Об одной экстремальной функции А.А. Маркова

В. П. Скляров

Механико-математический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: sklyarovvp@mail.ru

Аннотация

Будут представлены к обсуждению графики экстремальных функций, связанных с равномерно взвешенным неравенством Маркова для нормы производной алгебраического многочлена.

Функция

$$M_n\left(x\right)=\sup_{p\in P_n,p\neq 0}\frac{|\rho(x)p'(x)|}{\|\rho p\|}, \tag{1}$$

впервые была рассмотрена А.А. Марковым [1] в конце девятнадцатого столетия для веса $\rho(x)\equiv 1$, $<a,b>=[-1,1]$ и нормы $\|f\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Здесь P_n – множество алгебраических многочленов, степени не выше n. Позднее в двадцатом столетии в работах С.Н. Бернштейна, Е.В. Вороновской, В.С. Виденского и многих других исследовались различные свойства таких функций аналитическими методами. Насколько известно автору, в наше время нет общепринятой вычислительной схемы, позволяющей численно строить график функции (1). Использованная в рассматриваемом случае ($\rho(x)=e^{-|x|}$ и промежуток $<a,b>=(-\infty,\infty)$) схема вычислений в основном опирается на одно из утверждений работы [1], суть которого заключается в том, что экстремальным в неравенстве Маркова, по необходимости, будет многочлен Золотарева. Подробное изложение этого вопроса в случае равномерно взвешенной нормы можно найти в [4]. Отметим, что полученное А.А. Марковым аналитическое выражение для $M_2\left(x\right)$ позволяет судить о точности проводимых численных экспериментов. Оценки для максимальных значений функции $M_n(x)$ для веса Лагерра в случа оси и полуоси можно найти в работах [6, 7, 2].

Введем необходимые для дальнейшего понятия и обозначения. Неравенство

$$\|\rho(x)p'(x)\| \leq M_n \|\rho(x)p(x)\|, \tag{2}$$

будем называть неравенством Маркова. Везде далее P_n - множество алгебраических многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше, чем n, $p(x) \in P_n$. Очевидно, что не уменьшаемые значение числового множителя в (2) определяет равенство:

$$M_n = \sup_{p \in P_n, p \neq 0} \frac{\|\rho(x)p'(x)\|}{\|\rho(x)p(x)\|}. \tag{3}$$

Весовую функцию $\rho(x) = e^{-|x|}$ будем называть весом Лагерра, норму определять равенством $\|f\| = \sup\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)|$, при этом промежуток $\langle a,b \rangle$.не обязан быть конечным.

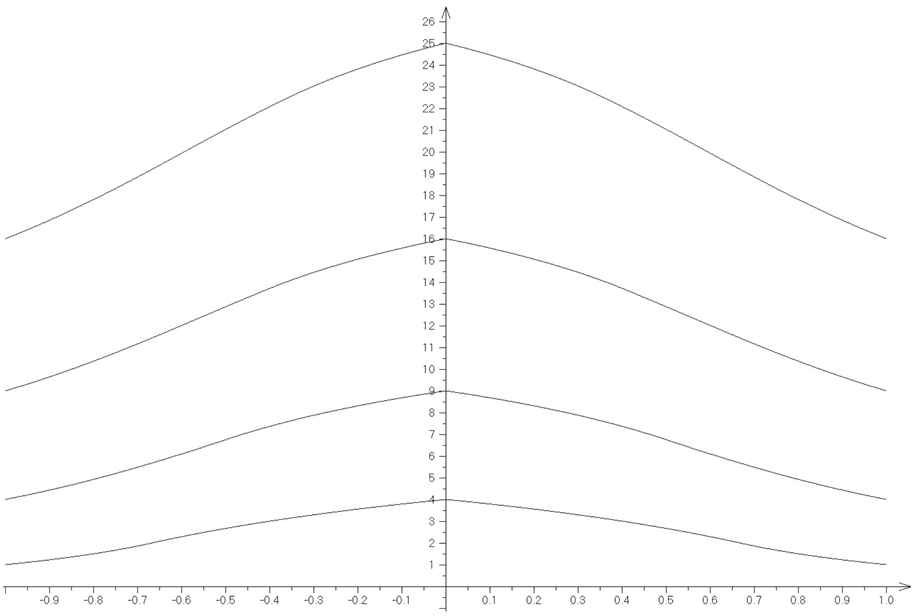

Рис. 1: $\rho(x) \equiv 1$, $\langle a,b \rangle = [-1,1]$: $Z(t)$ для $n = 2,3,4,5$.

Определение 1 *Алгебраический многочлен* $T_n(x) = x^n + a_{n-1}^* x^{n-1} + \ldots + a_0^*$ *такой, что*

$$\|\rho(x)T_n(x)\| = \inf_{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}} \left\| \rho(x) \left(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0 \right) \right\|$$

будем называть чебышевским или наименее уклоняющимся от нуля для веса $\rho(x)$.

Определение 2 *Для любого фиксированного значения параметра* $t \in [-1,1]$ *алгебраический многочлен* $Z_n(x,t) = (1-|t|)\, x^n + t \cdot x^{n-1} + b^*_{n-2} \cdot x^{n-2} \ldots + b^*_0$ *такой, что*

$$\|\rho(x) Z_n(x,t)\| = \inf_{a_0,a_1,\ldots,a_{n-2}} \left\|\rho(x)\left((1-|t|)\, x^n + t \cdot x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \ldots - a_0\right)\right\|$$

будем называть золотаревским для веса $\rho(x)$.

Впервые функция (1) исследовалась в работе [1] при $\rho(x) \equiv 1$, $\langle a,b\rangle = [-1,1]$ и для начальных значений $n = 2,3$ были найдены явные выражения. Например, для $n = 2$ из этой работы находим

$$M_2(x) = \begin{cases} 4\,|x|\,, & |x| \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1+|x|}, & |x| < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

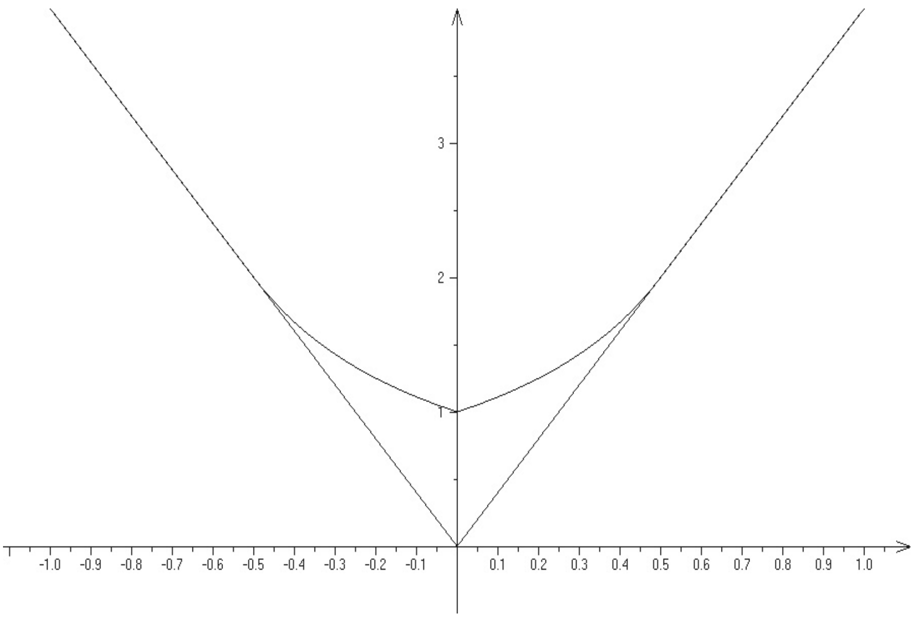

Рис. 2: $\rho(x) \equiv 1$, $\langle a,b\rangle = [-1,1]$: $M_2(x)$ и $|T_1'(x)|$ для $n = 2$.

Ниже перечисляются известные [3] для этого случая свойства функции $M_n(x)$, которые легко обнаруживаются по графику:

1. $M_n(x) > 0$, при $x \in (-\infty, \infty)$.
2. $M_n(x) = M_{n,1}(1-x)$, при любых x.
3. $M_n(x)$ дифференцируема на всей оси.
4. $M_n(x)$ монотонно убывает на промежутке $(-\infty, -1]$ и монотонно возрастает на $[1, \infty)$.

5. $M_n\left(x\right)$ имеет ровно $n-2$ точки максимума, расположенные по одной на чебышевских сегментах, и $n-1$ точку минимума, по одной на золотаревских интервалах.

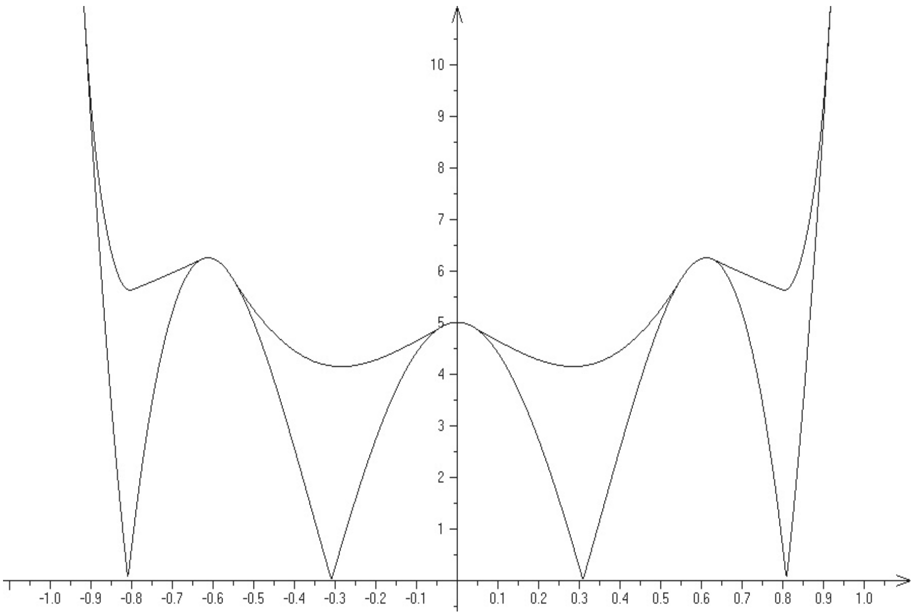

Рис. 3: $\rho(x) \equiv 1$, $\langle a, b\rangle = [-1, 1]$; график $M_5\left(x\right)$ и $|T_5'(x)|$.

Определение 3 *Если для фиксированного значения x в равенстве* (2) *среди экстремальных оказывается многочлен $T_n(x)$, то точку называют чебышевской, в противном случае золотаревской.*

6. Вне отрезка $[-1, 1]$ золотаревских точек нет, а вся вещественная ось разбивается на конечное число неперекрывающихся золотаревских интервалов и чебышевских промежутков.

7. $M_n = \max\limits_{x\in[-1,1]} M_n(x) = n^2$.

Отметим, что известных свойств функций $M_n\left(x\right)$ заметно больше перечисленных, только в [3] их указано 15. Так же известно [1, 4]:

$$M_n\left(x\right) = \sup_{-1\leq t\leq 1} \frac{|\rho(x) Z_n'(x,t)|}{\|\rho Z_n\|}.$$

Собственно, это равенство и положено в основу вычислений, при этом для численного построения золотаревских многочленов использовался известный алгоритм Н.Я. Ремеза. Подробно схема вычислений описана в [5]. Перейдем к обсуждению результатов вычислений, обозначив

$$Z(t) = \frac{\|Z_n'(\cdot,t)\|}{\|Z_n(\cdot,t)\|}.$$

График этой функции удобно использовать для определения величины множителя в неравенстве Маркова и типа экстремального многочлена.

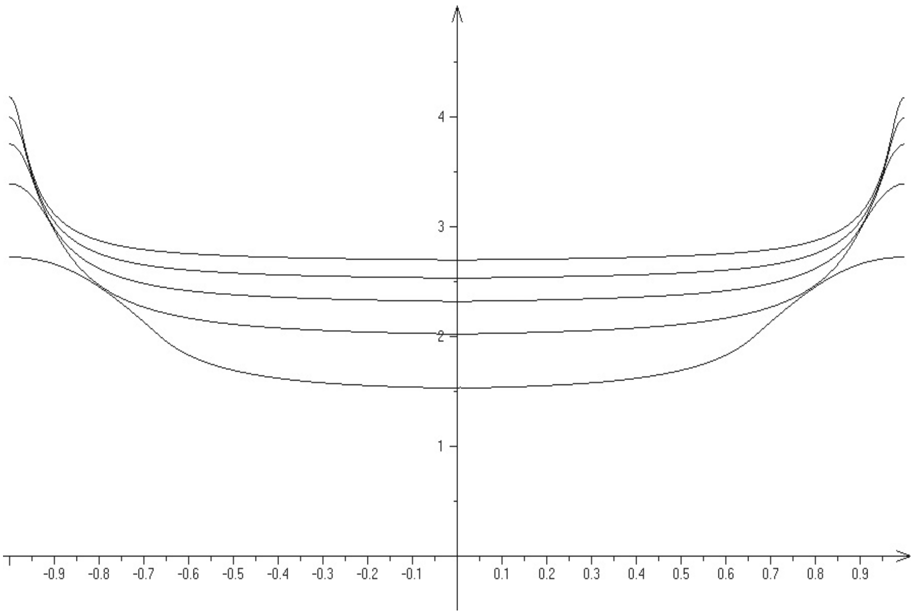

Рис. 4: $Z\,(t)$ для $n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

Сначала классический случай: $\rho(x) \equiv 1$, $\langle a, b\rangle = [-1, 1]$. Легко заметить, что полученные численно графики $M_n\,(x)$, $n = 2,\ 5$ (рис. 2, 3) строго соответствуют обнаруженным аналитически закономерностям. Функция $M_2\,(x)$ на рисунке 2 достаточно точно воспроизводит детали найденного А.А. Марковым представления (4). Явно обозначенные точки экстремумов функций $Z\,(t)$ (рис. 1) подчеркивают единственность экстремального многочлена, а также точно указывают на величину неуменьшаемого множителя в неравенстве Маркова. График на рисунке 3 показывает распределение золотаревских и чебышевских точек на единичном отрезке при $n = 5$, подтверждая отмеченные ранее свойства 3 - 6. Таким образом, перечисленные совпадения численных результатов с аналитическими можно рассматривать в качестве подтверждения адекватности используемой численной модели.

Вес Лагерра на всей вещественной оси: $\rho(x) = e^{-|x|}$, $\langle a, b\rangle = (-\infty, \infty)$. В работах [6, 7], вероятно, впервые было замечено, что в этом случае

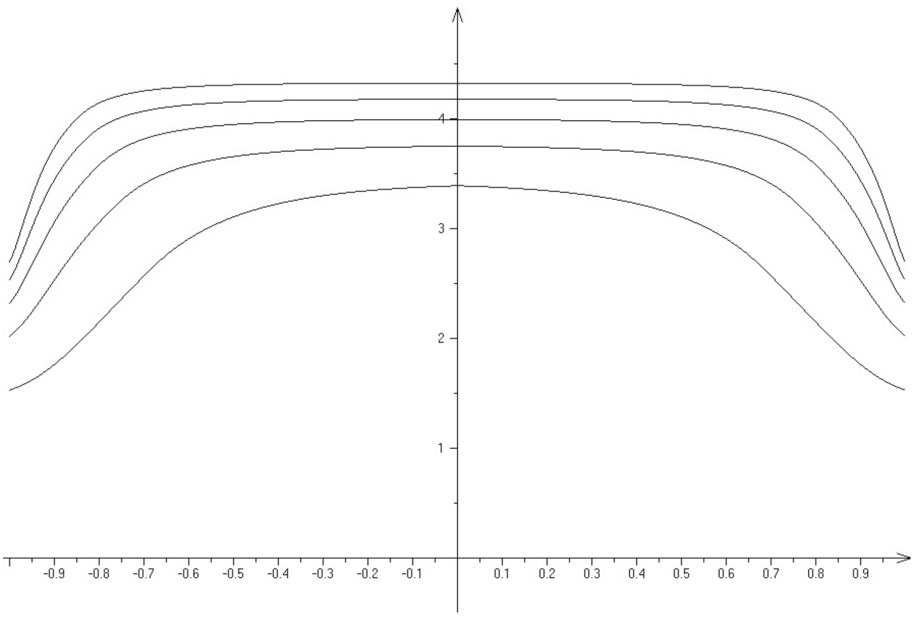

Рис. 5: $Z\left(t\right)$ для $n = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

верхняя граница не уменьшаемого множителя в неравенстве Маркова есть величина $O(\ln n)$. Сравнение с приведенными выше данными показывает, что этот случай весьма специфичен. На рисунках 4 и 5 отчетливо видно, что неравенства Маркова для этого веса имеют разные экстремальные многочлены для четных и нечетных степеней. Функции $Z\left(t\right)$ при $n = 2k$ (рисунок 4) и при $n = 2k + 1$ (рисунок 5) достигают своих наибольших значений соответственно в точках ± 1 и 0, поэтому в четном случае единственным экстремальным многочленом будет $T_{n-1}(x)$, в то время как в нечетном - $T_n(x)$. Если для четных степеней наличие на графике максимума только в точках ± 1 позволяет сделать предположение о единственности экстремального многочлена, то для нечетных степеней, возможно из-за невысокого разрешения изображения, утверждение о единственности остается под вопросом. При этом оба варианта графиков подтверждают невысокую, по сравнению с классическим случаем, скорость роста множителя в неравенстве (2).

Функции $M_n\left(x\right)$ для степеней разной четности заметных отличий не обнаруживают (см. рис. 6, 7). Однако, в сравнении с классическим случаем, единственный максимум функции достигается не в крайних точках альтернанса, как это было в случае конечного отрезка и $\rho(x) \equiv 1$, а точно в середине промежутка Еще одна особенность: последовательность множителей растет не строго монотонно: $M_1 = M_2 < M_3 = M_4 < M_5 = M_6$, при этом обнаруживается еще одно отличие от классического случая:

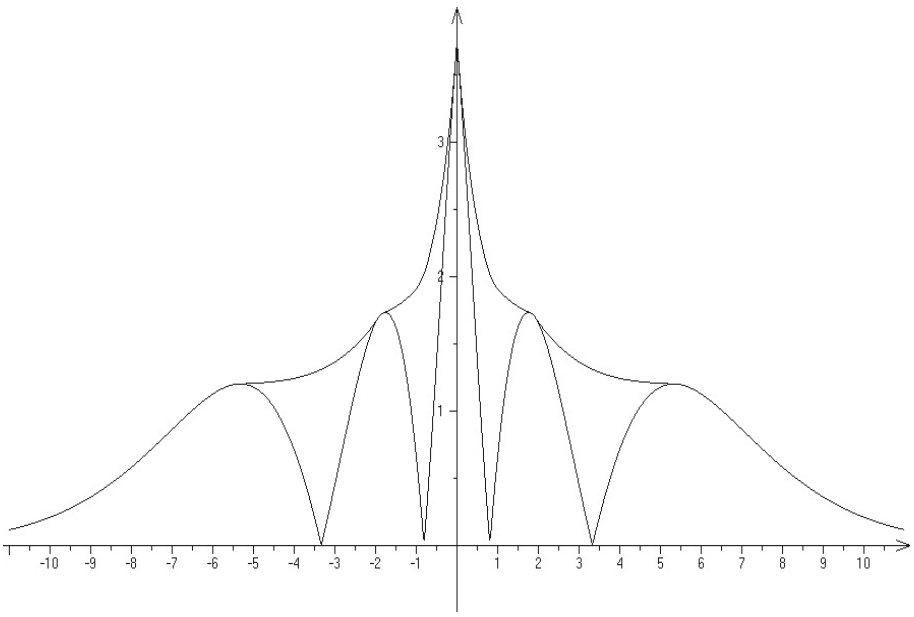

Рис. 6: $\rho(x)M_5\,(x)$ и $\rho(x)\,|T_5'(x)|$.

точка максимума функции $M_n(x)$ может лежать на золотаревском интервале.

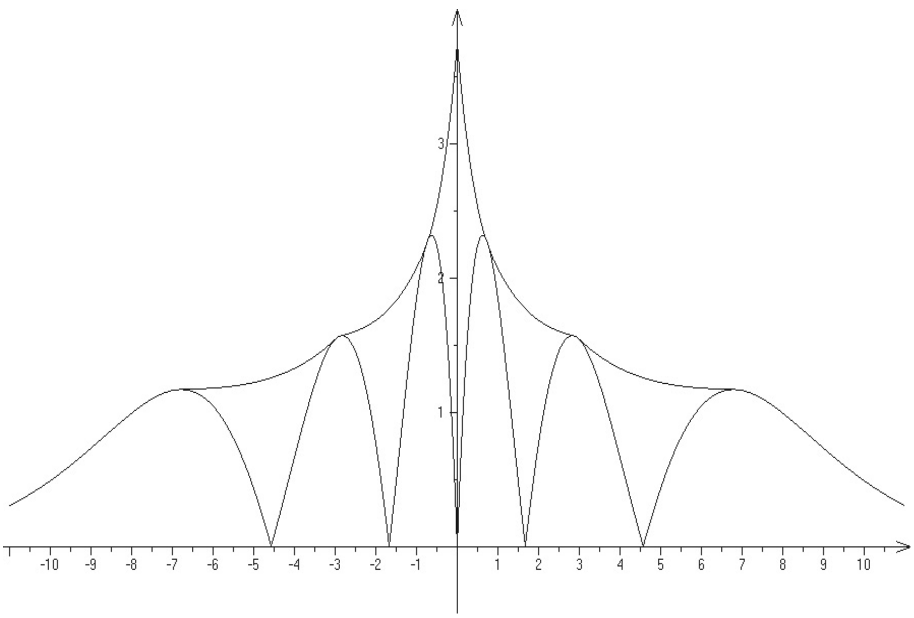

Рис. 7: $\rho(x)M_6\,(x)$ и $\rho(x)\,|T_6'(x)|$.

Список литературы

[1] Марков А.А., Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Избранные труды.ГИТТЛ М.-Л., 1948, 51-75.

[2] Скляров В. П., О точной константе в неравенстве Маркова для веса Лагерра. Матем. сб., 200:6 (2009), 109-118.

[3] Зингер М.Я. Элементы дифференциальной теории чебышевских приближений. М.: Наука, 1975, 171 с..

[4] Schönhage A.. Approximationstheorie. Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York 1971, 212 pp.

[5] Скляров В. П., Численный эксперимент связанный с многочленами Е. И. Золотарева для равномерно взвешенной метрики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., в печати, ориентировачно октябрь, 2011

[6] Levin A. L. and Lubinsky D. S., L_∞ Markov and Bernstein inequalities for Freud weights, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), no. 4, 1065–1082.

[7] Nevai P., Totik V., Weighted polynomial inequalities, Constr. Approx. 2 (1986) 113-127.