Нижняя оценка сложности реализации в классе π-схем q-ичного счётчика кратности q [1]

К. Л. Рычков

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

rychkov@math.nsc.ru

Под q-ичной параллельно-последовательной контактной схемой (π-схемой) понимается обычная (двоичная) π-схема, контактам которой приписаны символы x_i^δ, $i = 1, ..., n$; $\delta = 0, 1, ..., q-1$. Но при этом символ x_i^δ мы понимаем не как булеву переменную или её отрицание, а как функцию одной переменной x_i, определённую на множестве $B_q = \{0, 1, ..., q-1\}$ и принимающую значения из множества $\{0, 1\}$. Значение функции x_i^δ равно 1, если $x_i = \delta$, и равно 0, если $x_i \neq \delta$.

Функция $f : B_q^n \to \{0, 1\}$ проводимости q-ичной π-схемы определяется по аналогии с двоичным случаем: по определению q-ичная π-схема реализует функцию $f(x_1, ..., x_n) = \bigvee\limits_C K_C$, где дизъюнкция берётся по всем простым (без самопересечений) цепям, соединяющим полюсы схемы, а K_C это конъюнкция всех функций $x_{i_1}^{\delta_1}, ..., x_{i_k}^{\delta_k}$, приписанных контактам цепи C. Как и в двоичном случае мы говорим, что контакт, помеченный x_i^δ, замкнут на наборе $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in B_q^n$, если $\alpha_i = \delta$, и разомкнут в противном случае.

Сложностью $L(S)$ q-ичной π-схемы S называется число контактов в S. Сложностью $L_\pi(f)$ функции $f : B_q^n \to \{0, 1\}$ в классе π-схем называется $\min\limits_S L(S)$, где минимум берётся по всем q-ичным π-схемам, реализующим f.

Заметим, что при $q \geq 3$ в отличие от двоичного случая сложность функции $f : B_q^n \to \{0, 1\}$ может отличаться от сложности её отрицания $\overline{f}$. Так сложность функции x_i^δ равна 1, а сложность её отрицания $\overline{x_i^\delta} = x_i^0 \vee, ..., \vee x_i^{\delta-1} \vee x_i^{\delta+1} \vee, ..., \vee x_i^{q-1}$ равна $q-1$. При этом, очевидно, имеет место неравенство

$$L_\pi(f) \geq \frac{1}{q-1} L_\pi(\overline{f}).$$

Действительно, если S это минимальная q-ичная π-схема, реализующая функцию f, и F — соответствующая S формула, то "навесив"на F отрицание, "опустив"его по законам де Моргана до переменных и заменив все $\overline{x_i^\delta}$ на $x_i^0 \vee, ..., \vee x_i^{\delta-1} \vee x_i^{\delta+1} \vee, ..., \vee x_i^{q-1}$, получим формулу а значит и некоторую π-схему S' для $\overline{f}$. При этом, очевидно, выполнены соотношения

$$L_\pi(f) = L(S) = \frac{1}{q-1} L(S') \geq \frac{1}{q-1} L_\pi(\overline{f}).$$

На множестве B_q^n определим следующую функцию:

$$\varphi_q(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + ... + x_n = 0 \pmod{q}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00528а).

В [1] было установлено, что при $q \geq 2,\ n \geq 2$ справедливо неравенство

$$L_\pi(\overline{\varphi_q}(x_1, ..., x_n)) \geq \max\ \{\frac{qn\log q}{2},\ (q-1)n^2\}.$$

Это неравенство в силу сделанного замечания влечёт следующую нижнюю оценку сложности функции $\varphi_q(x_1, ..., x_n)$:

$$L_\pi(\varphi_q(x_1, ..., x_n)) \geq \max\ \{\frac{qn\log q}{2(q-1)},\quad n^2\}.$$

Результатом настоящей работы является теорема, улучшающая эту нижнюю оценку сложности.

ТЕОРЕМА. Для любых натуральных $q, n,\ q \geq 2, n \geq 3$, справедливы следующие неравенства:

$$L_\pi(\varphi_q(x_1, ..., x_n)) \geq \max\ \{2qn - q,\quad \frac{q^n n^2}{q^n - (q-1)^n - (-1)^n(q-1)}\},\ \text{при}\ n = 1 \pmod q;$$

$$L_\pi(\varphi_q(x_1, ..., x_n)) \geq \max\ \ \{2qn - q,\ \frac{q^n n^2}{q^n - (q-1)^n + (-1)^n}\},\ \text{при}\ n \neq 1 \pmod q.$$

Литература

1. Рычков К. Л. О сложности обобщённых контактных схем// Дискрет. анализ и исслед. операции. Сер. 1. 2009. Т. 16, № 5. С. 78-87.