Нестационарное распространение примесей в закрытых проточных водоёмах

Ю.Н.Захаров
Кемеровский государственный университет
e-mail: zyn@kemsu.ru

Л.В.Кемерова
Институт вычислительных технологий
e-mail: l.v.kemerova@mail.ru

А.В.Чирюкина
Кемеровский государственный университет
e-mail: alina_com@rambler.ru

В работе исследуется нестационарный процесс распространения примеси в затопленной угольной шахте, используемой как очистное сооружение для очистки промышленных стоков. Показывается возможность, так называемого "заиливания"шахты, когда на нижней границе образуется твёрдый осадок, меняющий область свободного течения жидкости поступающей в шахту.

В Кемеровской области для утилизации жидких отходов углеперерабатывающих предприятий используются горные выработки затопленных угольных шахт. Загрязненные сточные воды закачиваются в шахту, где происходит процесс их естественной очистки за счет оседания взвешенных в жидкости твердых частиц и разбавления фильтрующимися грунтовыми водами. Течение жидкости в шахте зависит от свойств жидкости, формы области течения, также постоянно присутствуют фильтрация грунтовых вод через свод шахтного ствола, а для поддержания уровня грунтовых вод в регионе постоянно осуществляется забор жидкости из шахты.

При построении математических моделей течения жидкости и распространения примесей в затопленных горных выработках мы считаем, что примесь не влияет на течение, в связи с чем сначала находится картина течения, после чего на нее накладывается распространение примеси. Внутри шахты постоянно происходит накопление твердого осадка на дне выработки. Образовавшийся твердый осадок не сносится течением и может значительно изменить форму дна или даже перекрыть основной ток подаваемой на входе жидкости. В результате этого может снизиться очистительная способность выработки, что приведет к необходимости вывода ее из эксплуатации.

Использование стационарной модели течения для исходной задачи не позволяет моделировать накопление твердого осадка в горной выработке. Для решения этой проблемы была разработана нестационарная модель течения жидкости.

1. Стационарная задача

Течение однородной вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса. которая в двумерном случае в переменных „скорость“-„давление“имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \Delta u, \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = \nu \Delta v, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $(x, y) \in \Omega^{(2)}$, $\Omega^{(2)}$ - двумерная область с границей $\Gamma^{(2)}$, $\nu > 0$ -коэффициент кинематической вязкости, Δ - оператор Лапласа, (u, v) -компоненты вектора скорости, p - давление.

Рассмотрим течение жидкости в области, приведенной на рис. 1, которая является двумерным аналогом шахты Кольчугинской, использующейся как очистное сооружение. Для системы уравнений Навье-Стокса (1) граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 : u = m_1, v = 0; \\ &\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5 : u = 0, v = 0; \\ &\Gamma_4 : u = 0, v = -r(p_{\text{внешн}} - p_{\text{внутр}}); \\ &\Gamma_6 : u = m_2, v = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где u, v - компоненты вектора скорости, m_1 - скорость жидкости во входном отверстии, m_2 - скорость жидкости в выходном отверстии, $r > 0$ - константа, отражающая проницаемость границы Γ_4 для фильтрации, $p_{\text{внешн}}(x)\,|_{\Gamma_4}$ - заданное внешнее давление, $p_{\text{внутр}}(x)\,|_{\Gamma_4}$ определяется из решения системы уравнений Навье-Стокса.

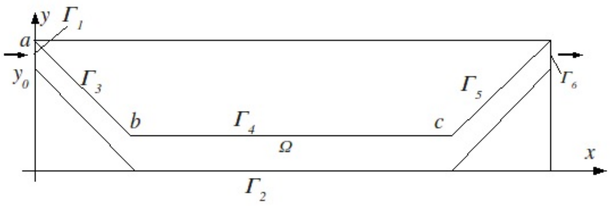

Рис. 1. Вид области решения

Таким образом интенсивность и направление фильтрации жидкости через верхнюю границу Γ_4 зависят от разницы давлений внутри области решения и вовне.

Распространение примеси описывается уравнением переноса

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + (v - v_s)\frac{\partial C}{\partial y} = D\Delta C \tag{3}$$

где $C = C(t, x, y)$ - концентрация примеси, (u, v) - компоненты вектора скорости основного течения, v_s - скорость оседания примеси, D - коэффициент диффузии, Δ- оператор Лапласа.

Для уравнения переноса (3) начальные условия могут быть записаны в виде

$$C(0, x, y) = C_0,$$

где $C_0 = C_0(x, y)$ - начальная концентрация, а граничные условия заданы следующим образом:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 : C = C_1, \Gamma_2 : \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C, \Gamma_3, \Gamma_5 : \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \\ \Gamma_4 : C = C_2, \Gamma_6 : \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \end{array} \tag{4}$$

где C_1 - концентрация загрязнения в жидкости, поступающей в шахту через входное отверстие, C_2 - концентрация вещества в фильтрующихся грунтовых водах, α - константа, отражающая интенсивность образования возле дна примеси с повышенной концентрацией загрязнения и выпадения твердого осадка при оседании. Если $\alpha = 0$, то образования твердого осадка и накопления примеси не происходит.

Для решения поставленной задачи использован метод сеток. Введем в области решения неравномерную прямоугольную согласованную с границей сетку, аппроксимируем исходные уравнения следующими разностными схемами: для уравнений (1) использована схема, в которой первые производные аппроксимируются центральными разностями, а операторы Лапласа - обычным образом со вторым порядком на равномерной сетке, граничные и начальные условия заменены разностными аналогами. СЛАУ, полученная при аппроксимации задачи (1), (2) решалась методом неполной аппроксимации минимальных невязок [1]. Уравнение (3) решалось схемой продольно-поперечной прогонки с направленными разностями [2].

На рисунке 2 показана картина течения вязкой несжимаемой жидкости для стационарной задачи. После нахождения поля скоростей была решена задача о распространении примеси в рассматриваемом модельном водоеме. Результат моделирования приведен на рисунке 3. Примесь накапливается в шахте, и за счет оседания взвешенных частиц концентрация ее вблизи дна повышается. Распространение загрязнения происходит преимущественно вдоль вихревых структур, находящихся в поле течения, также, проникая внутрь вихрей за счет оседания и диффузии, примесь накапливается внутри них.

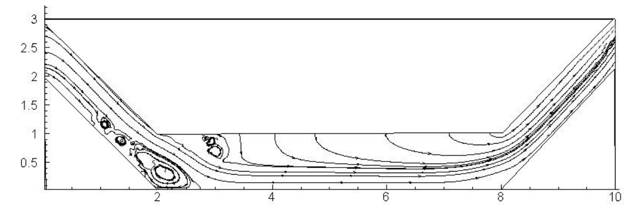

Рис. 2. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости.

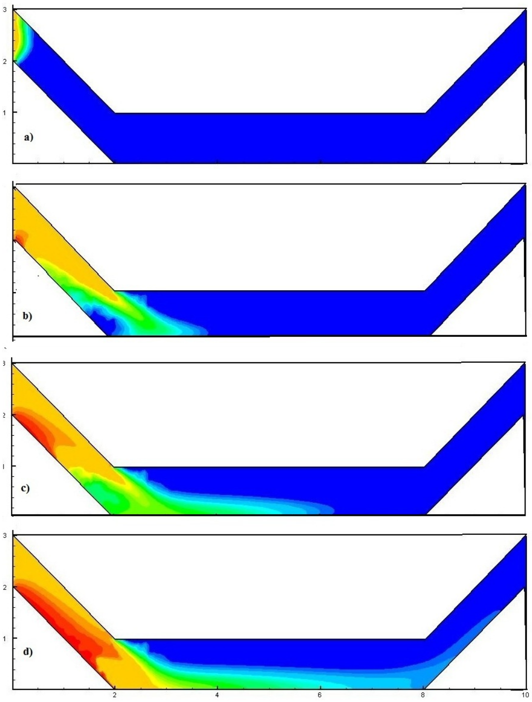

Рис. 3. Распространение примеси в шахте до установления (вязкость $\nu = 0.01$)

2. Нестационарная задача

Как показывает практика затопленные шахты со временем "заиливаются"т.е. выработанное пространство заполняется породой и оседающей примесью. При использовании обводненных шахт для очистки промышленных стоков аглофабрик этот процесс происходит значительно быстрее. Для того, чтобы его смоделировать, стационарная модель движения жидкости не достаточна, т.к. при "заиливании"происходит изменение формы выработанного пространства и тем самым меняется гидродинамика течения. Поэтому, для моделирования процесса "заиливания"мы использовали следующую нестационарную модель.

Для определения поля скоростей, решалась система уравнений Навье - Стокса в переменных функция тока - вихрь (5)-(6) с соответствующими начальными и краевыми условиями для скоростей, вихря и функции тока (7) - (9).

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\nabla(V\omega) + \frac{1}{Re}\Delta\omega + \omega\nabla V \tag{5}$$

$$\Delta\psi = -\omega \tag{6}$$

$$V\,|_{t=0} = 0, V\,|_{\Gamma} = V(t,x,y) \tag{7}$$

$$\omega\,\Big|_{t=0} = 0, \omega\,\Big|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Gamma} \tag{8}$$

$$\psi\,|_{t=0} = 0, \psi\,|_{\Gamma} = \psi(t,x,y) \tag{9}$$

где Re - число Рейнольдса,∇- градиент, Δ - оператор Лапласа.

На твердых стенках $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_5$ ставятся условия прилипания. На входном и выходном отверстиях Γ_1, Γ_6 и верхней кровле Γ_4 используются параболические профили скоростей, изменяющиеся от 0 до 1. Соотношение между значениями скоростей выбирается таким образом, что выполняется соотношение баланса между втекающей и вытекающей жидкостью.

Поставленная дифференциальная задача аппроксимируется на равномерной конечно - разностной сетке с шагами h_x, h_y по пространственным переменным и шагом τ по времени. Для решения разностной задачи для ω используется схема стабилизирующих поправок, а для разностной задачи для ψ - метод минимальных невязок неполной аппроксимации. Задача о распространении примеси (3)-(4) ставится так же, как и для стационарного случая.

Процесс образования твердого осадка на дне горной выработки моделируется следующим образом: считаем, что если на протяжении некоторого времени (разного для каждой примеси) в (i,j) -м расчетном узле конечно-разностной сетки находится примесь, концентрация которой превышает заданную величину C^* , тогда (i,j) узел становится нерасчетны, и тем самым область решения изменяется.

На рисунках 4-5 предоставлены расчеты задачи с учетом образования осадка на дне, демонстрирующие изменение распространения примеси и изменение формы канала и поля скоростей с течением времени и накоплением осадка на дне, происходящем все это время, в зависимости от коэффициента α.

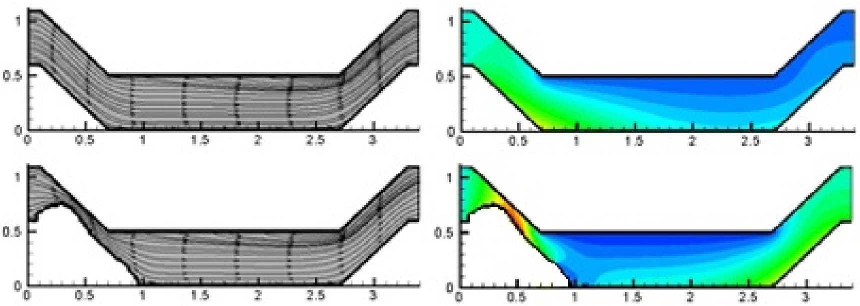

Рис. 4. Распространение примеси в шахте - вязкая жидкость ($\alpha = -2$)

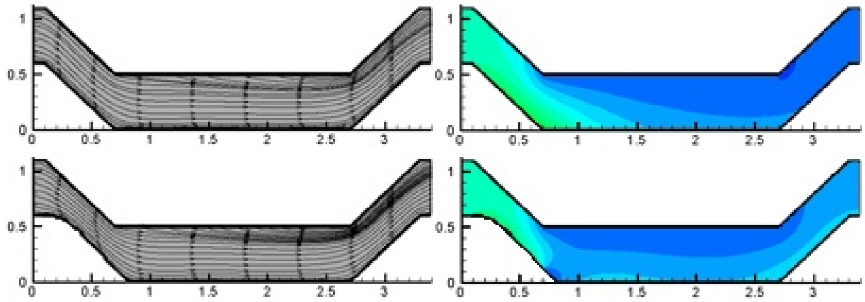

Рис. 5. Распространение примеси в шахте - вязкая жидкость ($\alpha = -1.5$)

Вдоль нижней границы вблизи входного отверстия образуется "ступенька". В основании "ступеньки"образуется область с меньшим значением концентрации. Продолжение расчетов во времени приводит к перекрытию основного канала течения жидкости от входного отверстия.

Список литературы

1. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2004.– 239 с.

2. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – М.: Наука, Сибирское отделение АН, 1967. – 196 с.