

Численное решение задачи оптимального управления для уравнений дифракции акустических волн *

Л.В. ИЛЛАРИОНОВА
Вычислительный центр ДВО РАН
e-mail: illarionova_l@list.ru

Рассмотрена задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн на трехмерном включении. Она заключается в минимизации отклонения поля давлений во включении от некоторого заданного, за счет изменения источников звука во внешней среде. Разработан и реализован алгоритм решения задачи.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 , заполненном однородной изотропной средой, имеется однородное, ограниченное, изотропное включение Ω_i со связной границей S . Положим $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_i$ и обозначим $\rho_{i(e)}$, $c_{i(e)}$, $\gamma_{i(e)}$ — плотность, скорость распространения акустических колебаний и коэффициент поглощения в $\Omega_{i(e)}$ соответственно. Предположим, что в области Ω_e имеются источники звука. Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются на нем. В результате, в области Ω_e возникают отраженные волны, а в Ω_i — проходящие волны.

Рассмотрим следующую задачу: изменяя источники звука в Ω_e минимизировать отклонение поля давлений в Ω_i (либо на некотором подмножестве $Q \subset \Omega_i$) от некоторого требуемого. При этом изменение источников звука не должно быть «большим». Математически ее можно сформулировать следующим образом.

Найти функции $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ (управление) и $\Phi_i : \overline{\Omega}_i \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi_e : \overline{\Omega}_e \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\Delta \Phi_{i(e)} + k_i^2 \Phi_{i(e)} = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad (1)$$

$$\Phi_i - \Phi_e = g, \quad p_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} = f \text{ на } S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial |x|} - ik_e \Phi_e = o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$J(\Phi_i, f) = \frac{1}{2} \int_Q |\Phi_i - \Phi_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_S |f - f_d|^2 ds \rightarrow \min, \quad f \in K. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор нормали к поверхности S (направленный в сторону Ω_e),

$$k_{i(e)}^2 = \frac{\omega(\omega + i\gamma_{i(e)})}{c_{i(e)}^2}, \quad p_{i(e)} = \frac{1}{\rho_{i(e)}\omega(\omega + i\gamma_{i(e)})},$$

ω — круговая частота колебаний; g , Φ_d , f_d — заданные на соответствующих множествах комплекснозначные функции, K — некоторое выпуклое множество функций, заданных на S (множестве допустимых управлений).

*Работа выполнена в рамках ФЦП (№ 02.740.11.0626), при поддержке грантов ДВО РАН (проект № 09-П-СО-005, № 09-П-2-01), РФФИ (проекты № 11-01-00757) и Программы Президиума РАН № 2.

В статье [1] был проведен теоретический анализ поставленной задачи (1)–(4). А именно, доказана ее разрешимость, предложен алгоритм численного решения и обоснована его сходимость.

1. Алгоритм решения задачи (1)–(4).

Пусть e_1, \dots, e_M — линейно независимая система функций, заданных на S . Положим

$$K_M = K \cap \text{Span} \{e_1, \dots, e_M\}.$$

где $\text{Span} \{e_1, \dots, e_M\}$ — линейная оболочка функций e_1, \dots, e_M .

Пусть \mathcal{U}_M — множество троек (Φ_i, Φ_e, f) , удовлетворяющих (1)–(3), причем $f \in K_M$.

Рассмотрим следующую задачу. Найти функции $(\Phi_i^{(M)}, \Phi_e^{(M)}, f^{(M)}) \in \mathcal{U}_M$ такие, что

$$J(\Phi_i^{(M)}, f^{(M)}) \leq J(\Phi_i, f) \quad \forall (\Phi_i, \Phi_e, f) \in \mathcal{U}_M. \quad (5)$$

Вопрос о сходимости решения задачи (5) в к решению исходной задачи (1)–(4) рассмотрен в [1].

Пусть функции (Ψ_i, Ψ_e) и $(\Phi_{k,i}, \Phi_{k,e})$ являются решениями следующих задач дифракции

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_{i(e)} + k_{i(e)}^2 \Psi_{i(e)} &= 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \Psi_i - \Psi_e &= g, \quad p_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } S, \\ \frac{\partial \Psi_e}{\partial |x|} - ik_e \Psi_e &= o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_{k,i(e)} + k_{i(e)}^2 \Psi_{k,i(e)} &= 0 \text{ в } \Omega_{i(e)}, \\ \Psi_{k,i} - \Psi_{k,e} &= 0, \quad p_i \frac{\partial \Psi_{k,i}}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Psi_{k,e}}{\partial \mathbf{n}} = e_k \quad \text{на } S, \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial |x|} - ik_e \Psi_k &= o(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \int_Q \left| \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_k - \Phi_d + \Psi_i \right|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_S \left| \sum_{k=1}^M \xi_k e_k - f_d \right|^2 ds \quad \text{при } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \mathbb{R}^M$$

и множество

$$K_\xi = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in \mathbb{R}^M : \sum_{k=1}^M \xi_k e_k \in K_M \right\}.$$

Тогда решение (5) определяется формулами

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(M)} &= \Psi_i + \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_{k,i}, & \Phi_e^{(M)} &= \Psi_e + \sum_{k=1}^M \xi_k \Psi_{k,e}, \\ f^{(M)} &= \sum_{k=1}^M \xi_k e_k, & (\xi_1, \dots, \xi_M) &= \arg \min_{\xi \in K_\xi} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Если, например, $K = L^2(S)$, то нахождение ξ_1, \dots, ξ_M сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что при численном решении поставленной задачи основной объем вычислений приходится на решение прямых задач дифракции (7).

2. Результаты численного решения

Условия расчетов

1. $\Omega_i = Q$ — шар единичного радиуса с центром в начале координат.
2. Множество допустимых управлений $K = L^2(S)$.
3. Для решения задач дифракции (6) и (7) использовался алгоритм, описанный в [2]. Он состоит в следующем. Методами теории потенциала задача дифракции сводится к смешанной системе слабо сингулярных граничных интегральных уравнений Фредгольма 1 и 2 рода на S . Аппроксимация интегральных уравнений системой линейных алгебраических уравнений осуществляется при помощи разбиения единицы на S , связанного с системой узловых точек, а также согласованного с порядком дискретизации метода осреднения слабо сингулярных ядер интегральных операторов. Возникающие при дискретизации многократные интегралы вычисляются аналитически. Это позволяет получать в явном виде формулы для аппроксимации граничных интегральных операторов с особенностями в ядрах и использовать их для вычисления коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений. При этом не требуется предварительная триангуляция поверхности.

Через N обозначаем число точек дискретизации, использованных при решении задач дифракции.

4. Пусть $M_\varphi, M_\theta \in \mathbb{N}$, $M = M_\varphi \cdot M_\theta$, $\varphi_j = \frac{2\pi j}{M_\varphi}$, $j = \overline{0, M_\varphi - 1}$, $\theta_m = \frac{\pi m}{M_\theta}$, $m = \overline{0, M_\theta}$. В качестве e_k выбирались функции, половина которых в сферических координатах (ρ, φ, θ) , ($\rho = |x|$, φ — долгота, θ — широта) определяются формулами (функции «шпалочки» в координатах (φ, θ)):

$$e_k(\varphi, \theta) = h \left(\sqrt{|\varphi_j - \varphi|^2 + |\theta_m - \theta|^2} \right)$$

при $k = jM_\theta + m$, $j = \overline{0, M_\varphi - 1}$, $m = \overline{0, M_\theta}$,

$$h(t) = \begin{cases} \exp(t^2/(t^2 - \pi^2)) & \text{при } |t| < \pi \\ 0 & \text{при } |t| \geq \pi. \end{cases}$$

Вторая половина функций e_k получена из определенных выше умножением на мнимую единицу.

Исходные данные для тестовых расчетов выбирались следующим образом. Пусть функция

$$\Phi_d = \begin{cases} \Phi_{d,i} & \text{в } \Omega_i, \\ \Phi_{d,e} & \text{в } \Omega_e \end{cases}$$

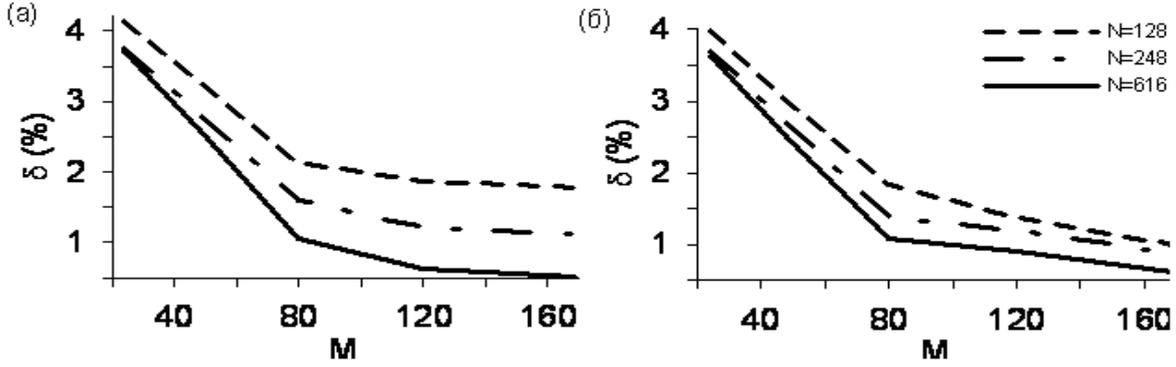


Рис. 1. Графики погрешности при (а) $\lambda = 0$; (б) $\lambda = 5$ (пример 1).

удовлетворяет уравнениям Гельмгольца (1) и условию излучения (3). Тогда, если

$$g = \Phi_{d,i} - \Phi_{d,e}, \quad f_d = p_i \frac{\partial \Phi_{d,i}}{\partial \mathbf{n}} - p_e \frac{\partial \Phi_{d,e}}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{на } S, \quad (8)$$

то очевидным решением задачи (1)–(4) являются $\Phi_i = \Phi_{d,i}$, $\Phi_e = \Phi_{d,e}$, $f = f_d$. То есть в этом случае точное решение нам известно.

Обозначаем

$$\delta = \frac{\|\Phi_i - \Phi_i^*\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\Phi_i^*\|_{L^2(\Omega_i)}} \cdot 100$$

— относительная L^2 -погрешность решения в Ω_i (Φ_i — приближенное, а Φ_i^* — точное решение).

Пример 1. Исходные данные

$$\rho_i = 5, \quad c_i = 1, \quad \gamma_i = 0.02, \quad \rho_e = 3, \quad c_e = 0.5, \quad \gamma_e = 0.05, \quad \Phi_d(x) = \begin{cases} \exp(ik_i x_3) & \text{в } \Omega_i, \\ |x|^{-1} \exp(ik_e |x|) & \text{в } \Omega_e. \end{cases}$$

Функции g и f_d определяются формулами (8).

На рисунке 1 приведены графики зависимости относительной погрешности δ от числа M (число функций e_k) при различных значениях N (число точек дискретизации задачи дифракции).

Параметр $\lambda = 0$ для рис. 1 (а) и $\lambda = 5$ для рис. 1 (б).

Пример 2. Функция Φ_d имеет вид

$$\Phi_d(x) = \begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) \cos(k_i x_3) & \text{в } \Omega_i, \\ |x|^{-1} \exp(ik_e |x|) & \text{в } \Omega_e. \end{cases}$$

Все остальные параметры такие же как и в примере 1.

На рисунке 2 приведены графики зависимости относительной погрешности δ от числа M при различных значениях N .

Параметр $\lambda = 0$ для рис. 2 (а) и $\lambda = 5$ для рис. 2 (б).

Из рисунков 1, 2 видно, что погрешность при разных значениях λ отличается незначительно. Количество M функций e_k оказывает большее влияние на погрешность, чем

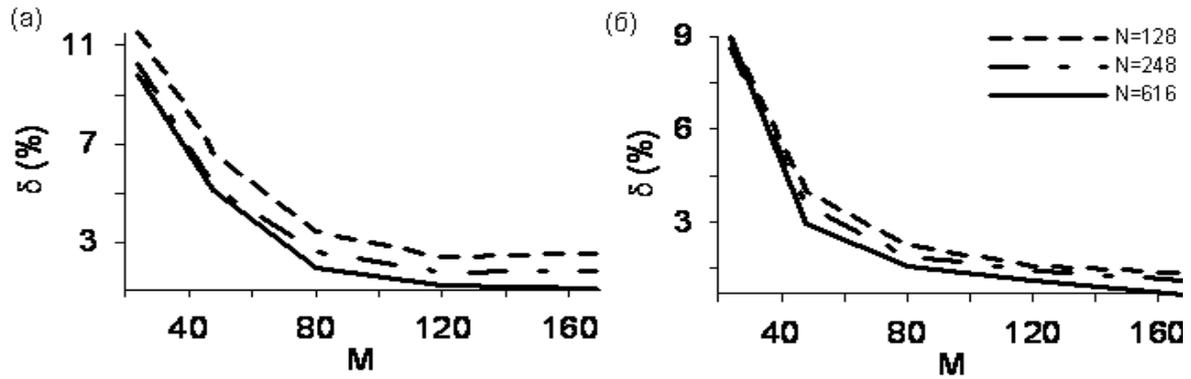


Рис. 2. Графики погрешности при (а) $\lambda = 0$; (б) $\lambda = 5$ (пример 2).

количество N точек дискретизации прямых задач дифракции. Анализируя результаты проведенных тестовых расчетов, приходим к выводу, что предложенный численный метод сходится и позволяет эффективно решать задачи оптимизации акустических полей.

Пример 3 (задача гашение звука).

$$\Phi_d = 0, \quad f_d = \frac{\exp(ik_e|x-y|)}{|x-y|}, \quad g = 0,$$

$$\rho_i = 5, \quad c_i = 1, \quad \gamma_i = 0.02, \quad \rho_e = 3, \quad c_e = 0.5, \quad \gamma_e = 0.05.$$

С физической точки зрения это означает, что мы хотим «погасить» звуковое поле во включении, создаваемое точечным источником.

На рис. 3 изображены линии уровня и проективная поверхность функции $|\Phi_i|$ на квадрате $|x_{1,2}| \leq 0.45$, $x_3 = 0$ при (а) $\lambda = 0.01$, (б) $\lambda = 1$.

На рис. 4 изображены проективные кривые функций $|\Phi_d|$ и $|\Phi_i|$ при разных значениях параметра λ на отрезке (а) $|x_2| \leq 0.45$, $x_{1,3} = 0$; (б) $|x_1| \leq 0.45$, $x_{2,3} = 0$.

Источник звуковых волн расположен справа от включения. На рис. 3 – 4 видно, что наибольшее отклонение от требуемого поля происходит в той части включения, которая находится ближе к источнику. Чем меньше значение λ , то есть, чем больше мы можем изменять источники поля во внешней среде, тем ближе расчетное поле к нулю.

Численные эксперименты показывают, что используемые методы решения поставленных задач обладают достаточно высокой точностью и удобны для реализации на ЭВМ.

Список литературы

- [1] Илларионова Л.В. Задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн // Журн. выч. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 2. С. 297-308
- [2] Ершов Н.Е., Илларионова Л.В., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычислительные технологии. 2010. Т.15, № 1. С. 60-76.

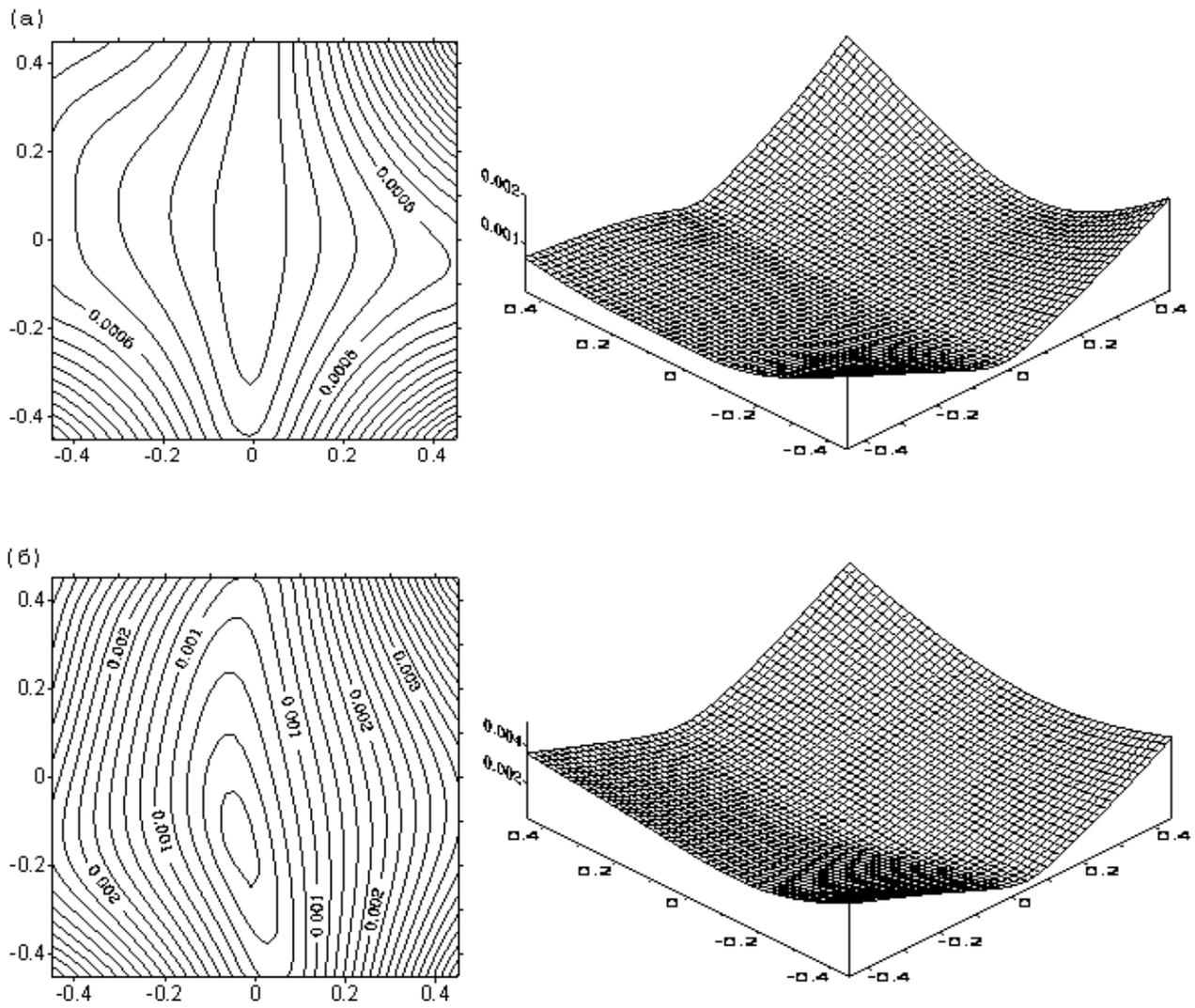


Рис. 3. Линии уровня и проективная поверхность $|\Phi_i|$ при (а) $\lambda = 0.01$; (б) $\lambda = 1$.

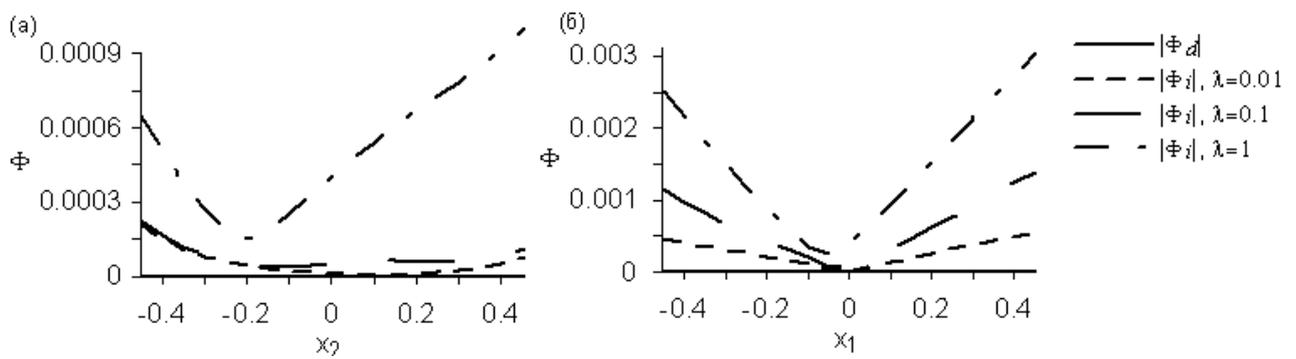


Рис. 4. Проективные кривые функции $|\Phi_i|$.