Shape sensitivity analysis for a body with a crack and a rigid inclusion*

Е.М. Рудой
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
e-mail: `rem@hydro.nsc.ru`

Рассматривается смешанная краевая задача для уравнений двумерной теории упругости в области с разрезом. На разрезе заданы условия одностороннего ограничения. Кроме того, предполагается, что на части области решение принадлежит пространству жестких перемещений, т.е. имеет заданную структуру. Для общего вида достаточно гладкого возмущения области получена производная интеграла энергии по параметру возмущения.

Введение. Рассматривается смешанная краевая задача для уравнений двумерной теории упругости в области с разрезом. На внешней границе области заданы однородные условия Дирихле; на разрезе — условия одностороннего ограничения (условия непроникания [1]). Кроме того, в некоторой подобласти ω_0 исходной области решение имеет заданную структуру, а именно, является функцией жестких перемещений.

Задача формулируется в вариационном виде — в виде минимизации функционала энергии на некотором множестве допустимых функций, которые удовлетворяют условию непроникания на разрезе и их сужение на ω_0 является жестким перемещением в ω_0.

Основная цель работы — вывести производную интеграла энергии по форме области. Для этого вводится общее возмущение области, зависящее от малого параметра ε. В возмущенной области определятся интеграл энергии, также зависящий от ε. Затем вычисляется его производная по ε при $\varepsilon = 0$.

В работе [2] впервые в точной математической постановке исследовалась задача о равновесии упругого тела с жестким включением и трещиной. Для линейных краевых условий на разрезе в [3] были получены производные по форме области в двумерной теории упругости, а в [4] для бигармонического уравнения выведена производная интеграла энергии по длине прямолинейного разреза и показано, что такая производная представима в виде инвариантного интеграла по незамкнутой кривой.

Полученные в настоящей работе результаты могут применяться в задачах оптимизации форм упругих тел с жесткими включениями и трещинами, в которых в качестве функционала стоимости выступает интеграл энергии.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, ω_0 – подобласть области Ω с гладкой границей $\partial\omega_0$ такая, что $\overline{\omega} \subset \Omega$. Пусть $\partial\omega_0$ состоит из двух частей γ_0 и $\partial\omega_0 \setminus \overline{\gamma}_0$, причем γ_0 – кривая без самопересечений класса $C^{1,1}_{loc}(R^2)$, в каждой точке которой определен вектор единичной нормали.

Через ν_0 обозначим единичную внешнюю нормаль к ω_0, а через n – внешнюю единичную нормаль к Ω.

Пусть

$$R(\omega_0) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2)^t \mid \rho(x_1, x_2) = Bx + C,\ x = (x_1, x_2)^t \in \omega_0\}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

— пространство жестких перемещений, где B и C— произвольные кососимметрическая матрица и постоянный вектор:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}, \; b, c^1, c^2 \in R;$$

^{t} обозначает операцию транспонирования.

Пусть $U = (u_1, u_2)^t$ – вектор-столбец перемещений точек тела Ω_0. Будем считать, что в области $\Omega \setminus \overline{\omega}_0$ выполнен линейный закон Гука, связывающий между собой тензоры деформаций $\{\varepsilon_{ij}(U)\}$ и напряжений $\{\sigma_{ij}(U)\}$:

$$\varepsilon_{ij}(U) = 1/2\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U),$$

где c_{ijkl} – компоненты симметричного и положительно определенного тензора упругости, которые удовлетворяют условиям

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} = \mathrm{const}$$

$$c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \xi \in R^2 \times R^2 : \; \xi_{ij} = \xi_{ji}, \, c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Нижние индексы после запятой обозначают операцию дифференцирования по соответствующей координате; по повторяющимся индексам производится суммирование.

В области $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\gamma}_0$ сформулируем следующую нелинейную смешанную краевую задачу:

$$-\sigma_{ij,j}(U_0) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega\backslash\overline{\omega}_0, \; (i = 1, 2) \tag{1}$$

$$u_{01} = u_{02} = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

$$U_0 = B_0x + C_0 \quad \text{п.в. в} \quad \omega_0, \tag{3}$$

$$[U_0^t]\nu_0 \geq 0 \quad \text{п.в. на} \quad \gamma_0, \tag{4}$$

$$\sigma_\tau(U_0) = 0, \; \sigma_{\nu_0}(U_0) \leq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{5}$$

$$\sigma_{\nu_0}(U_0)[U_0^t]\nu_0 = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{6}$$

$$-\langle \sigma(U_0)\nu_0, \rho\rangle_{1/2,\partial\omega_0} = \int\limits_{\omega_0} F^t\rho\, dx \quad \forall \rho \in R(\omega_0). \tag{7}$$

Здесь $\sigma_{\nu_0}(U_0) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0i}\nu_{0j}$, $\sigma_{\tau i}(U_0) = \sigma_{ij}(U_0)\nu_{0j} - \sigma_{\nu_0}(U_0)\nu_{0i}$, $i = 1, 2$; $F^t = (f_1, f_2) \in \{C^1(R^2)\}^2$ – заданный вектор; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,\partial\omega_0}$ обозначает двойственность между $H^{1/2}(\partial\omega_0)$ и $H^{-1/2}(\partial\omega_0)$; скобки $[\cdot]$ обозначают скачок функции на разрезе γ_0.

Дифференциальные уравнения (1) и краевые условия (2)-(7) описывают равновесие пластины с жестким включением ω_0 и трещиной γ_0, появившейся в результате отслоения включения от упругой части тела. При этом (4) обеспечивает условие непроникания берегов трещины друг в друга. Отметим, что (1) выполняются в смысле распределений, а условия (5), (6) — в смысле двойственности пространств $H^{1/2}(\gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\gamma_0)$ [1, 5].

Задачу (1)-(7) будем формулировать в вариационном виде. Для этого определим функциональное пространство

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0) \mid v = 0 \text{ п.в. на } \partial\Omega\}$$

и положим

$$H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0).$$

Введем множество допустимых смещений

$$K_0(\Omega_0) = \{U \in H(\Omega_0) \mid U \in R(\omega_0),\ [U^t]\nu_0 \geq 0 \text{ п.в. на } \gamma_0\}.$$

Включение $U \in R(\omega_0)$ означает, что сужение функции U на область ω_0 принадлежит пространству жестких перемещений $R(\omega_0)$.

Наконец, определим функционал потенциальной энергии

$$\Pi(\Omega_0; U) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)dx - \int\limits_{\Omega_0} F^t U dx.$$

Тогда задача (1)-(7) эквивалентна следующей задаче минимизации: найти такую функцию $U_0 \in K_0(\Omega_0)$, которая доставляет минимум функционалу $\Pi(\Omega_0; U)$ на множестве $K_0(\Omega_0)$, т.е.

$$\Pi(\Omega_0; U_0) = \inf_{U \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; U). \tag{8}$$

Известно, что задача (8) имеет единственное решение и удовлетворяет вариационному неравенству [1,2]

$$\int\limits_{\Omega \setminus \overline{\omega}_0} \sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U - U_0)dx \geq \int\limits_{\Omega_0} F^t(U - U_0)dx \quad \forall U \in K_0(\Omega_0), \tag{9}$$

из которого выводятся дифференциальные уравнения и краевые условия (1)-(7).

Далее, определим возмущенную задачу. Для малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, ($\varepsilon_0 = const$), рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon = (\Phi_{\varepsilon 1}(x), \Phi_{\varepsilon 2}(x))$, которое задается функциями $\Phi_{\varepsilon i} \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{2,\infty}(R^2))$ $(i = 1, 2)$ и $\Phi_0(x) = x$. Зафиксируем $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ и применим координатное преобразование

$$y = \Phi_\varepsilon(x) \tag{10}$$

к области Ω. В результате получим возмущенную область $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega)$ с жестким включением $\omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\omega_0)$, трещиной $\gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\gamma_0)$. Будем считать, что преобразование (10) является взаимно однозначным, т.е. существует $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1} = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}, \Phi_{\varepsilon 2}^{-1})$ и, кроме того, имеют место включения $\Phi_{\varepsilon i}^{-1} \in C^1([0, \varepsilon_0); W^{2,\infty}(R^2))$ $(i = 1, 2)$. В этом случае $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon \subset \partial\omega_\varepsilon$.

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Преобразование (10) задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ [6], т.е. если функция $U(x) \in H(\Omega_0)$, то $U(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)) \in H(\Omega_\varepsilon)$, и, наоборот, если $U(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $U(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$.

Пусть ν^ε – единичный вектор нормали к возмущенному разрезу γ_ε. Определим множество допустимых смещений для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{U \in H(\Omega_\varepsilon) \mid U \in R(\omega_\varepsilon),\ [U^t]\nu^\varepsilon \geq 0 \text{ п.в. на } \gamma_\varepsilon\}.$$

Как и ранее, включение $U \in R(\omega_\varepsilon)$ означает, что сужение функции U на область ω_ε принадлежит пространству жестких перемещений $R(\omega_\varepsilon)$.

Важно отметить, что, в то время, как между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ есть взаимно однозначное соответствие при действии отображения (10), множество допустимых смещений $K_0(\Omega_0)$ не переходит во множество допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ возмущенной задачи. Даже для прямолинейного разреза такого соответствия нет [4,7]. Это связано, во-первых, с тем, что единичная нормаль к γ_0 не отображается в единичную нормаль к возмущенному разрезу γ_ε. Во-вторых, как будет показано ниже, структура функций из пространства жестких перемещений $R(\omega_0)$ не сохраняется при действии отображения (10).

В возмущенной области Ω_ε рассмотрим задачу минимизации функционала энергии

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; U) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_\varepsilon} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)dy - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} F^t U dy$$

множестве допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$: найти функцию $U^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, такую что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon) = \inf_{U\in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; U). \tag{11}$$

Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задача (11) имеет единственное решение $U^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$.

Асимптотические формулы. В силу гладкости отображения (10) имеют место разложения по ε

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в} \quad R^2, \quad \|r_1(\varepsilon, x)\|_{[W^{2,\infty}_{loc}(R^2)]^2} = o\,(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial x} = I + \varepsilon \frac{\partial V(x)}{\partial x} + r_2(\varepsilon, x), \quad \|r_2(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{loc}(R^2)]^4} = o(\varepsilon), \tag{12}$$

где

$$V(x) = (V_1(x), V_2(x))^t = \left.\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Пусть $\Psi(x) = \left(\frac{\partial\Phi_\varepsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1}$, тогда

$$\Psi(x) = I - \varepsilon \frac{\partial V(x)}{\partial x} + r_4(\varepsilon, x), \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{loc}(R^2)]^4} = o(\varepsilon).$$

Применяя обратное преобразование к области Ω_ε, получим невозмущенную область Ω_0 с жестким включением ω_0 и разрезом γ_0. Как отмечалось выше, взаимная однозначность областей Ω_ε и Ω_0 при отображении (10) не влечет взаимную однозначность множеств допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_0(\Omega_0)$. Используя асимптотические формулы (12), можно показать, что образ множества $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ в пространстве $H(\Omega_0)$ есть множество

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{U \in H(\Omega_0) \mid U \text{ удовлетворяет (13) и (14)}\},$$

где

$$[U^t]\nu_0 - \varepsilon[U^t]\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_3(\varepsilon, x)}{\varepsilon}\right)\nu_0 \geq 0 \text{ п.в. на } \gamma_0 \tag{13}$$

$$U = Bx + C + \varepsilon B\left(V + \frac{r_1(\varepsilon, x)}{\varepsilon}\right) \text{ п.в. на } \omega_0. \tag{14}$$

Вспомогательные утверждения. Сформулируем ряд вспомогательных утверждений и формул.

Лемма 1. Пусть $U_0 \in K_0(\Omega_0)$ – решение невозмущенной задачи (8), $U_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ – решение задачи (11), отображенное на невозмущенную область Ω_0. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют вектор-функции W^1_ε и W^2_ε такие, что

$$U_0 + \varepsilon W^1_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad U_\varepsilon - \varepsilon W^2_\varepsilon \in K_0(\Omega_0),$$

$$\|W_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \le c, \quad i = 1,2. \tag{15}$$

Замечание. При доказательстве леммы функции W_ε^i $(i = 1,2)$ строятся в явном виде. При этом построении используется оператор поднятия с границы в область, который, вообще говоря, определяется не единственным способом. Поэтому построенные функции не являются единственными.

Доказанная лемма позволяет установить сильную сходимость U_ε к U_0.

Теорема 1. Справедлива оценка

$$\|U_\varepsilon - U_0\|_{H(\Omega_0)} \le c\sqrt{\varepsilon}. \tag{16}$$

Следствие 1. Пусть b_ε, b_0 — элементы матриц B_ε, B_0; c_ε^i, c_0^i — компоненты векторов C_ε, C_0 $(i = 1,2)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$b_\varepsilon \to b_0, \quad c_\varepsilon^i \to c_0^i.$$

Лемма 2. Пусть

$$P_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t H_0, \quad Q_0 = \theta B_0 V, \quad W_0 = P_0 + Q_0,$$

где след функции H_0 на γ_0 равен $[U_0]$ и принадлежит пространству $H_{00}^{1/2}(\gamma_0)$; θ — произвольная гладкая финитная в Ω функция такая, что $\theta = 1$ в ω_0. Тогда

$$W_\varepsilon^i \to W_0 \quad \text{сильно в} \quad H(\Omega_0)\ (i = 1,2). \tag{17}$$

Вычисление производной интеграла энергии. Применим преобразование координат (10) к интегралам, входящим в $\Pi(\Omega_\varepsilon, U)$. В результате получим новый функционал, который определен на невозмущенной области Ω_0. Обозначим его через $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U)$.

Для того, чтобы найти производную интеграла энергии по параметру возмущения области необходимо вычислить предел

$$\Pi'(\Omega_0; U_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; U_0)}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Так как преобразование (10) задает взаимно однозначное соответствие между множествами $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ и $K_\varepsilon(\Omega_0)$, то $\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon) = \Pi_\varepsilon(\Omega_0; U_\varepsilon)$, и поэтому

$$\Pi'(\Omega_0; U_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; U_0)}{\varepsilon}.$$

Кроме того, функция U_ε минимизирует функционал $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U)$ на множестве $K_\varepsilon(\Omega_0)$. Поэтому в силу леммы 1 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; U_\varepsilon - \varepsilon W_\varepsilon^2)}{\varepsilon} \le \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; U_0)}{\varepsilon} \le \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; U_0 + \varepsilon W_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; U_0)}{\varepsilon}. \tag{19}$$

Используя теорему 1 и лемму 2, можно вычислить пределы, стоящие в левой и правой частях (19), которые равны друг другу. Следовательно предел (18) существует.

Кроме того, применяя формулу Грина, полученную формулу для производной можно окончательно выписать в следующем виде

$$\Pi'(\Omega_0; U_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}_0} A_1(V; U_0, U_0) dx - \int\limits_{\Omega_0} \operatorname{div}(V f_i) u_{0i} -$$

$$- \int\limits_{\omega_0} F^t B_0 V dx - \langle \sigma(U_0)\nu_0, B_0 V\rangle_{\partial\omega_0} - \left\langle \sigma_{\nu_0}(U_0), [U_0^t] \frac{\partial V}{\partial x} \nu_0 \right\rangle_{\gamma_0}^{00},$$

где

$$A_1(V; U, U) = \operatorname{div} V \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U) - 2\sigma_{ij}(U) E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right),$$

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} V_{k,j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} V_{k,i}\right).$$

Список литературы

[1] Khludnev A. M., Kovtunenko V. A. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.

[2] Хлуднев А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Известия РАН. МТТ. 2010. № 5. С. 98–110.

[3] Рудой Е.М. Асимптотика функционала энергии для трехмерного тела с жестким включением и трещиной // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 2. С. 114–127.

[4] Рудой Е.М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова-Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, Вып. 1. С. 98–117.

[5] Стекина Т.А. Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, Вып. 1. С. 45–56.

[6] Maz'ya V.G., Poborchi S.V. Differentiable functions on bad domains. World Scientific Pub Co Inc, 1997.

[7] Рудой Е.М. Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Известия РАН. МТТ. 2007. № 6. С. 113–127.