

Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище*

О. И. ГУСЕВ, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, Н. Ю. ШОКИНА

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: gusev_oleg_igor@mail.ru, khak@ict.nsc.ru, nina.shokina@ict.nsc.ru

В. А. КУТЕРГИН

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: kutergin.viktor@gmail.com

Исследуется влияние дисперсии на картину поверхностных волн, возникающих при сходе подводного оползня в ограниченном водоеме. Для описания поверхностных волн используются как полная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды, так и новые приближенные модели типа Буссинеска для волн, генерируемых оползнями малой высоты или медленно сползающими оползнями. Применяется единый для всех моделей подход к построению численных алгоритмов, основанный на аппроксимации расширенной системы уравнений, состоящей из системы уравнений гиперболического типа и уравнения эллиптического типа для негидростатической составляющей давления. Численно исследовано влияние параметров, определяющих геометрию водоема и движение квазидеформируемого оползня, на величины максимальных заплесков на берег и плотину водохранилища.

Введение

Сход подводного оползня с крутого берегового склона водохранилища ГЭС может генерировать поверхностные волны, опасные для береговых сооружений и плотины водохранилища. Подводные оползни генерируют более короткие волны [1], чем цунами-генные землетрясения, поэтому для описания таких волн необходимо учитывать дисперсию волн, т. е. использовать нелинейно-дисперсионные уравнения (НЛД-уравнения) [2, 3]. Эти уравнения содержат производные по времени высокого порядка, а также смешанные производные, поэтому проблема конструирования эффективных численных алгоритмов для решения НЛД-уравнений не является тривиальной и этой проблеме уделяется в настоящее время пристальное внимание специалистов по вычислительной гидродинамике [4–7].

Стандартный подход к решению НЛД-уравнений заключается в вычислении полной глубины из уравнения неразрывности [8, 9], решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двух вспомогательных величин [4], которые используются затем в качестве правых частей для эллиптических уравнений относительно компонент скорости. В настоящей работе для решения системы НЛД-уравнений предлагается заменить ее расширенной системой уравнений, состоящей из системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения и отличающейся от последней лишь правой частью,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00721) и программы Интеграционных исследований СО РАН (код проекта 42)

и уравнения эллиптического типа для осредненной по глубине дисперсионной составляющей давления. Этот подход к конструированию численных алгоритмов применяется здесь как для полных НЛД-уравнений, так и для новых приближенных моделей типа Буссинеска [10], описывающих поверхностные волны, генерируемые оползнями малой высоты или медленно сползающими оползнями.

Настоящая работа является продолжением исследований [11–13], посвященных изучению влияния дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в прибрежной акватории морей. В отличие от указанных работ, здесь рассматриваются оползни в ограниченном водоеме. Детально исследовано влияние параметров, определяющих геометрию водоема и движение квазидеформируемого оползня [14] по неровному склону, на величины максимальных заплесков на берег и плотину водохранилища. Выполнено сравнение с численными результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды [15] и модели потенциальных течений [16], а также с имеющимися экспериментальными данными [17–19] для модельных оползней, движущихся по плоскому откосу.

1. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном, заданным функцией $z = -h(x, y, t)$, а сверху — свободной границей, описываемой функцией $z = \eta(x, y, t)$, где t — время, x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость Oxy совпадает с невозмущенной свободной поверхностью.

В приближенных моделях мелкой воды искомыми величинами обычно являются полная глубина слоя жидкости $H = \eta + h$ и вектор скорости $\mathbf{u} = (u, v)$, связанный каким-либо образом с вектором скорости трехмерного течения. Если в качестве \mathbf{u} использовать осредненную по глубине горизонтальную составляющую вектора скорости трехмерного течения, то уравнение неразрывности приближенной модели принимает следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y$.

В полной НЛД-модели [2] имеет место квадратичная зависимость давления p от вертикальной координаты:

$$p = g \left[H - (z + h) \right] - \left[\left(H - (z + h) \right) R_2 + \left(\frac{H^2}{2} - \frac{(z + h)^2}{2} \right) R_1 \right], \quad (2)$$

где g — ускорение свободного падения,

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2 h, \quad (3)$$

D — оператор полной производной, $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$. Если через P обозначить среднее по толщине слоя давление (2)

$$P = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} p dz = \frac{gH}{2} - \left(\frac{H^2}{3} R_1 + \frac{H}{2} R_2 \right), \quad (4)$$

то уравнение движения НЛД-модели примет следующий вид [3]:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla(HP)}{H} = q\nabla h, \quad (5)$$

при этом

$$q = \frac{1}{H}p \Big|_{z=-h} = g - \left(\frac{H}{2}R_1 + R_2 \right). \quad (6)$$

В отличие от классических уравнений мелкой воды в уравнения движения (5) входят смешанные производные по времени и пространственным переменным от компонент вектора скорости, что осложняет построение численного алгоритма. Избавимся от этих смешанных производных, введя дополнительную зависимую переменную — дисперсионную составляющую

$$\varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 \quad (7)$$

давления p , проинтегрированного по толщине слоя, и добавив к исходным уравнениям (1), (5) уравнение относительно новой зависимой переменной φ :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h)\nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left(\frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right) = F, \quad (8)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left(g\nabla\eta + \frac{R\nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2\nabla u \times \nabla v,$$

$$R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + B, \quad B = h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t), \quad r = 4 + |\nabla h|^2$$

и использована бинарная операция для двумерных векторов, обозначенная так же, как операция векторного произведения трехмерных векторов. Результатом действия этой операции на векторы ∇u , ∇v будет скаляр, определяемый по формуле $\nabla u \times \nabla v = u_x v_y - u_y v_x$.

Итак, расширенная система НЛД-уравнений (далее NLD-модель) состоит из уравнения неразрывности (1), уравнения движения

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H} \quad (9)$$

и уравнения (8) относительно дисперсионной составляющей φ проинтегрированного по глубине давления, при этом функция ψ вычисляется по формуле

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{H} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right). \quad (10)$$

Алгоритм расчета на произвольном шаге по времени с номером n аналогичен описанному в [16] и состоит из двух шагов. На шаге предиктор сначала решается конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее (8). Коэффициенты уравнения вычисляются по известным значениям H^n и \mathbf{u}^n с n -го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (1), (9), при этом в правой части уравнения движения используются уже известные значения φ^n , ψ^n , H^n и h^n . После этого вновь численно решается уравнение (8) с использованием величин H^* и \mathbf{u}^* , вычисленных на предикторе. Найденные на этом этапе значения φ^* и ψ^* используются на шаге корректор для определения

окончательных значений H^{n+1} и \mathbf{u}^{n+1} путем численного решения системы уравнений гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения движения (9), записанного с дивергентной формой левой части:

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + g\nabla \frac{H^2}{2} = gH\nabla h + \nabla\varphi - \psi\nabla h. \quad (11)$$

Достоинством NLD-модели является то, что система уравнений (1), (8), (9) допускает при численном решении расщепление на эллиптическую и гиперболическую части, что позволяет использовать для каждой из частей хорошо изученные алгоритмы. Уравнение (8) является равномерно эллиптическим, и если коэффициент при φ положителен, то для нахождения численного решения этого уравнения можно построить разностные схемы с положительно определенными операторами и использовать быстро сходящиеся итерационные методы решения уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами. Левые части уравнений движения (9), (11) совпадают с левыми частями системы уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения, поэтому для численного решения гиперболической части (1), (9), (11) используется схема предиктор-корректор [21–23], хорошо зарекомендовавшая себя при исследовании волновых процессов в рамках бездисперсионной модели мелкой воды [24].

2. Слабо дисперсионные уравнения мелкой воды

При выводе НЛД-уравнений (1), (5) предположение о малости амплитуды волн не использовалось. Приведем теперь приближенные НЛД-уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска [25, 26], в качестве своего следствия закон баланса полной энергии [10]. В слабо дисперсионной модели (NLWD-модели) мы имеем систему уравнений гиперболического типа (1), (11) и модифицированное равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления с более низкой, чем в (8), степенью нелинейности функции H в коэффициентах и правой части:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left(\frac{2}{Hh^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{Hhr} \right) \right) = F, \quad (12)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left(g\nabla\eta + \frac{R\nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{hr} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh}{h} - 2\nabla u \times \nabla v,$$

при этом

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{h} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right). \quad (13)$$

Таким образом, структура уравнений NLD-модели сохраняется и в случае слабо дисперсионной модели, поэтому описанный выше алгоритм численного решения полных НЛД-уравнений используется и для решения задач в рамках NLWD-модели.

Уравнения слабо дисперсионных течений над слабо деформируемым дном получаются [10] из уравнений NLWD-модели при дополнительном предположении о слабой изменчивости дна во времени

$$h(x, y, t) = h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y, t), \quad (14)$$

где ε — мало [26]. В этой модели (NLWDB-модели) уравнение неразрывности (1) остается прежним, уравнение движения принимает вид

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + g\nabla \frac{H^2}{2} = gH\nabla h + \nabla\varphi - \psi\nabla h_0, \quad (15)$$

а уравнение для φ модифицируется к следующему:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h_0) \nabla h_0}{Hr} \right) - 6\varphi \left(\frac{2}{Hh_0^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h_0}{Hh_0 r} \right) \right) = F, \quad (16)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left(g\nabla\eta + \frac{R\nabla h_0}{r} \right) - \frac{6R}{h_0 r} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh_0}{h_0} - 2\nabla u \times \nabla v, \quad (17)$$

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{h_0} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h_0 \right), \quad R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h_0 + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla h_0), \quad r = 4 + |\nabla h_0|^2.$$

Отметим, что в формуле (17) выражение Dh_0 можно заменить на $\mathbf{u} \cdot \nabla h_0$, поскольку функция $h_0(x, y)$ от времени не зависит, однако мы сохранили прежнее обозначение Dh_0 , чтобы была яснее видна преемственность моделей в рассматриваемой здесь иерархии НЛД-моделей.

Подчеркнем главную особенность двух используемых нами слабо дисперсионных моделей типа Буссинеска: это наличие адекватных физике законов изменения энергии и дивергентная форма записи левых частей всех уравнений. Эти упрощенные модели сохраняют очень важные физические свойства полных НЛД-моделей, которые, в свою очередь, наследуют эти свойства у трехмерных моделей гидродинамики. Это обстоятельство выгодно отличает используемые в настоящей работе модели от других хорошо известных моделей типа Буссинеска (например, [25–27]).

3. Результаты расчетов

Разработанные алгоритмы применялись для моделирования поверхностных волн, генерируемых оползнем пространственной формы, скользящим по пространственно неоднородному подводному склону модельного водоема (рис. 1, *a*), геометрия которого описана в работе [14]. На этом же рисунке показана траектория движения оползня, свидетельствующая о том, что оползень, смещаясь по крутому склону в сторону увеличения глубин, по инерции поднимается на локальное возвышение дна, и далее, резко меняя направление движения, сползает с этого возвышения вниз. При варьировании параметров, определяющих характеристики оползневого материала и дна, могут получаться довольно сложные траектории движения оползня, особенно при малом трении о дно.

Для выяснения влияния дисперсии на картину генерируемых волн их сравнительное моделирование выполнялось на основе модели трехмерных потенциальных течений, полной и приближенных плановых нелинейно-дисперсионных моделей и плановой нелинейной модели мелкой воды первого приближения. Некоторые результаты изображены на рис. 1 в виде поверхности воды в один и тот же момент времени. Видно, что NLD-модель дает систему диспергирующих волн. Такая же картина получается при применении модели потенциальных течений. Напротив, расчеты по плановой бездисперсионной модели мелкой воды показывают, что в рамках этой модели образуются ярко выраженные одиночные волны, которые движутся к берегу с большей скоростью, чем

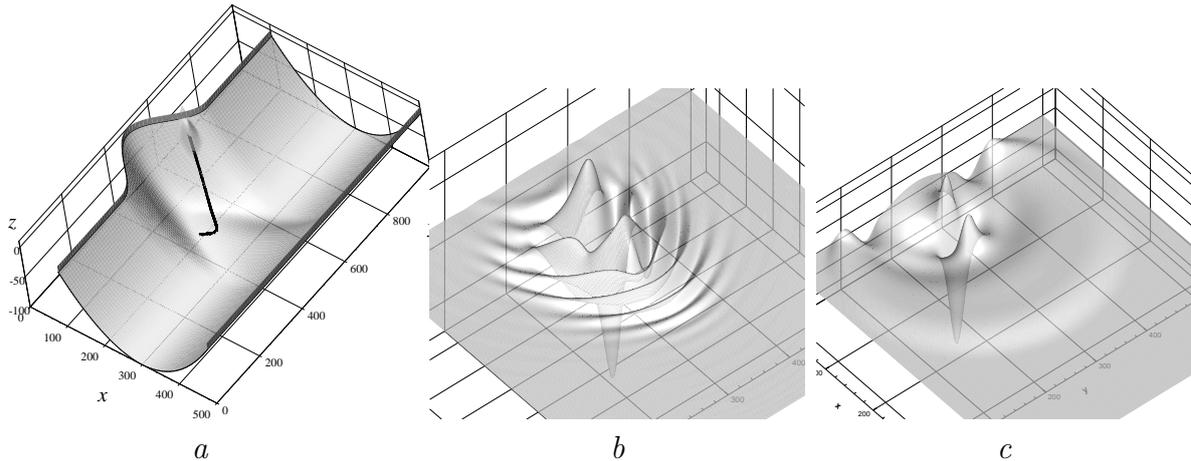


Рис. 1. Траектория движения оползня по неровному дну водоема (а) и фрагменты графиков свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ в момент времени $t = 10$ с, полученные в расчете по NLD-модели (b) и по плановой модели мелкой воды (c)

сгенерированные дисперсионные волны в NLD-модели и, как следствие, дают несколько бóльшие значения максимальных заплесков. Общим для всех моделей является образование над оползнем отрицательной волны и двух положительных “всплесков” над передним и задним его фронтами, которые сопровождают оползень во время его движения и исчезают через некоторое время после его остановки. Несмотря на отличие волновых картин, воспроизводимых различными математическими моделями, максимальные значения заплесков на берег оказались для них сопоставимыми в довольно широких диапазонах изменения определяющих параметров. Установлено также, что из всех параметров, входящих в уравнение движения оползня, наиболее существенно на величину максимального заплеска влияют размеры оползня, его плотность и начальное заглубление, т. е. параметры, которые нетрудно оценить при натурных измерениях. Кроме того, проведенные вычислительные эксперименты доказывают, что криволинейность склона оказывает существенно влияние на движение оползня и, как следствие, на величины максимальных заплесков.

Выполнено также исследование величин заплесков на плотину ГЭС при сходе ополз-

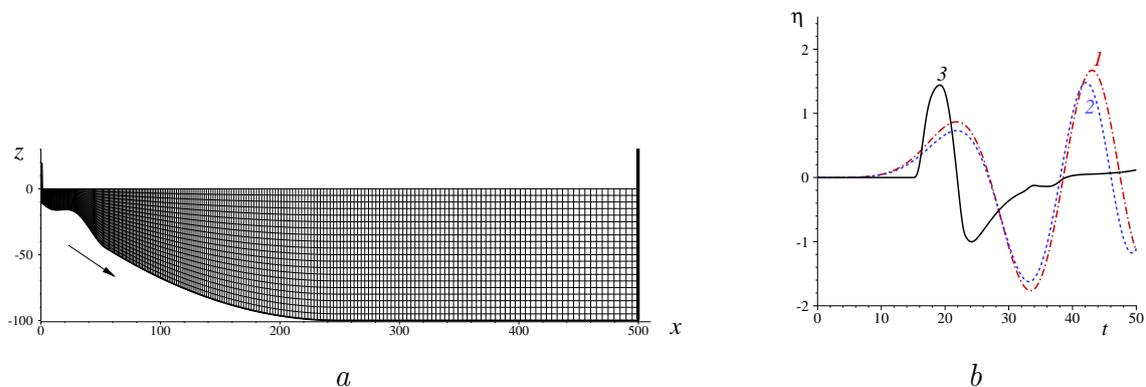


Рис. 2. Сетка в начальный момент времени для расчета в рамках модели потенциальных течений жидкости (а) и мареограммы на плотине водохранилища при использовании NLD-модели (1), модели потенциальных течений (2) и бездисперсионной модели мелкой воды (3)

ня со склона водохранилища с формой дна, не зависящей от одной из горизонтальных координат. Дно модельного водоема имело параболическую форму в месте начального расположения оползня и являлось горизонтальным в окрестности плотины (рис. 2, *a*). Эта задача решалась в рамках одномерной бездисперсионной модели мелкой воды, трех указанных выше нелинейно-дисперсионных моделей, а также модели плоскопараллельных потенциальных течений жидкости. Показано, что хотя классическая модель мелкой воды дает иную форму приходящей к плотине волны (рис. 2, *b*), тем не менее вертикальные заплески, предсказываемые этой моделью, согласуются с результатами расчетов по более точным моделям.

На рис. 3 демонстрируется сравнение результатов расчетов, полученных на основе разных НЛД-моделей. Графики на левом и среднем рисунке получены для случая движения оползня большой высоты ($T = 10$ м). Угол трения θ_* был равен 5° . Из рис. 3, *a* видно, что NLWD-модель дает в рассматриваемой задаче практически неотличимые от полной NLD-модели результаты. Поэтому использование здесь слабо дисперсионной модели может оказаться вполне оправданным, поскольку разработанный для нее численный алгоритм имеют большую устойчивость из-за понижения степени нелинейности в некоторых членах уравнения (12) по сравнению с уравнением (8) для NLD-модели. Напротив, результаты, полученные на основе NLWDB-модели для слабо деформируемого дна уже сильно отличаются от тех, что получены по NLD-модели (см. рис. 3, *b*). Хорошее соответствие наблюдается только при условии действительно слабой деформации дна, что видно из рис. 3, *c*, полученного при $T = 1$ м и области вдвое длиннее той, что изображена на рис. 2, *a*.

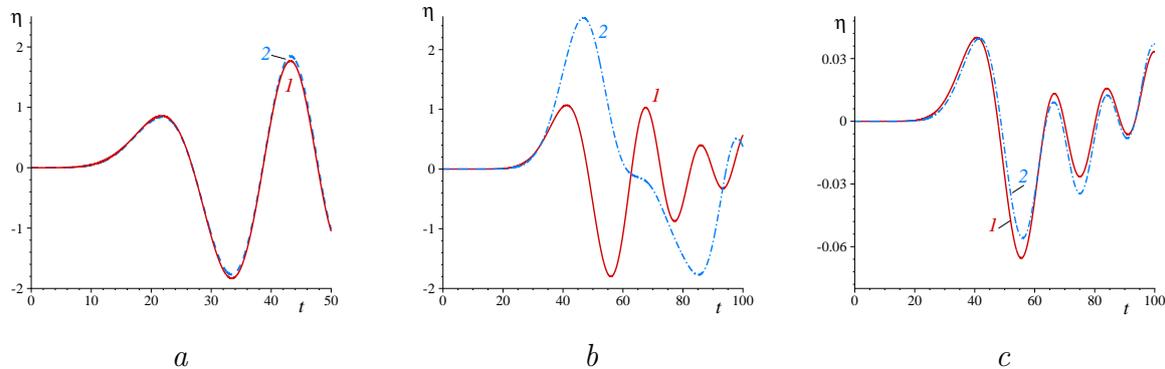


Рис. 3. Мареограммы, рассчитанные на основе NLD-модели (1) и приближенных НЛД-моделей (2). *a* — NLWD-модель, в центре и справа — NLWDB-модель в случае оползня большой высоты (*b*) и малой высоты (*c*)

Список литературы

- [1] DUTYKH D., DIAS F. Energy of tsunami waves generated by bottom motion // Proc. R. Soc. A. 2009. Vol. 465. P. 725–744.
- [2] FEDOTOVA Z.I., KNAKIMZYANOV G.S. Shallow water equations on a movable bottom // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. Vol. 24, No 1. P. 31–42.
- [3] ФЕДОТОВА З.И., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. Анализ условий вывода НЛД-уравнений // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94–108.

- [4] DUTYKH D., MITSOTAKIS D., BEYSEL S., SHOKINA N. Dispersive waves generated by an underwater landslide // Numerical methods for hyperbolic equations: theory and applications. An international conference to honour Professor E.F. Toro. Vázquez-Cendón E., Hidalgo A., García-Navarro P. (Eds.) CRC Press. 2013. P. 245–250.
- [5] TAPPIN D.R., WATTS P., GRILLI S.T. The Papua New Guinea tsunami of 17 July 1998: anatomy of a catastrophic event // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2008. Vol. 8. P. 243–266.
- [6] GRILLI S., IOUALALEN M., ASAVANANT J., SHI F., KIRBY T., WATTS P. Source constraints and model simulation of the December 26, 2004 Indian Ocean tsunami // J. Waterways, Port, Ocean and Coastal Engineering. 2007. Vol. 133, No 6. P. 414–428.
- [7] ENVIRONMENTAL hazards. The fluid dynamics and geophysics of extreme events.. H.K. Moffatt and E. Shuckburgh (Eds.) Singapore: World Scientific, 2010. P. 273–300.
- [8] FEDOTOVA Z.I., PASHKOVA V.YU. Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. Vol. 12, No 2. P. 127–149.
- [9] CHUBAROV L.B., FEDOTOVA Z.I., SHKUROPATSKII D.A. Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. Vol. 13, No 4. P. 289–306.
- [10] DUTYKH D., FEDOTOVA Z., КНАКИМЗЯНОВ Г. Об уравнении энергии некоторых приближенных моделей волновой гидродинамики // 2013 (в печати).
- [11] CHUBAROV L.B., ELETSKIJ S.V., FEDOTOVA Z.I., КНАКИМЗЯНОВ Г.С. Simulation of surface waves generation by an underwater landslide // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. Vol. 20, No. 5. P. 425–437.
- [12] SHOKIN YU.I., FEDOTOVA Z.I., КНАКИМЗЯНОВ Г.С., CHUBAROV L.B., BEISEL S.A. Modelling surfaces waves of generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. Vol. 22, No 1. P. 63–85.
- [13] BEISEL S.A., CHUBAROV L.B., КНАКИМЗЯНОВ Г.С. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide moving over an uneven slope // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2011. Vol. 26, No 1. P. 17–38.
- [14] BEISEL S.A., CHUBAROV L.B., DUTYKH D., КНАКИМЗЯНОВ Г.С., SHOKINA N.YU. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. Vol. 27, No 6. P. 539–558.
- [15] КНАКИМЗЯНОВ Г.С., SHOKINA N.YU. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No 5. P. 690–699.
- [16] ЧИСЛЕННОЕ моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [17] WATTS P., IMAMURA F., GRILLI S.T. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases // Sci. Tsunami Hazards. 2000. Vol. 18, No 2. P. 107–123.
- [18] ЕЛЕЦКИЙ С.В., МАЙОРОВ Ю.Б., МАКСИМОВ В.В., НУДНЕР И.С., ФЕДОТОВА З.И., ХАЖОЯН М.Г., ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ЧУБАРОВ Л.Б. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, Спецвыпуск, Ч. 2. С. 194–206.
- [19] ENET F., GRILLI S.T. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides // J. Waterway Port Coastal Ocean Engng. 2007. Vol. 133, No 6. P. 442–454.

- [20] ГУСЕВ О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46–64.
- [21] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИНА Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 78–98.
- [22] СОММЕР А.Ф., ШОКИНА Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на двумерных подвижных сетках // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 4. С. 88–108.
- [23] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИНА Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 3 (в печати).
- [24] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИНА Н.Ю. Определение зоны затопления при накате длинных волн на берег // Труды шестого Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. Алматы: Казак университеті, 2009. С. 305–314.
- [25] PEREGRINE D.H. Long waves on a beach // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 27. Pt. 4. P. 815–827.
- [26] ДОРФМАН А.А., ЯГОВДИК Г.И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числен. методы мех. сплошной среды. 1977. Т. 8, № 1. С. 36–48.
- [27] DIAS F., MILEWSKI P. On the fully-nonlinear shallow-water generalized Serre equations // Physics Letters A. 2010. Vol. 374(8). P. 1049–1053.