

Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Международная конференция «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР А.А. Ляпунова

**А.И. Абакумов
Новосибирск
11 – 14 октября 2011 г.**

Содержание

- **Работы А.А.Ляпунова**
- **Экосистемные модели пресных водоемов и морей**
- **Модели функционирования экосистем и сообществ: точечные и распределенные**
- **Оптимальный сбор урожая**

Работы А.А.Ляпунова. Кибернетика в биологии

Ляпунов А.А., Маленков А.Г. Логический анализ строения наследственной информации // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1962, вып. 8.

Ляпунов А.А. Об управляющих системах живой природы и общем понимании жизненных процессов // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1963, вып. 10.

Ляпунов А.А. Об управляющих системах живой природы // О сущности жизни. М.: Наука, 1964.

Кулагина О.С., Ляпунов А.А. К вопросу о моделировании эволюционного процесса // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1966, вып. 16.

Ляпунов А.А. О математических моделях жизнедеятельности // О математическом моделировании жизнедеятельности. М.: Мысль, 1968.

Ляпунов А.А. О изучении балансовых соотношений в биогеоценозе // Журнал общей биологии. 1968, т. 29.

Ляпунов А.А. В чем состоит системный подход к объектам сложной природы // Управляемые системы. Новосибирск, 1970, вып. 6.

Ляпунов А.А. О рассмотрении биологии с позиции изучения живой природы как большой системы // Проблемы методологии системного исследования. М.: Мысль, 1970.

Ляпунов А.А. О кибернетических вопросах биологии // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 5 - 39.

Работы А.А.Ляпунова в моделировании водных экосистем.

Алексей Андреевич сформулировал основные кибернетические проблемы в биологии. В частности, совместно с сотрудниками Института океанологии АН СССР разработал модель океанического ценоза. Эта модель достаточно детально рассматривает основные биологические процессы в океане. Моделирование было сопряжено с экспериментальными исследованиями в ходе 44-го рейса исследовательского океанологического судна «Витязь». В ходе рейса были выявлены недостатки модели в описании океанических экосистем и полезность модели в установлении взаимосвязей между исследованиями разных направлений.

Ляпунов А.А. О кибернетических вопросах биологии // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 5 - 39.

Работы А.А.Ляпунова в моделировании водных экосистем.

В ходе 44-ой научной экспедиции Института океанологии АН СССР на корабле «Витязь» в тропических водах были сделаны измерения параметров для этой модели. При проведении замеров обнаружилась существенная неоднородность пространственного распределения биоты в океане. Этот факт впоследствии существенно изменил представления о биопродуктивности океанов в сторону резкого снижения ее оценок.

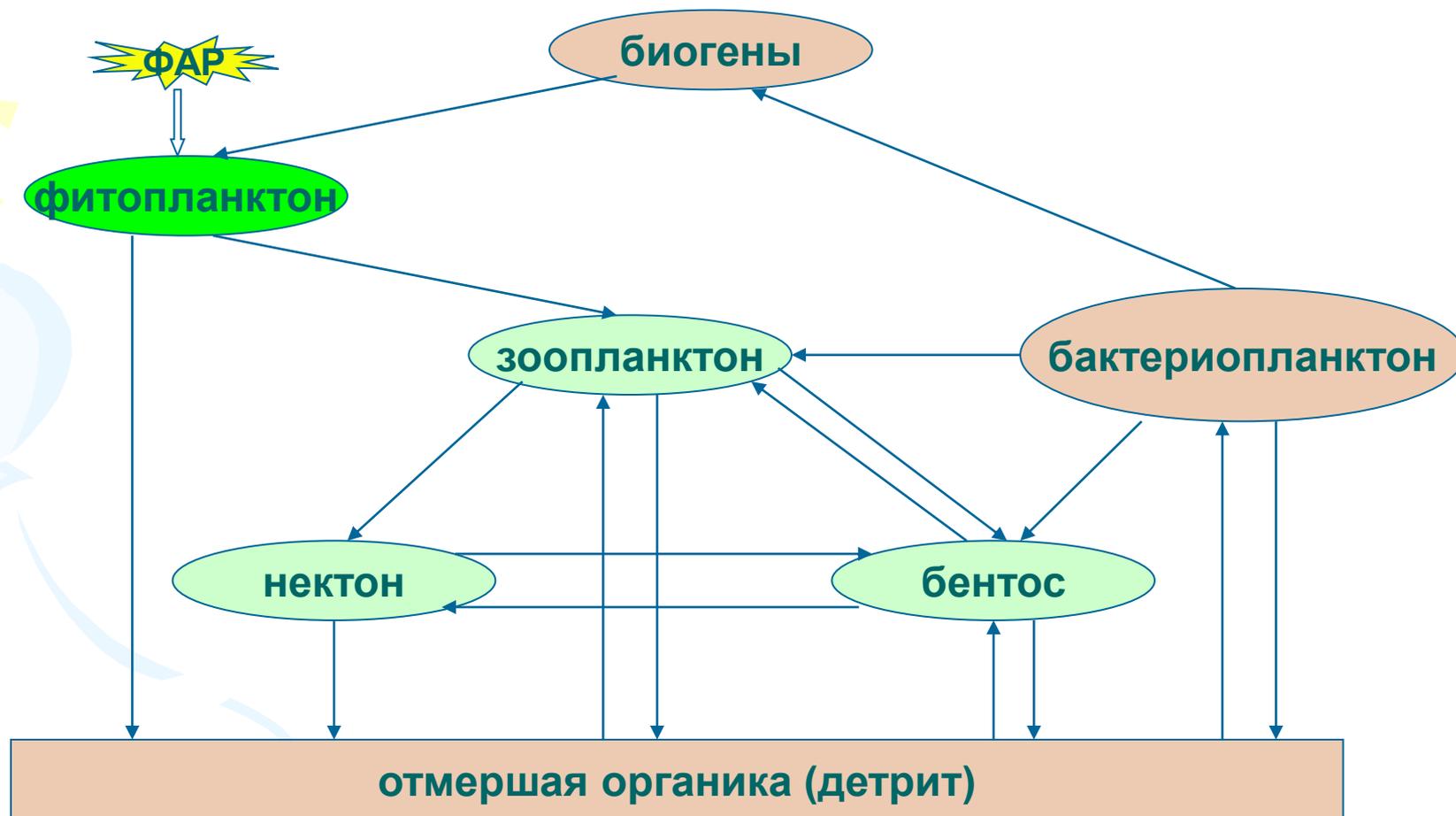
Ляпунов А.А. О балансовых соотношениях в экосистеме пелагиали тропических вод океана // Труды Института океанологии РАН. М., 1971, №4.

Ляпунов А.А. Об изучении балансовых соотношений в биогеоценозе (попытка математического анализа) // Журнал общей биологии. 1968, т. 29, № 6, с. 351-359.

Ляпунов А.А., Багриновская Г.П. О методологических вопросах математической биологии // Математическое моделирование в биологии: Материалы 1-ой Школы по математическому моделированию сложных биологических систем. М.: Наука, 1975, с. 5 - 18.

Макромодели для морской экосистемы

(совместно с к.ф.-м.н. Е.Е.Гиричевой)



Фитопланктон – основа жизнедеятельности в море. Продукция фитопланктона (первичная продукция) составляет основную часть всей продукции экосистемы.

Биопродуктивность экосистемы можно оценивать по первичной продукции.

Согласование моделей

$$\frac{dy}{dt} = f(y, a)$$

$$\frac{dz}{dt} = g(z, b)$$

$$h(y, z, c) = 0$$

$$\left\| \frac{\partial h(y, z, c)}{\partial y} \cdot f(y, a) + \frac{\partial h(y, z, c)}{\partial z} \cdot g(z, b) \right\| \xrightarrow{(a, b, c)} \inf$$

Математическая модель

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_r}{dt} &= (1 - u_{ob}) V_{ob}(y_o, y_b) - \sum_{\{l:(r,l) \in P\}} V_{rl}(y_r, y_l) \\ \frac{dy_j}{dt} &= \sum_{\{i:(i,j) \in P\}} k_{ij} u_{ij} V_{ij}(y_i, y_j) - \sum_{\{l:(j,l) \in P\}} V_{jl}(y_j, y_l) - e_j(y_j), \quad j \in J \\ \frac{dy_o}{dt} &= (1 - k_{ob}) u_{ob} V_{ob}(y_o, y_b) + \\ &+ \sum_{\{(i,j):(i,j) \in P\}} (1 - k_{ij} u_{ij}) V_{ij}(y_i, y_j) + \sum_{j \in J} e_j(y_j) - \sum_{\{l:(o,l) \in P\}} V_{ol}(y_o, y_l) \end{aligned} \right.$$

r – биогены, **b**- бактерии, **o** - детрит

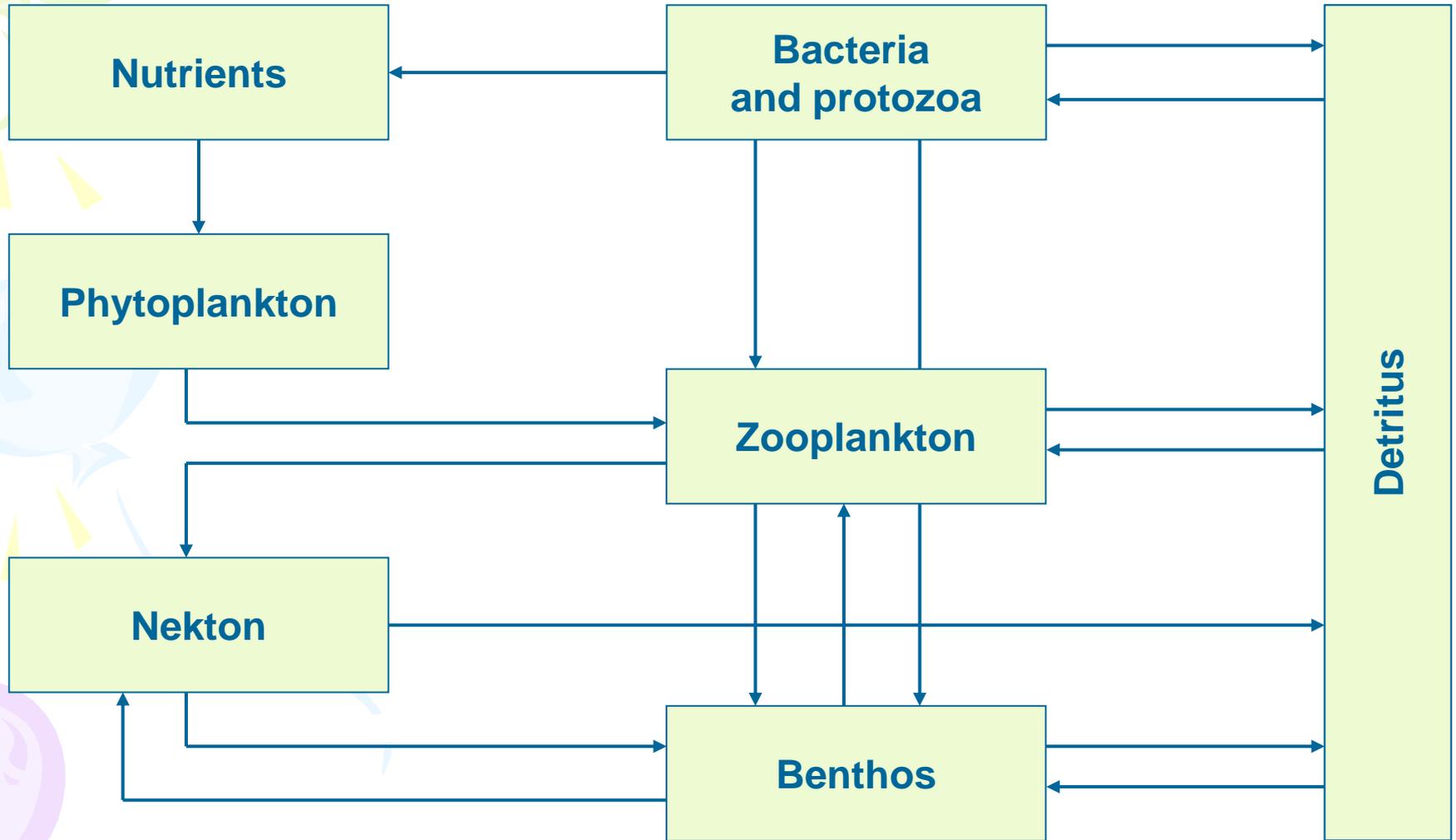
y - биомасса,

V_{ij} – трофические функции

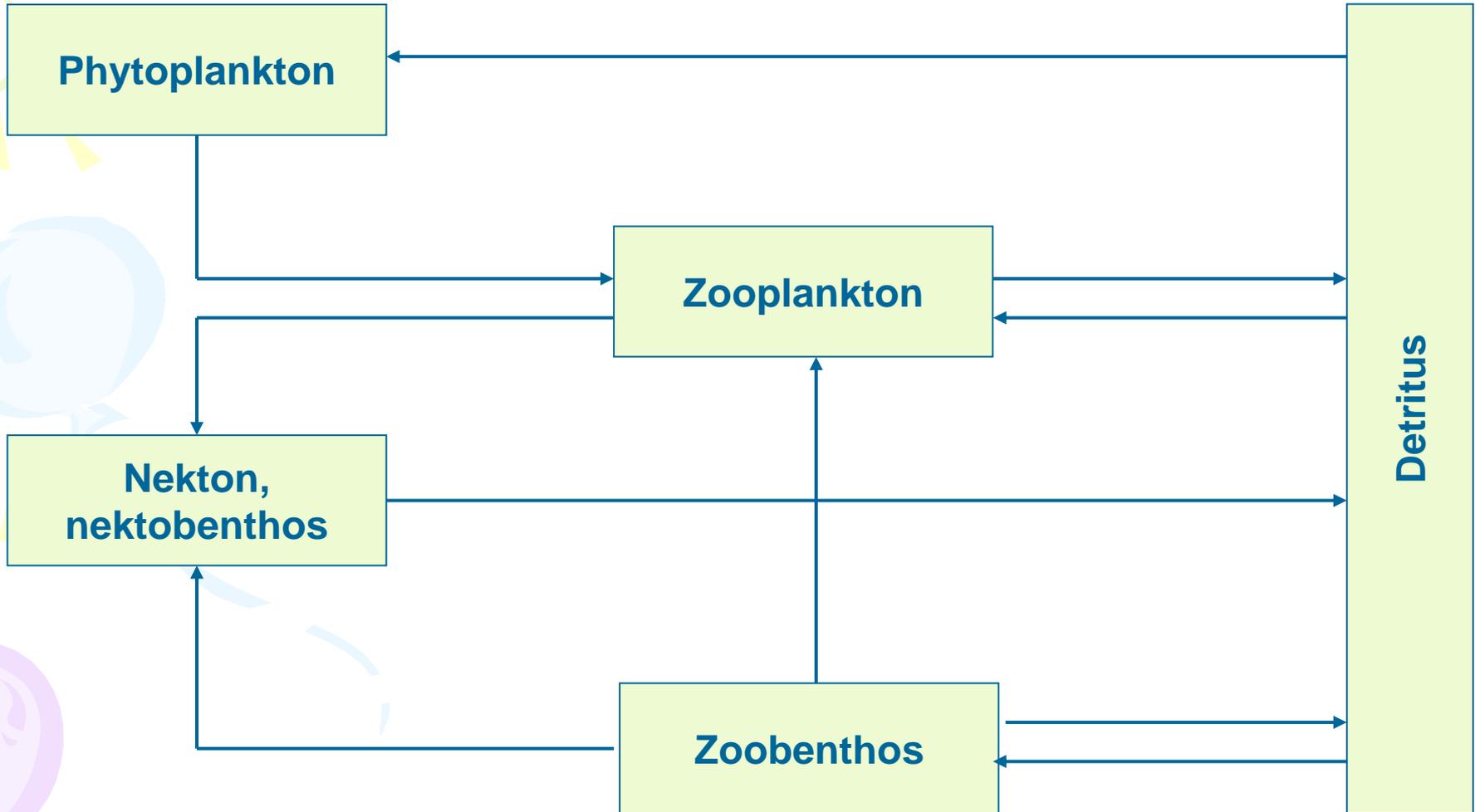
u_{ij} – доля усвоенной пищи, **k_{ij}** – ростовые коэффициенты

m_j – естественная смертность

7th—components model of the Bering Sea ecosystem



5th-components model of the Bering Sea ecosystem



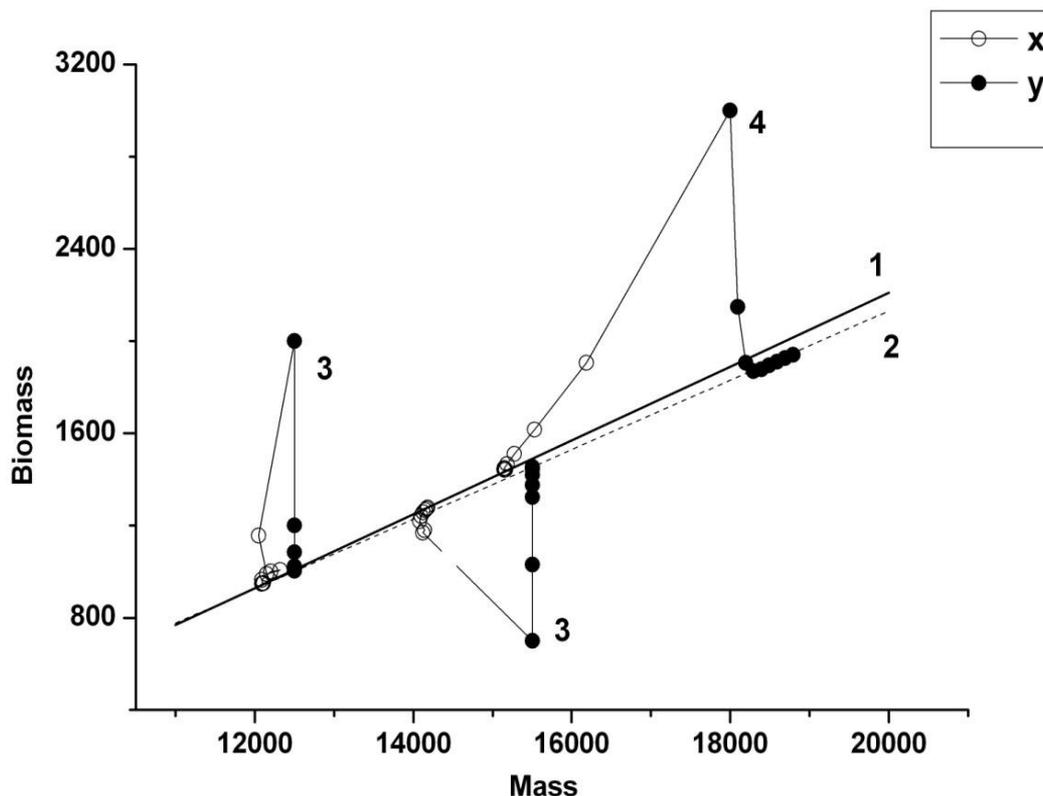
Равновесия

1 – equilibrium curve for 1-th model

2 – equilibrium curve for 2-th model

3 – curves for closed variants

4 – curves for unclosed variants



•Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. Многомодельный подход к исследованию водных экосистем // Известия Самарского научного центра РАН. 2009, т. 11, № 1(7), с. 1399 – 1402.

•Абакумов А.И., Пахт Е.В. Моделирование экологических систем в условиях неопределенности данных // Информатика и системы управления. 2009, №2 (20), с. 3 - 10.

Жизнедеятельность фитопланктона



Минеральное питание и температура

Базовая модель

$$\begin{cases} \dot{z} = r(s) - \sum_{j=1}^n \mu_j(z) y_j \\ \dot{y}_j = \mu_j(z) y_j - e_j(y) y_j \\ \dot{s} = \sum_{j=1}^n e_j(y) y_j - r(s) \end{cases}$$

$$\mu_j(z) = \mu_j^{(0)} \frac{z}{k_j + z}$$

Модели с внутриклеточным содержанием веществ

$$\begin{cases} \dot{z}_i = r_i(s_i) - \sum_{j=1}^n v_{ij}(z, q) y_j \\ \dot{y}_j = \mu_j(q) \cdot y_j - e_j(y) y_j \\ \dot{s}_i = \sum_{j=1}^n e_j(y) q_{ij} y_j - r_i(s_i) \\ \dot{q}_{ij} = v_{ij}(z, q) - \mu_j(q) \cdot q_{ij} \end{cases}$$

$$v_{ij}(z, q) = v_{ij}^{(m)}(q) \frac{z_i}{k_{ij} + z_i}$$

$$\mu_j(q) = \min_i \mu_{ij}(q_{ij})$$

Модель Друпа

$$v_{ij}^{(m)}(q) = v_{ij}^{(0)} \frac{\bar{q}_{ij} - q_{ij}}{\bar{q}_{ij} - \underline{q}_{ij}}$$

$$\mu_{ij}(q) = \mu_{ij}^{(0)} \frac{q_{ij} - \underline{q}_{ij}}{q_{ij}}$$

Модель со стехиометрией

$$v_{ij}^{(m)}(q) = v_j^{(0)} \frac{s_i^{(0)}}{q_{ij}} q_j \frac{(\bar{q}_j - q_j)}{\bar{q}_j}$$

$$q_j = \sum_{i=1}^m q_{ij} \quad \bar{q}_j = \sum_{i=1}^m \bar{q}_{ij}$$

$$\mu_{ij}(q) = \mu_{ij}^{(0)} \frac{q_{ij}}{q_{ij}^{(0)} + q_{ij}}$$

$$e_j(y) = e_j^{(0)} + e_j^{(1)}(y_j)$$

$$\theta(t) = \theta_0(t - t_1)^+(t_2 - t)^+$$

Будем предполагать, что функции $\mu_{ij}, v_{ij}, m_j, r_i$ определены и непрерывно дифференцируемы на множествах неотрицательных значений своих аргументов.

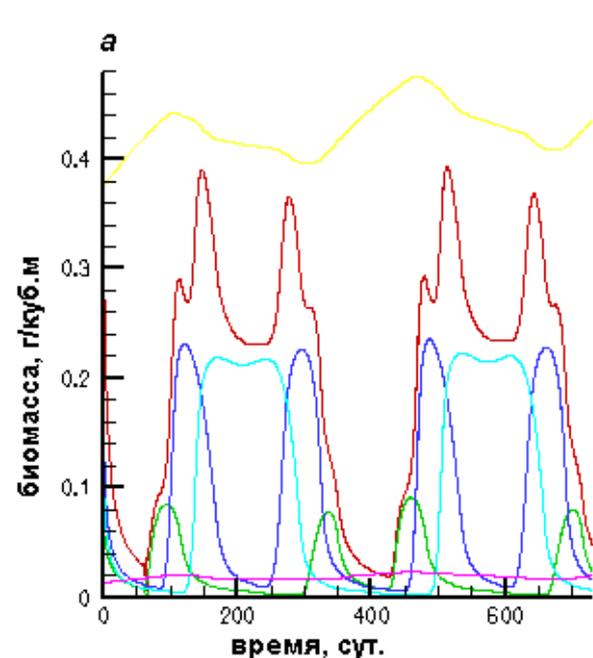
Пусть функции μ_{ij}, m_j, r_i строго возрастают по своим аргументам, а функции v_{ij} строго возрастают по z_i и строго убывают по q_{ij} .

Тогда модель с внутриклеточным содержанием веществ имеет непустое множество положительных равновесных решений, определяемых системой

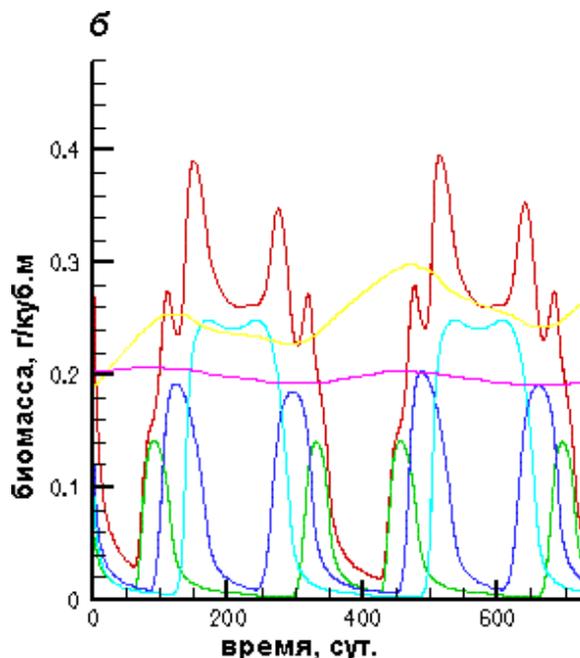
$$\begin{cases} z_i + \sum_{j=1}^n q_{ij} y_j + s_i = c_i \\ \mu_j(q_j) - e_j(y_j) = 0 \\ \sum_{j=1}^n e_j(y_j) q_{ij} y_j - r_i(s_i) = 0 \\ v_{ij}(z_i, q_{ij}) - \mu_j(q_j) \cdot q_{ij} = 0 \end{cases} \quad \mu_j(q_j) = \min_i \mu_{ij}(q_{ij})$$

координаты равновесий являются функциями вектора $c = (c_1, \dots, c_m)$ положительных параметров. В базовой модели соответствующие равновесия локально устойчивы. В модели с внутриклеточным содержанием устойчивость равновесий доказывается в ряде частных случаев.

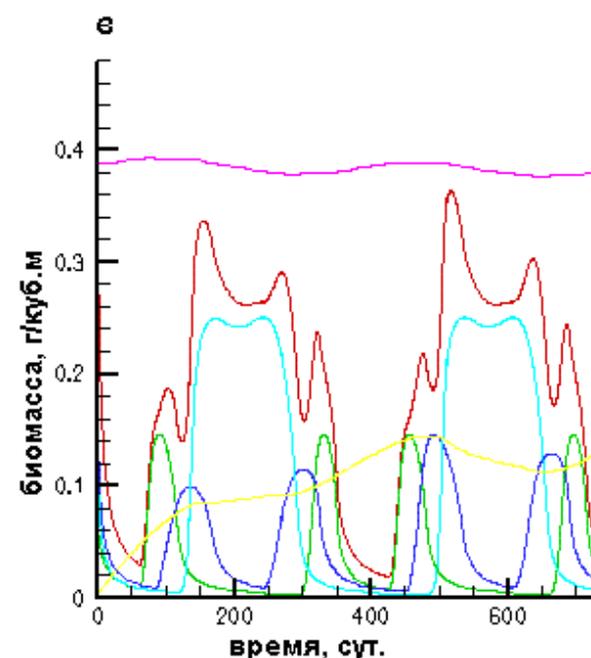
Динамика биомасс трех групп фитопланктонных организмов (модель Друпа)



а – преобладание азота во внешней среде



б – примерное равенство двух биогенов



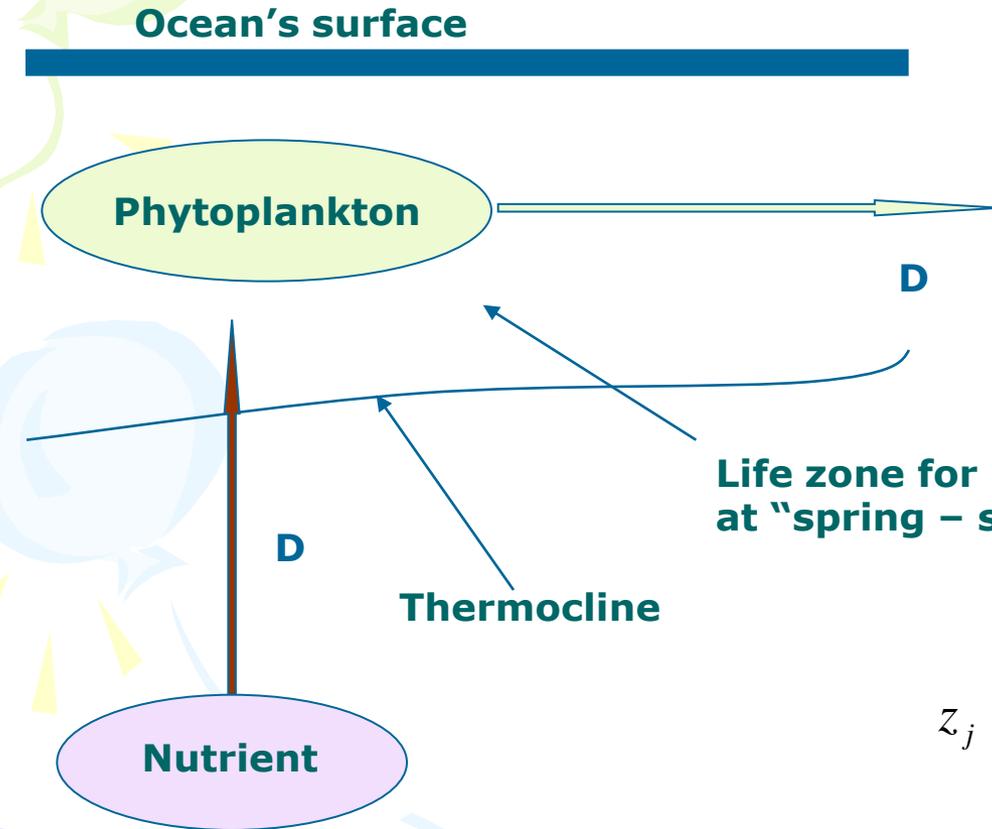
в – преобладание фосфора во внешней среде



- суммарная биомасса
- 1-ая группа видов
- 2-ая группа видов
- 3-ья группа видов
- азот
- фосфор

Проточные модели

(совместно с В.А.Силкиным, Л.А.Паутовой)



$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \left[\min_j \mu_{ij}(q_{ij}) - D \right] y_i \\ \frac{dz_j}{dt} = D(z_{j0} - z_j) - \sum_i v_{ij}(z_j, q_{ij}) y_i \\ \frac{dq_{ij}}{dt} = v_{ij}(z_j, q_{ij}) - q_{ij} \min_j \mu_{ij}(q_{ij}) \end{cases}$$

Life zone for phytoplankton
at "spring - summer - autumn" period

z_j - concentration of nutrient type,
g/m³

q_{ij} - concentration of nutrient type
in cells of phytoplankton species,
g/g wet mass

y_i - biomass concentration
of phytoplankton species, g/m³

i - index for phytoplankton species

j - index for nutrient type

Properties of solutions.

Proposition

Non-negative steady-state solution of basic model has the follow properties.

1. Common mass M_j of the substance j in equilibrium is $M_j^* = z_{j0}$.

The steady-state solution satisfy of the equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_j \mu_{ij}(q_{ij}) = D \text{ for } y_i > 0 \\ \sum_{i=1}^m q_{ij} y_i + z_j = z_{j0} \\ v_{ij}(z_j, q_{ij}) = \min_j \mu_{ij}(q_{ij}) \cdot q_{ij} \end{array} \right. \quad (*)$$

2. For each i exist j with condition $z_j^* \geq \bar{z}_{ij}$ when steady-state solution is stable.

3. The inequalities $z_j^* \leq \bar{z}_{ij}$ are right for some i and each j with equality $z_j^* = \bar{z}_{ij}$ for some j when inequality $y_i^* > 0$ is true.

Functions

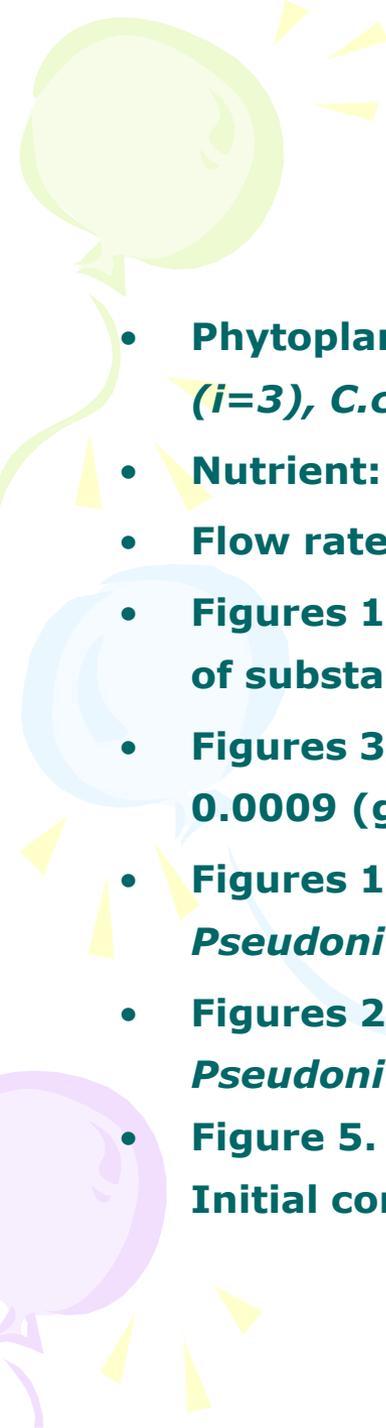
The functions $q_{ij} = \tilde{q}_{ij}(z_j)$ are defined from equilibrium conditions (*).

We define functions $\tilde{\mu}_{ij}(z_j) = \mu_{ij}(\tilde{q}_{ij}(z_j))$

and matrix $\bar{z} = (\bar{z}_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ with formulas $\bar{z}_{ij} = \tilde{\mu}_{ij}^{-1}(D)$.

We denote common mass $M_j = \sum_{i=1}^m q_{ij} y_i + z_j$ for substance j .





Modelling experiments for North-Eastern Part of Black Sea. Figures 1 – 5

- **Phytoplankton species:** *Emiliana* ($i=1$), *Pseudonitzschia* ($i=2$), *P.alata* ($i=3$), *C.curvisetus* ($i=4$).
- **Nutrient:** nitrogen N ($j=1$), phosphorus P ($j=2$).
- **Flow rate D** is 0.1 (1/day)
- **Figures 1, 2.** Initial concentration of substance on base nitrogen N is 0.002, of substance on base phosphorus P is 0.0009 (g/m³).
- **Figures 3, 4.** Initial concentration of nitrogen N is 0.024, of phosphorus P is 0.0009 (g/m³).
- **Figures 1, 3.** Initial concentration of phytoplankton: *Emiliana*, *Pseudonitzschia* - 0.2, *P.alata*, *C.curvisetus* - 0.001 (g/m³).
- **Figures 2, 4.** Initial concentration of phytoplankton: *Emiliana*, *Pseudonitzschia*, *P.alata*, *C.curvisetus* - 0.2 (g/m³).
- **Figure 5.** Recurrent (one during one weeks) wind-wave mixing results. Initial concentrations are as fig. 3.

Values of the model's parameters

Coefficients		Species			
		<i>Emiliana huxleyi</i>	<i>Pseudonitzschia pseudo-delicatissima</i>	<i>Proboscia alata</i>	<i>Chaetoceros curvisetus</i>
$q_{p_{max}}/q_p$		30.0	50.0	70.0	40.0
$q_{N_{max}}/q_N$		4.5	4.0	8.0	3.0
$\mu_{max} NO_3$	day ⁻¹	1.92	2.70	1.44	3.75
$\mu_{max} PO_4$	day ⁻¹	1.55	1.84	1.22	2.56
$K NO_3$	g/m ³	0.00140	0.01000	0.02000	0.01000
$v^m NO_3$	g N/(day·g wet mass)	0.00053	0.00108	0.00168	0.00100
$K PO_4$	g/m ³	0.03600	0.01600	0.02700	0.03000
$v^m PO_4$	g P/(day·g wet mass)	0.00450	0.01800	0.01680	0.02000
q_N	g N/g wet mass	0.00150	0.00300	0.00300	0.00300
q_P	g P/g wet mass	0.00010	0.00020	0.00020	0.00020

Mass dynamics of phytoplankton's species

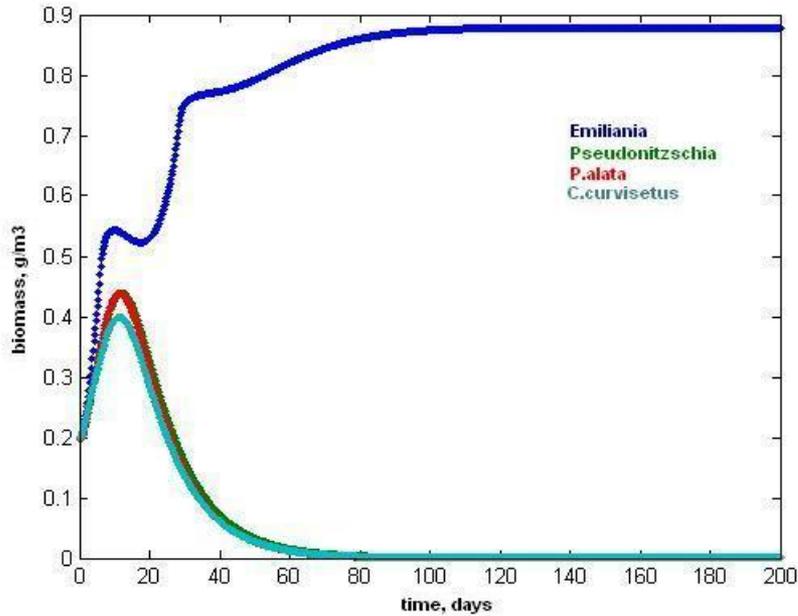


Fig. 1. Initial concentration of nutrients:
N - 0.002, P - 0.0009 (g/m³)
Initial concentration of phytoplankton:
Emiliana, *Pseudonitzschia*,
P.alata, *C.curvisetus* - 0.2 (g/m³)

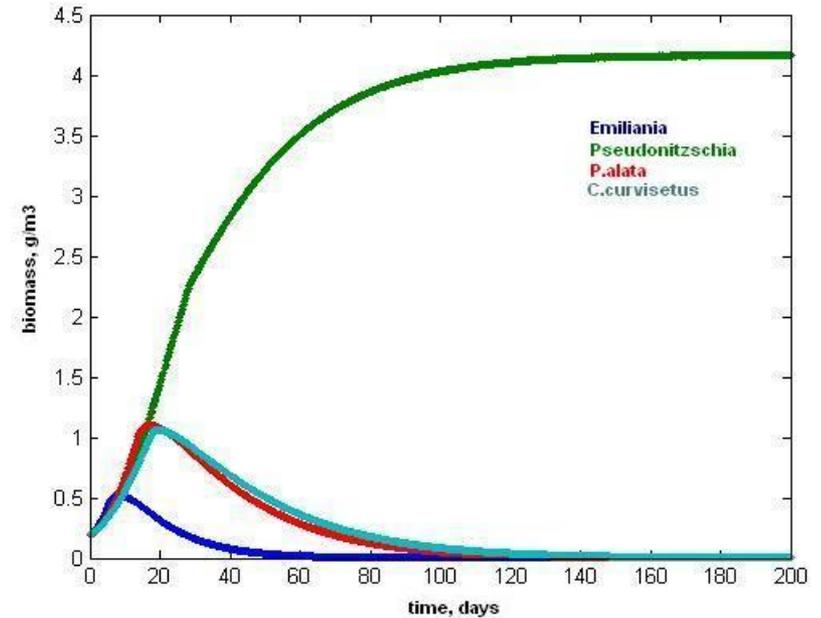


Fig. 2. Initial concentration of nutrients: N -
0.024, P - 0.0009 (g/m³)
Initial concentration of phytoplankton:
Emiliana, *Pseudonitzschia*,
P.alata, *C.curvisetus* - 0.2 (g/m³)

Mass dynamics of phytoplankton's species

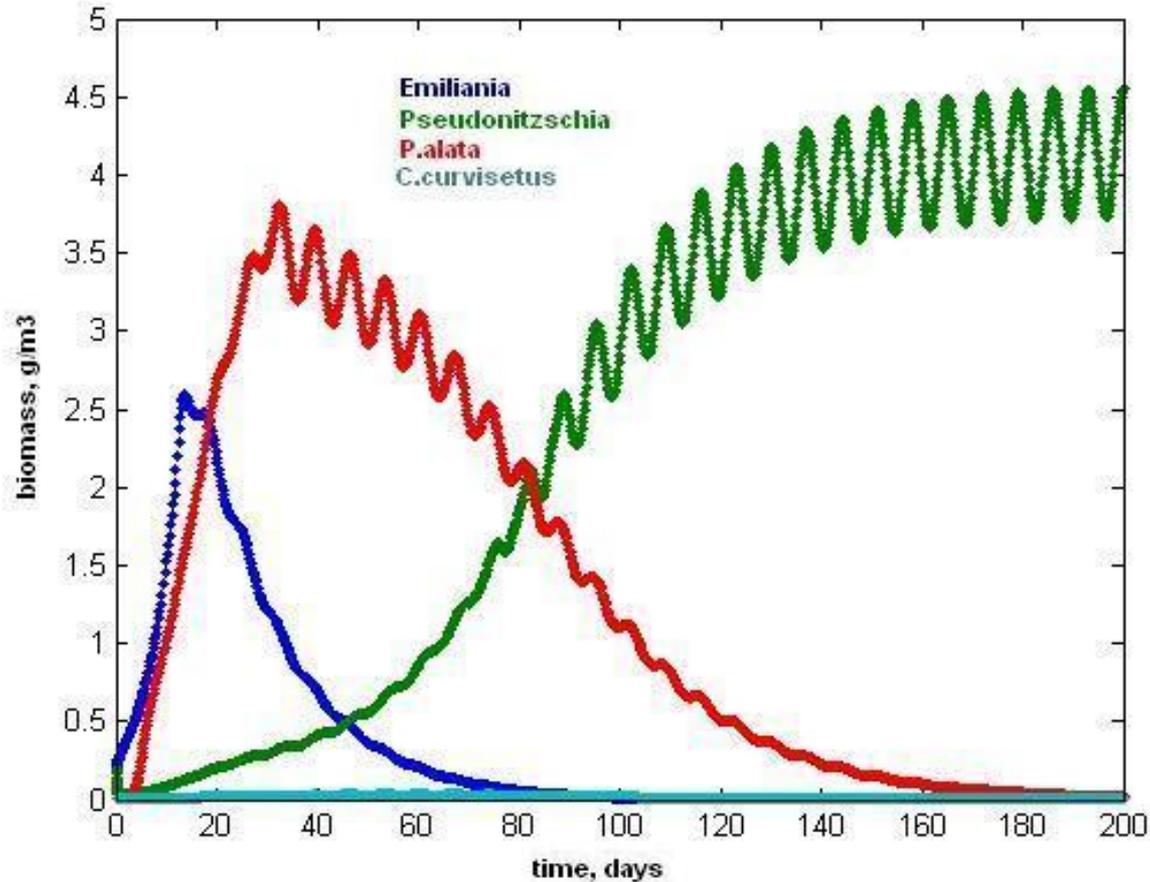
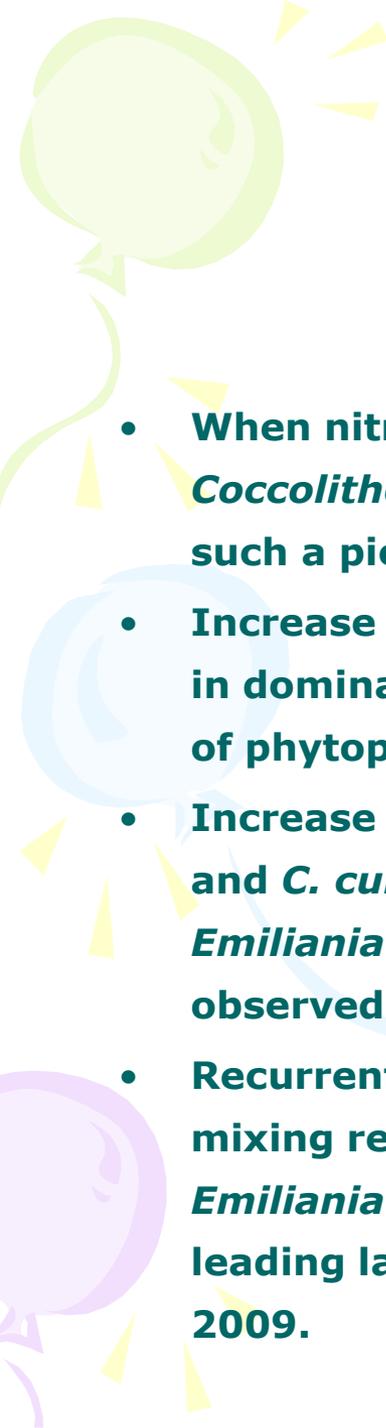


Fig. 5. Initial concentration of nutrients: N - 0.024, P - 0.0009 (g/m³) with periodic influence. Initial concentration of phytoplankton: *Emiliana*, *Pseudonitzschia* - 0.2, *P.alata*, *C.curvisetus* - 0.001 (g/m³)



Conclusion.

Modelling experiments and observe in North-Eastern Part of Black Sea

- When nitrogen concentration is low (less than 0.002 g/m³) *Coccolithophores Emiliana* win the competition (fig. 1, 2). We observed such a picture in spring and in the beginning of summer 2004 - 2006.
- Increase of nitrogen concentration results in appearance of *Pseudonitzschia* in dominating complex (fig. 3, 4). This species is present in leading complex of phytoplankton community in late summer and autumn period.
- Increase of initial concentration of phytoplankton gives a chance for *P. alata* and *C. curvisetus* to be leading species, and then the leadership passes to *Emiliana* or *Pseudonitzschia* (fig. 2, 4). Such a structure of community was observed on shelf in May-June, 2007.
- Recurrent (one during one weeks, or two during two weeks) wind-wave mixing results in a complex structure of phytoplankton: *Coccolithophores Emiliana* is in the lead at the first stage; *P. alata* and *Pseudonitzschia* are leading later (Fig. 5). We observed such a succession in spring and summer, 2009.

Распределение фитопланктона в столбе воды

(совместно с к.т.н. Ю.Г.Израильским)

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} = k_i^{(y)} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} + \mu_i(t, x, z, I) y_i - e_i(y) y_i \\ \frac{\partial z}{\partial t} = k^{(z)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^n \mu_i(t, x, z, I) y_i + \sum_{i=1}^m \beta_i e_i(y) y_i \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\alpha(t, x, y, z) I \end{cases}$$

$$\mu_i(t, x, z, I) = \mu_i^{(0)} \cdot \mu_i^{(z)}(z) \cdot \mu^{(I)}(I) \cdot \mu_i^{(\theta)}(\theta(t, x))$$

$$\mu_i^{(z)}(z) = \frac{z}{z_i^{(0)} + z}$$

$$\mu^{(I)}(I) = I \exp(-\delta I)$$

$$\mu_i^{(\theta)}(\theta) = \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_i^{(0)})^2}{2\tau_i^2}\right)$$

$$e_i(y) = e_{i0} + e_{i1} y$$

$$\alpha(t, x, y, z) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_{i1} y_i + \alpha_2 z$$

Годовой цикл

$$\theta(t, x) = \theta_1(t) \exp\left(-\frac{(x - x^{(\theta)}(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right)$$

$$x^{(\theta)}(t) = x_0^{(\theta)} + 4(x_1^{(\theta)} - x_0^{(\theta)}) \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$\theta_1(t) = 4 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 / \left[4 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \gamma\right]$$

$$I(t, 0) = 4I_1 \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) + I_0$$

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

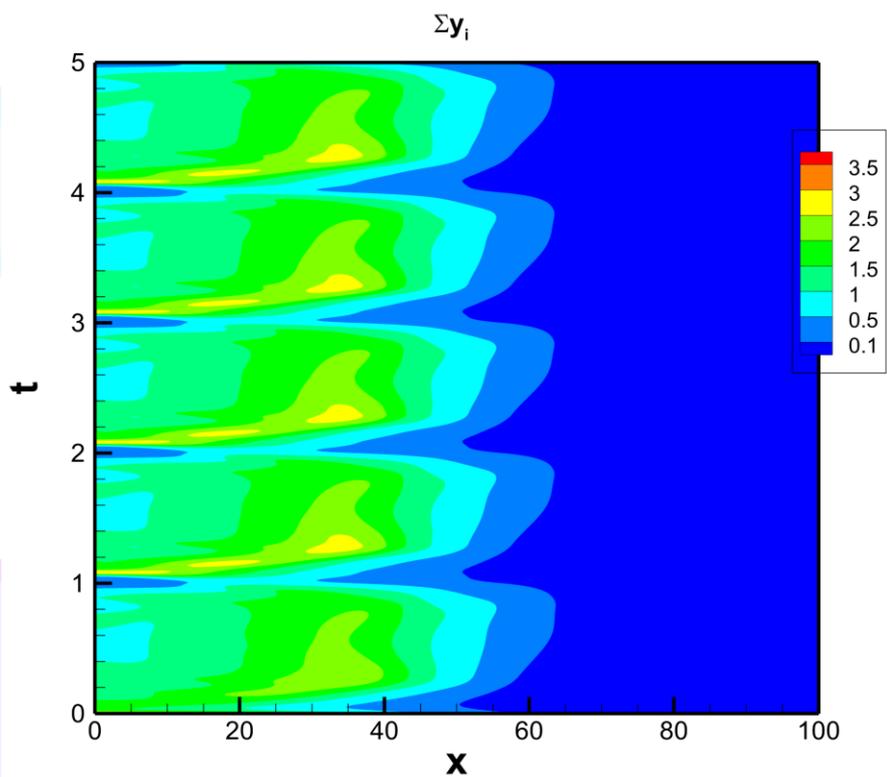
$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} = 0$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

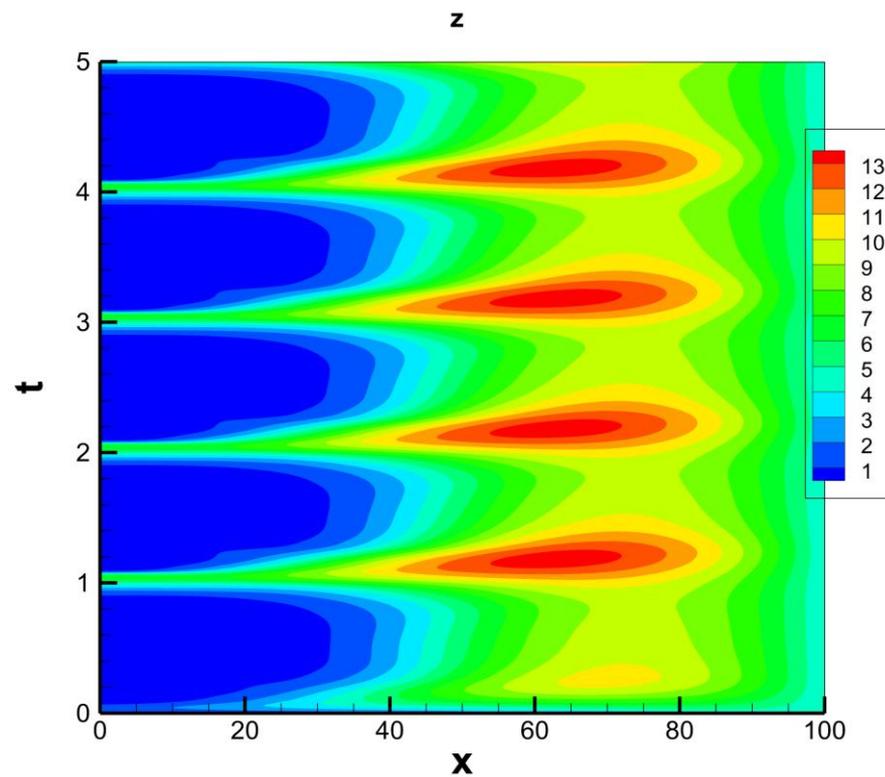
$$z_j(t, \bar{x}) = \tilde{z}_j$$

Три вида планктона

Плотность общей биомассы



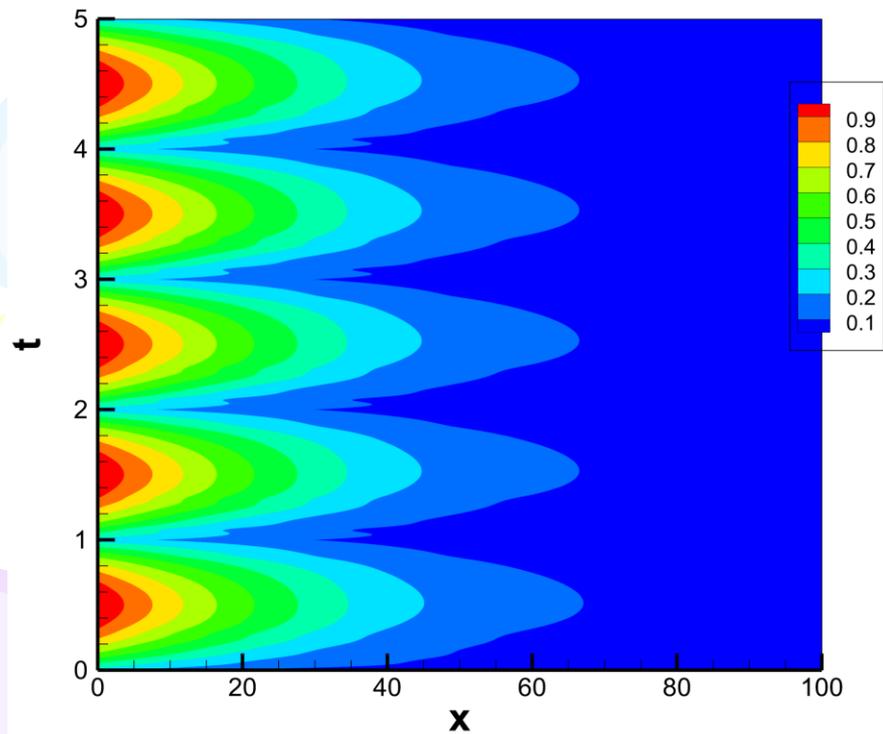
Питательные вещества



Условия среды

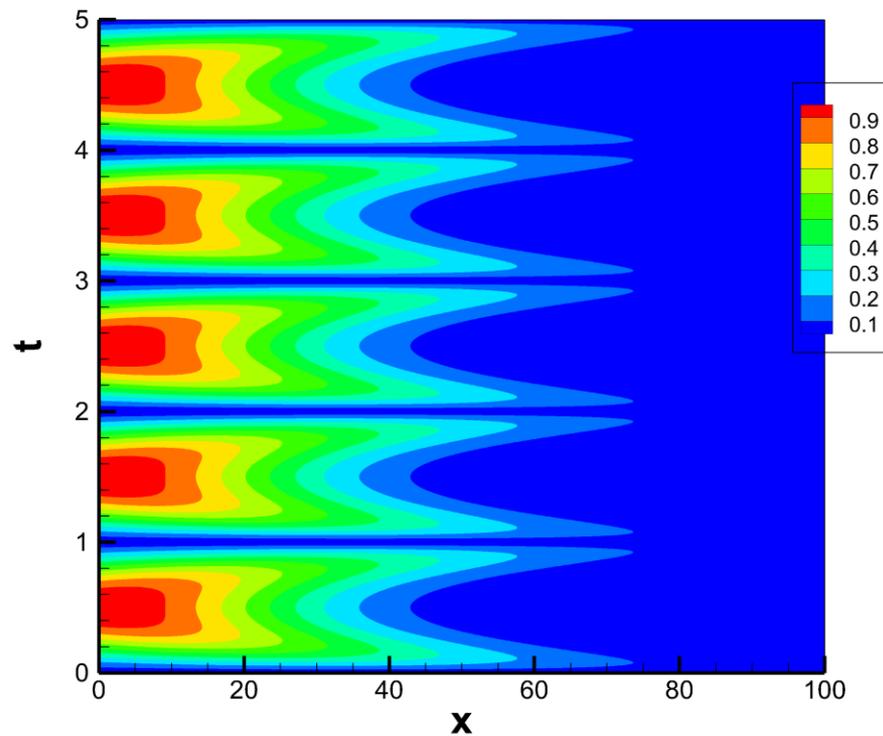
Освещенность

I



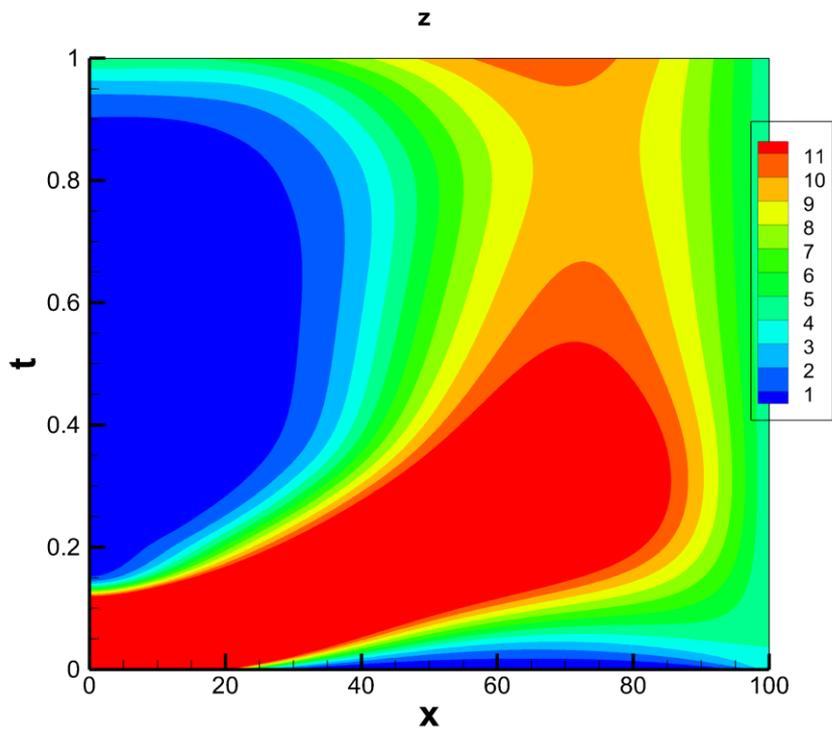
Температура

θ

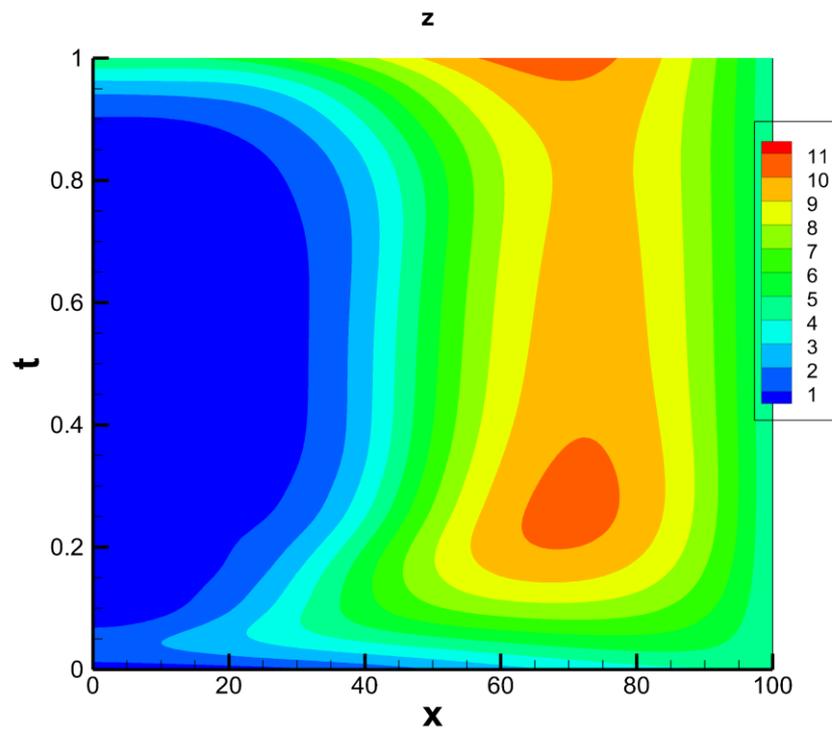


Питательные вещества

Артефакт

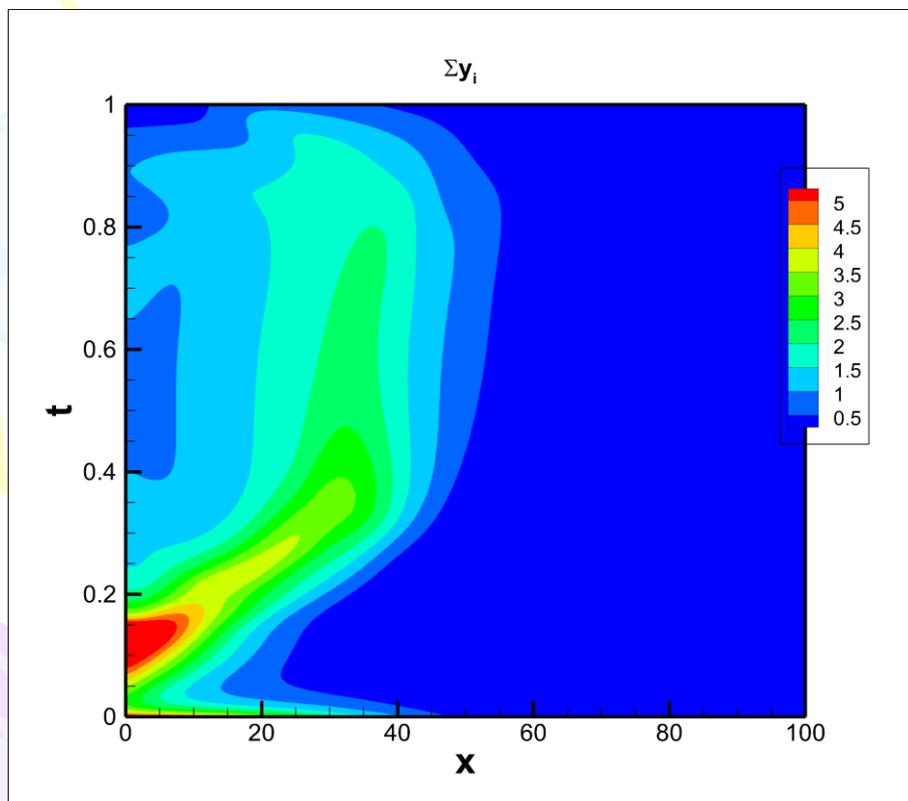


Норма

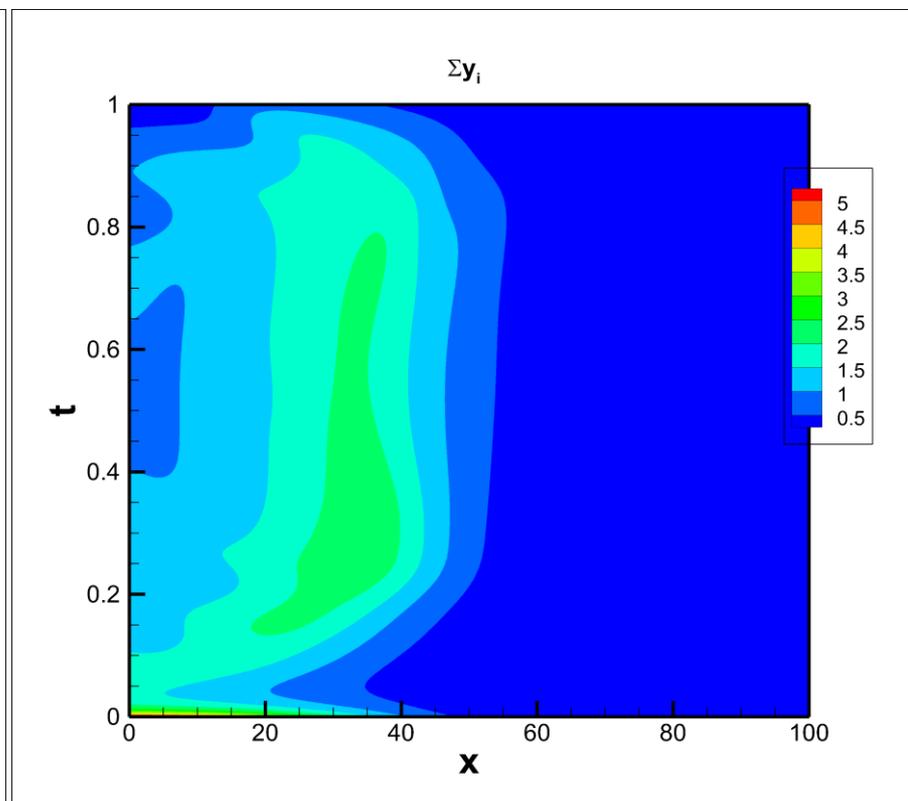


Общее содержание

Артефакт



Норма



Оптимальный сбор урожая в популяции

(совместно с к.т.н. Ю.Г.Израильским)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T \times D} \varphi(t, x, u, y) dt dx \rightarrow \max_{u \in U} \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (vy) = \Delta(y) + F(t, x, u, y) \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y(t, x)|_{x \in \partial D} = y_1(t, x) \end{array} \right.$$

$$\Delta(y) = \nabla \cdot (k \cdot \nabla y)$$

Условия

- Область изменения пространственной переменной предполагается замкнутым и ограниченным односвязным множеством $D \subset R^m$ с гладкой границей ∂D . Множество U возможных функций управления предполагается выпуклым и замкнутым.
- Все заданные и искомые функции непрерывны и обладают гладкостью необходимого порядка.
- Для каждого допустимого управления u дифференциальное уравнение (1) с условиями (2) имеет единственное решение $y(t, x)$, причем функция y локально липшицева по переменной u , то есть в каждой окрестности непрерывной допустимой функции u выполняется условие Липшица: $\|\delta y\| \leq M \cdot \|\delta u\|$ при некоторой константе M для этой окрестности. Под δy понимается приращение функции y , вызванное заданным допустимым приращением δu функции u .
- Функция φ строго вогнута по u , а функция F линейна по u при всех t, x, y .

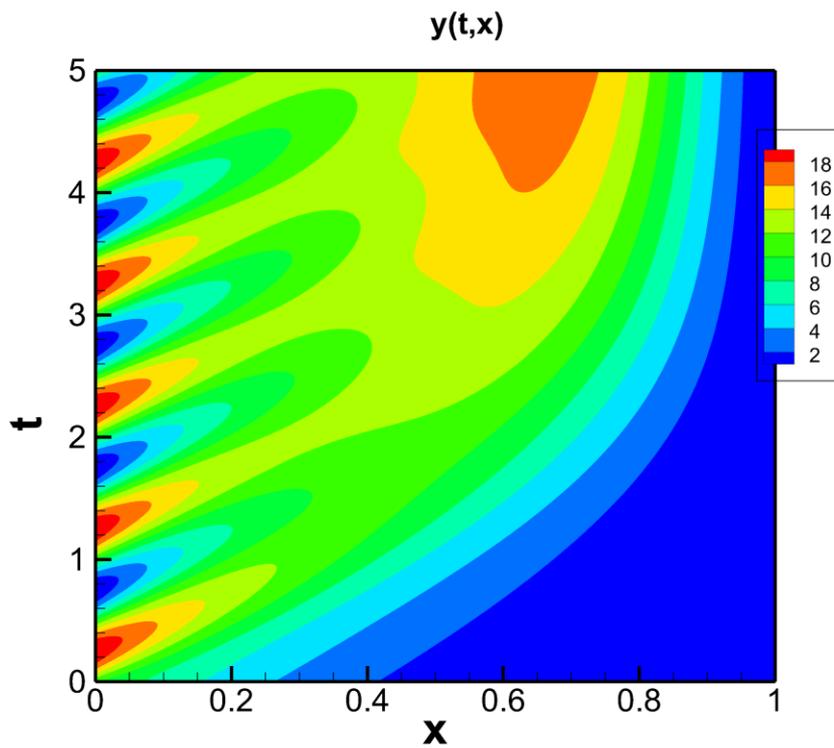
Система оптимальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \cdot (v y) = \Delta(y) + F(t, x, \hat{u}, y) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + v \cdot (\nabla \lambda) + \Delta(\lambda) = - \frac{\partial L(t, x, \hat{u}, y, \lambda)}{\partial y} \\ y(0, x) = y_0(x), y(t, x) \Big|_{x \in \partial D} = y_1(t, x) \\ \lambda(T, x) = 0, \lambda(t, x) \Big|_{x \in \partial D} = 0 \\ \hat{u}(t, x) = \underset{u \in U}{\operatorname{arg\,max}} L(t, x, u, y, \lambda) \end{array} \right.$$

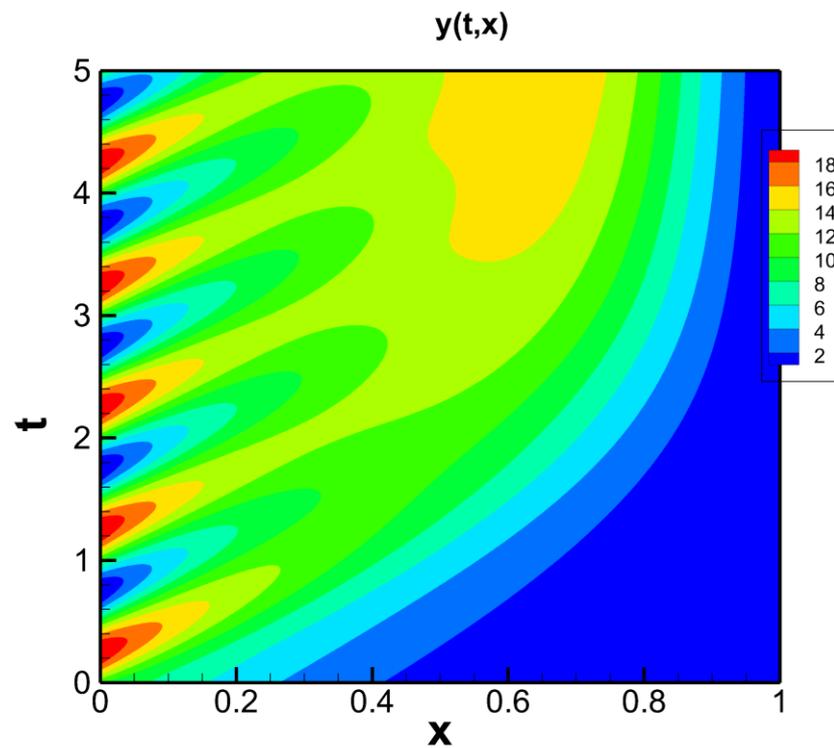
$$L(t, x, u, y, \lambda) = \varphi(t, x, u, y) + \lambda(t, x) F(t, x, u, y)$$

Биомасса популяции

Без урожая

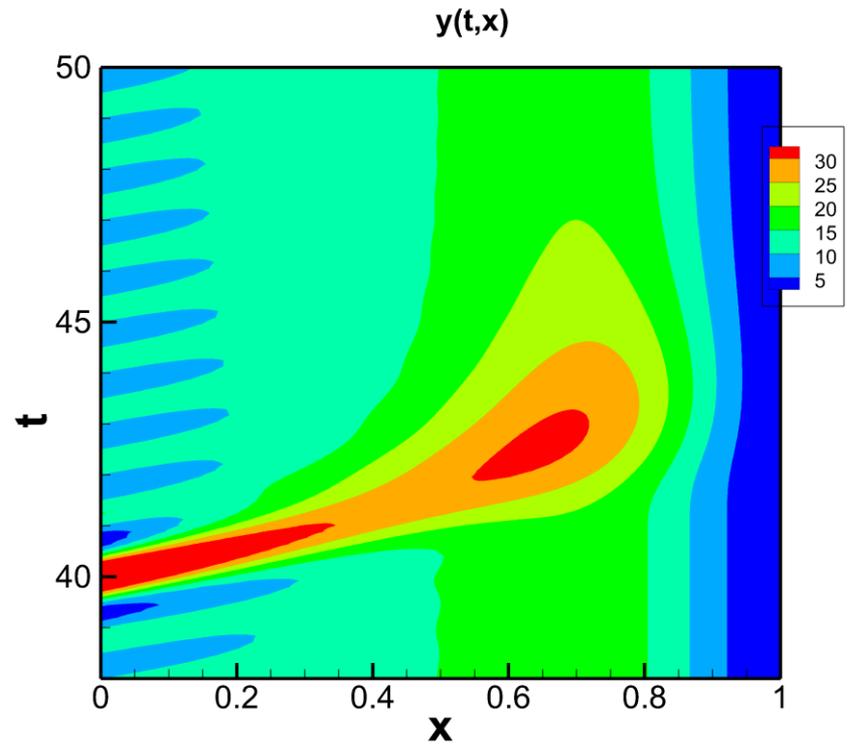
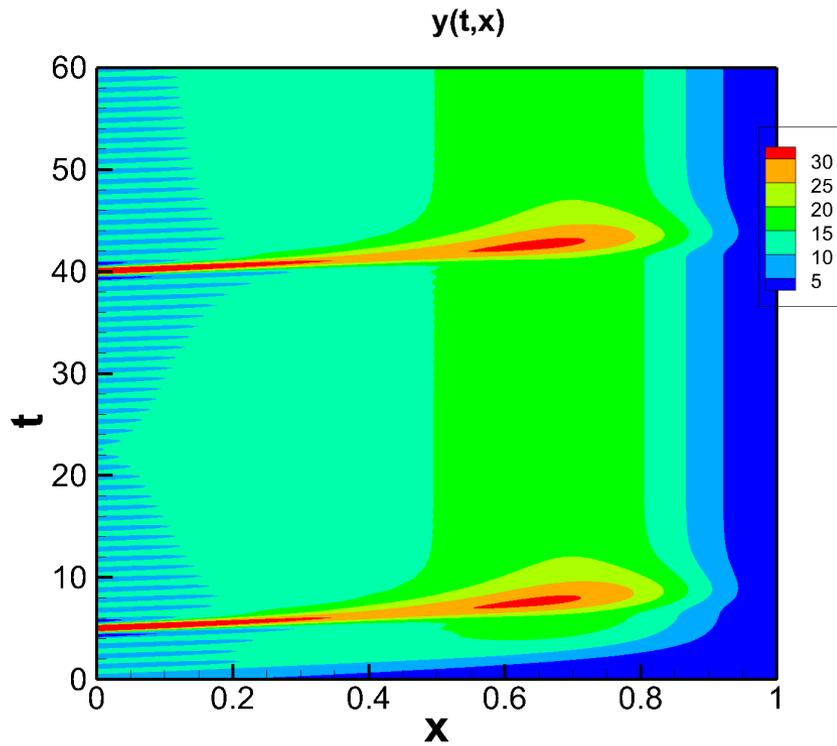


С урожаем



Вспышка численности

Без урожая

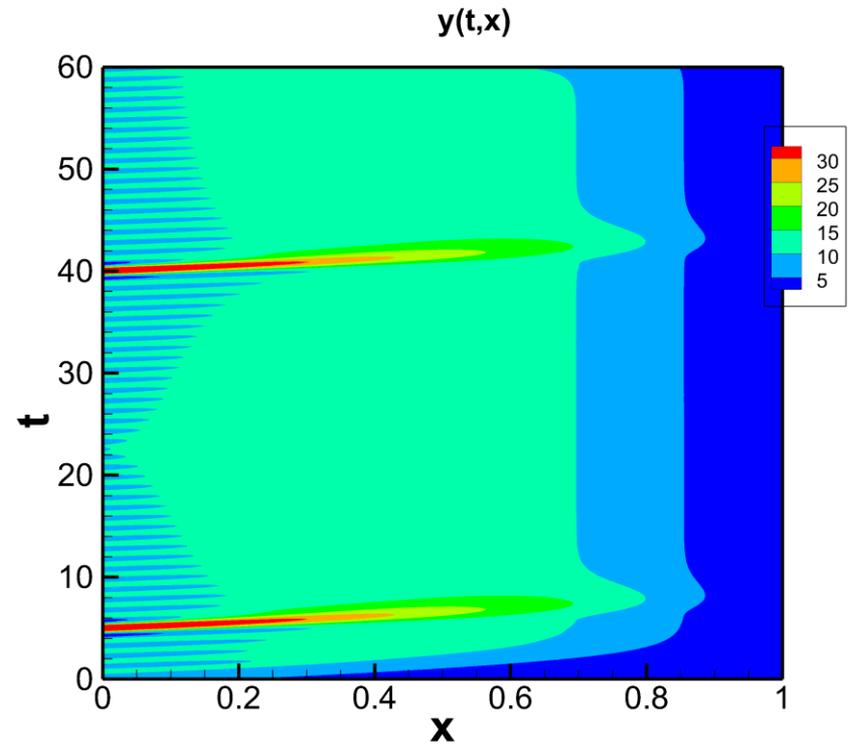
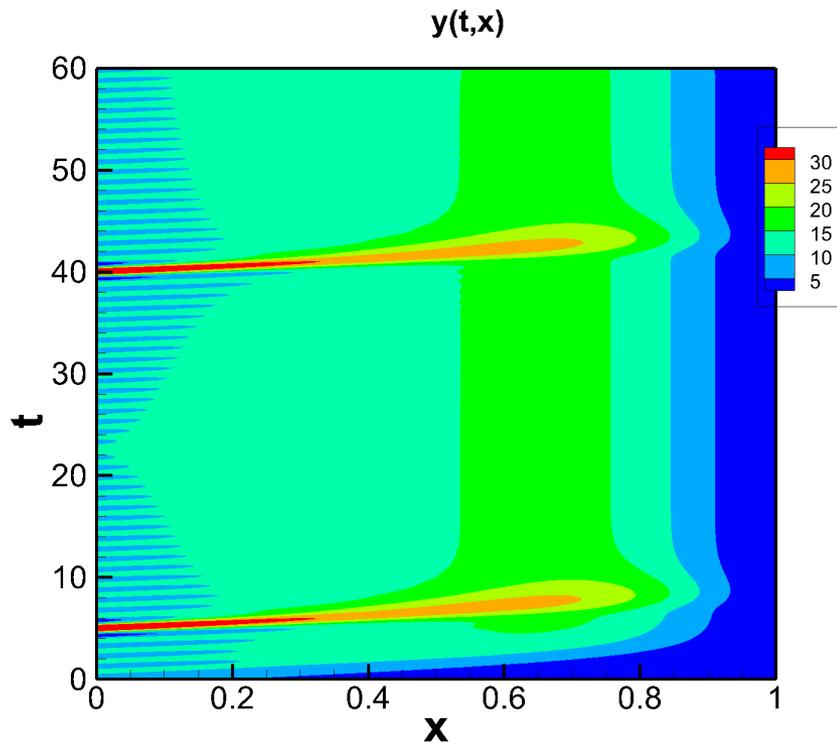


Вспышка численности

С урожаем

$\rho=4$

$\rho=40$



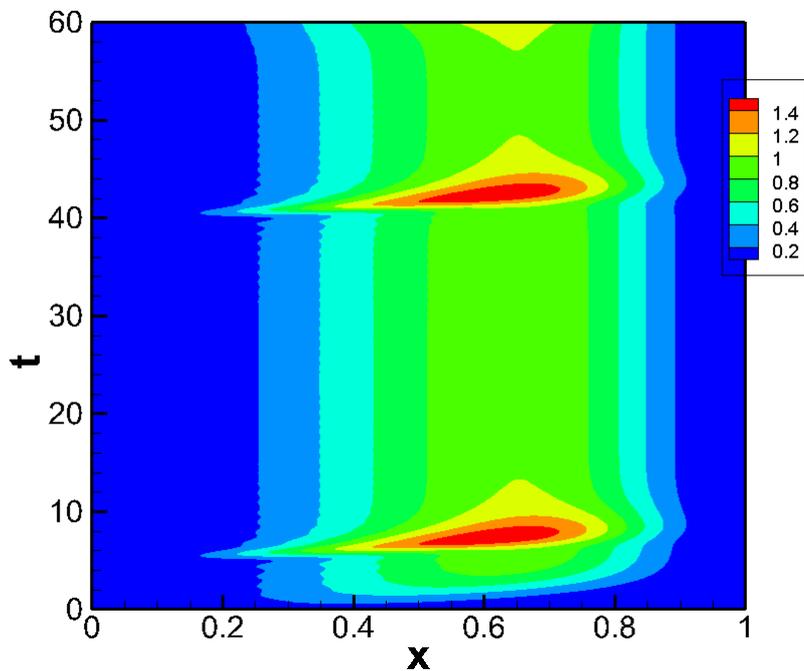
Вспышка численности

Управление – интенсивность сбора урожая

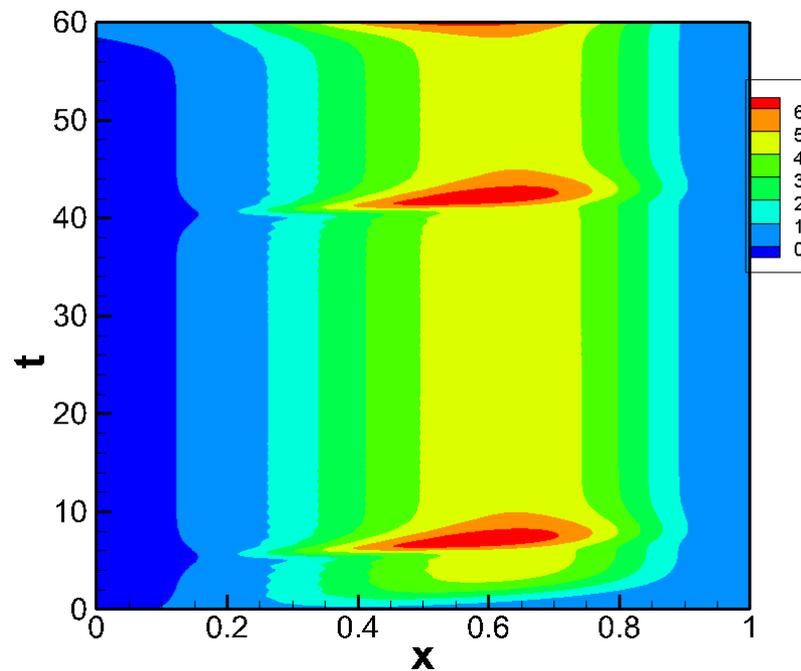
$\rho=4$

$\rho=40$

$u(t,x)$



$u(t,x)$



Спасибо за внимание!