q < (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$, тогда

$$pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < p(q-p)(1-p)^{-1} < 1 - q.$$

Из условия $0 \le \varepsilon < pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$ получаем, что

$$pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) > 0,\ q + \varepsilon < 1,\ q + \varepsilon - \varepsilon/p > p.$$

Следовательно, опять оптимальная стратегия $r' = 1$.

Лемма 4. Если $q < (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $\varepsilon = pq(q-p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1}$, то $0 \le r' \le 1$.

Доказательство. Из условий леммы 4 непосредственно следует, что

$$pq(q-p) - \varepsilon(1 + p^2 - p - pq) = 0,\ q + \varepsilon < 1,\ q + \varepsilon - \varepsilon/p > p$$

и, значит, оптимальное управление r' можно выбрать в промежутке $0 \le r' \le 1$.

Лемма 5. Пусть имеет место $pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < \varepsilon \le p(q-p)(1-p)^{-1}$ и $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$. Тогда оптимальный план $r' = 0$.

Доказательство. Если $pq(q-p)(1+p^2-p-pq)^{-1} < \varepsilon \le p(q-p)(1-p)^{-1}$, $q < (p-0{,}5)^2 + 0{,}75$, тогда справедливы неравенства $pq(q-p) - \varepsilon(1+p^2-p-pq) < 0$, $q + \varepsilon - \varepsilon/p \ge p$, $q + \varepsilon < 1$. Отсюда $r' = 0$, и студент выбирает второй порядок ответов.

Таким образом, были определены области значений параметров p, q и промежутки изменения параметра ε, которые позволяют понять парадокс независимости [5]. Эти области соответствует тому случаю, когда студентам при их ответах преподавателям целесообразно пользоваться первым или вторым вариантом поведения в зависимости от значений параметров p и q, отвечающие за подготовку к экзаменам, и параметра обучения ε. Как следствие из предыдущих рассуждений получаем, что при $\varepsilon = 0$ следует применять только первый вариант поведения при $(p, q) \in \{(p, q)\colon 0 < p, q < 1, q > p\}$. Заметим, что оптимальный план $r' = 1$ задачи Мостеллера при $\varepsilon = 0$ совпадает с решением аналогичной задачи из работ [4, 5].

Приведём теперь решение известного парадокса о независимости [5]. Итак, совет использовать только первый вариант поведения, который даётся в книгах [4, 5], не является всегда верным. В этих книгах ключевым фактом в рассуждениях является важность правильного ответа на второй вопрос. Действительно, только в этом случае студент будет иметь возможность подряд два правильных ответа и может сдать экзамен. Другими словами, большая вероятность ответить на второй вопрос ассистенту якобы всегда играет более существенную роль, чем меньшее число ответов профессору. Однако исследования этой задачи с помощью кибернетического подхода, многочисленные опросы студентов и сами экзамены показывают, что применение первого или второго варианта поведения существенно зависит от подготовки и обучаемости на экзаменах студентов. На рис. 10, составленный из четырех частей, приведены заштрихованные области значений параметров p, q и промежутки изменения параметра ε, в которых следует применять оптимальный план последовательности ответов студента на экзамене.

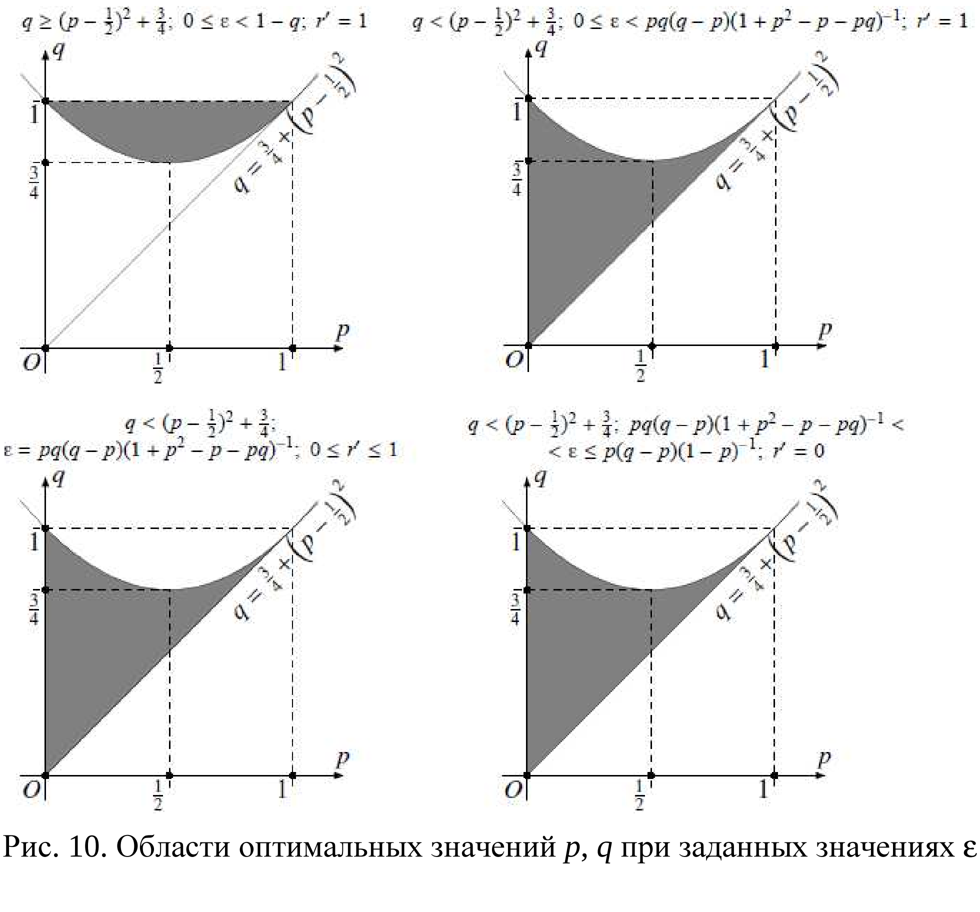


Рис. 10. Области оптимальных значений p, q при заданных значениях ε

Так для отлично подготовленных студентов, ответы которых, скорее всего, будут независимыми случайными событиями ($\varepsilon = 0$) или удовлетворяют условию $q \geq (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$, целесообразно пользоваться первым вариантом поведения. Напротив, для плохо подготовленных студентов и при хорошей их обучаемости в случае, когда $0 < p$, $q < 1$, $q > p$, $q < (p - 0{,}5)^2 + 0{,}75$ и $pq(q - p)(1 + p^2 - p - pq)^{-1} < \varepsilon \leq p(q - p)(1 - p)^{-1}$, целесообразно применять второй вариант поведения. Такая ситуация, по-видимому, сложилась после 1992 г. не только в Нижегородском госуниверситете.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Федоткин М.А. Процессы обслуживания и управляющие системы. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. 1996. Вып. 6. С. 51–70

[2]. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов. Математические вопросы кибернетики. М.: Наука. 1998. Вып. 7. С. 332–344.

[3]. Ляпунов А.А., Яблонский С.В. Теоретические проблемы кибернетики. Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. 1963. Вып. 9. С. 5–22.

[4]. Mosteller F. Fifty challenging problems in probability with solutions. Reading, MA: Addison-Wesley. 1965.

[5]. Székely G. Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. Budapest: Akadémiai Kiadó. 1986.

[6]. Сизова Э.В. Очерки из истории Куркинского края. Тула. Левша. 2004.

[7]. Ляпунова Н.А., Фет Я.И. Алексей Андреевич Ляпунов. Новосибирск. <<Гео>> ИВМиМГ СО РАН. 2001.

[8]. Воронцов Н.Н. Алексей Андреевич Ляпунов. М.: Новый хронограф. 2011. 240 с.