О некоторых проблемах конструирования разностных схем на подвижных сетках*

Н. Ю. Шокина
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: nina.shokina@ict.nsc.ru

На примерах для уравнения переноса и нелинейного скалярного уравнения обсуждаются построение адаптивных сеток и конструирование дивергентных разностных схем, сохраняющих монотонность численного решения. Схема предиктор-корректор применена для решения одномерных нестационарных уравнений мелкой воды.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнение переноса, нелинейное скалярное уравнение, нелинейные уравнения мелкой воды, конечно-разностная схема, предиктор-корректор, монотонная схема, дивергентная схема, адаптивная сетка, метод эквираспределения, энтропийная коррекция, результаты расчётов.

Введение

В данной работе изложен подход к построению монотонных разностных схем, основанный на исследовании их дифференциальных приближений. Рассмотрены вопросы, не затронутые в [1]–[3]: свойства монотонности и дивергентности схем на подвижных неравномерных сетках, построение сеток, адаптирующихся к разрывным решениям. Предложен новый подход к построению любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках. Многие схемы, сохраняющие монотонность численного решения, дают на разрывных решениях осциллирующие разностные производные [4], что может быть вызвано, в частности, ростом числа экстремумов численного решения даже при использовании TVD-схем [5, 6]. Если при использовании метода адаптивных сеток управляющая функция зависит от таких производных, то будет чередование длинных и коротких ячеек, что приведет к потере точности решения. Использование процедуры сглаживания управляющей функции дает плавное изменение длин соседних ячеек. Для задач с разрывными решениями нарушение условия неубывания энтропии [7] приводит к нефизичному решению [8, 9]. Для выполнения дискретного условия неубывания энтропии можно использовать энтропийную коррекцию [8], [10]–[13]. С помощью метода дифференциального приближения сделаны новое объяснение возникновения нефизичных численных решений и энтропийная коррекция. Для нелинейного скалярного уравнения показано сохранение схемой предиктор-корректор постоянного решения и стационарного или, в случае подвижной сетки, движущегося скачка. Схема предиктор-корректор применена для решения одномерных уравнений мелкой воды, для которых нелинейное скалярное уравнение является модельным.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-05-91052-НЦНИ, № 12-01-00721, № 12-01-00721а), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6293.2012.9), а также в рамках Программы интеграционных исследований СО РАН (проект № 42).

1. Схемы для уравнения переноса

Для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \mathrm{const}, \tag{1}$$

явная схема предиктор-корректор [14] имеет вид:

$$\frac{u^*_{j+1/2} - u^n_{j+1/2}}{\tau^*_{j+1/2}} + a u^n_{x,j+1/2} = 0, \quad \frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + a\frac{u^*_{j+1/2} - u^*_{j-1/2}}{h} = 0, \tag{2}$$

τ — шаг по времени, h — шаг равномерной сетки $x_j = jh$, $u^*_{j+1/2}$ определены в $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ и относятся к $t = t^n + \tau^*_{j+1/2}$, $t^n = n\tau$, $u^n_{j+1/2} = \dfrac{u^n_{j+1} + u^n_j}{2}$, $u^n_{x,j+1/2} = \dfrac{u^n_{j+1} - u^n_j}{h}$, $\tau^*_{j+1/2} = \dfrac{\tau}{2}(1 + \theta^n_{j+1/2})$, θ — схемный параметр. Одношаговый вариант схемы (2)

$$\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + a\frac{u^n_{j+1/2} - u^n_{j-1/2}}{h} - \frac{a^2\tau}{2h}\left[\Big((1+\theta)u_x\Big)^n_{j+1/2} - \Big((1+\theta)u_x\Big)^n_{j-1/2}\right] = 0 \tag{3}$$

можно назвать канонической формой явных двухслойных схем для (1), поскольку любая такая схема может быть записана в виде (3) при соответствующем выборе θ [15].

При $\theta = \mathrm{const} \neq 0$ схема (3) имеет первый порядок на гладких решениях. Условия устойчивости имеют вид $0 \le \theta \le \theta_L$, $\theta_L = \dfrac{1}{C^2} - 1 > 0$, где $\mathrm{C} = |a|\dfrac{\tau}{h} < 1$ — число Куранта. Если $\theta_0 \le \theta \le \theta_L$, $\theta_0 = \dfrac{1}{\mathrm{C}} - 1 > 0$, то схема сохраняет монотонность численного решения. Если схема не сохраняет монотонность численного решения, то это не означает, что она все монотонные функции переводит в немонотонные [15]. При отсутствии дисперсии в решении второго дифференциального приближения схема может не сохранять монотонность численного решения [15]. Для "квазипостоянного" θ (т. е. зависящего от h и τ так, что $\theta = O(h)$ (или $\theta = O(\tau)$), коэффициенты схемы (3) зависят только от шагов сетки. Тогда при $\theta_0 \le \theta \le \theta_L$ и $\theta = O(h) \ge 0$ схема (3) будет второго порядка и сохраняющей монотонность численного решения [1]. Однако при измельчении сетки для сохранения этих свойств нужно использовать C, близкие к 1.

При особом выборе переменного $\theta = O(h) \ge 0$ схема второго порядка (3) может сохранять монотонность решения при $\mathrm{C} = |a|\dfrac{\tau}{h} < 1$ [1, 2]. θ выбирается так [3], чтобы диссипативный член в первом дифференциальном приближении (п.д.п.) схемы (3) либо частично или полностью компенсировал дисперсионный член, либо давал вклад в п.д.п., дающий смену знака коэффициента при третьей производной:

$$\theta^n_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \left|u^n_{x,j+1/2}\right| \le \left|u^n_{x,j+1/2-s}\right| \ \text{ и } \ u^n_{x,j+1/2}u^n_{x,j+1/2-s} \ge 0, \\ \overline{\theta}\left(1 - \xi^n_{j+1/2}\right) & \text{при} \ \left|u^n_{x,j+1/2}\right| > \left|u^n_{x,j+1/2-s}\right| \ \text{ и } \ u^n_{x,j+1/2}u^n_{x,j+1/2-s} \ge 0, \\ \overline{\theta} & \text{при} \ u^n_{x,j+1/2}u^n_{x,j+1/2-s} < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$\overline{\theta} = \mathrm{const} > 0$, $s = \mathrm{sgn}\, a$, $\xi^n_{j+1/2} = u^n_{x,j+1/2-s}/u^n_{x,j+1/2}$.

Рассмотрим схему с переменными коэффициентами

$$u^{n+1}_j = b_{-1,j}u^n_{j-1} + b_{0,j}u^n_j + b_{1,j}u^n_{j+1}, \tag{5}$$

$b_{-1,j} = \dfrac{1 + æa_j}{2} > 0$, $b_{0,j} = 0$, $b_{1,j} = \dfrac{1 - æa_j}{2} > 0$, $æ = \dfrac{\tau}{h}$, где $a_j = a(x_j)$, для решения задачи Коши для уравнения $u_t + a(x)u_x = 0$, где $a(x)$ — строго возрастающая положительная ограниченная функция, $0 < a(x) < 1$, $a' > 0$, и для любого j выполнено условие устойчивости $æa_j < 1$ в равномерной норме по начальным данным.

Теорема 1. *Пусть для схемы (5) $b_{-1,j} + b_{0,j} + b_{1,j} = 1$ в каждом узле x_j. Тогда выполнение при всех j условий $b_{\pm 1,j} \geq 0$, $b_{-1,j} + b_{1,j-1} \leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы схема (5) сохраняла монотонность численного решения [3].*

Теорема 2. *Выполнение условий $C = |a|\dfrac{\tau}{h} < 1$ и $\theta_0 \leq \bar{\theta} \leq \dfrac{2}{3}\theta_L$ достаточно, чтобы схема (3) с параметром (4) сохраняла монотонность численного решения [2].*

Схема предиктор-корректор на неравномерной подвижной сетке для (1) имеет вид:

$$\frac{v^*_{j+1/2} - v^n_{j+1/2}}{\tau^*_{j+1/2}} + \left(\frac{\bar{a}}{J} v_q\right)^n_{j+1/2} = 0, \quad \frac{(Jv)^{n+1}_j - (Jv)^n_j}{\tau} + \frac{(\bar{a}^n v^*)_{j+1/2} - (\bar{a}^n v^*)_{j-1/2}}{h} = 0, \quad (6)$$

$$v^n_{j+1/2} = \frac{v^n_{j+1} + v^n_j}{2}, \quad \bar{a} = a - x_t, \quad x^n_{t,j+1/2} = \frac{x^n_{t,j} + x^n_{t,j+1}}{2}, \quad x^n_{t,j} = \frac{x^{n+1}_j - x^n_j}{\tau}, \quad (7)$$

$$J^n_{j+1/2} = x^n_{q,j+1/2} = \frac{x^n_{j+1} - x^n_j}{h}, \quad J^n_j = \frac{J^n_{j+1/2} + J^n_{j-1/2}}{2} = x^n_{q,j} = \frac{x^n_{j+1} - x^n_{j-1}}{2h}, \quad (8)$$

$h = 1/N$ — шаг равномерной сетки $\bar{Q}_h$ на $\bar{Q} = [0,\ 1]$, x^n_j — узлы неравномерной подвижной сетки на $\bar{\Omega} = [0,\ l]$, x^n_j являются образами $q_j \in \bar{Q}_h$ при некотором гладком невырожденном преобразовании $x = x(q,t)$, $x(0,t) = 0$, $x(1,t) = l$, для каждого t взаимно-однозначно отображающим $\bar{Q}$ на $\bar{\Omega}$, $J = x_q > 0$ — якобиан преобразования, x_t — скорость движения узлов, $v(q,t) = u(x(q,t),t)$. Каноническая форма схемы (3):

$$\frac{(Jv)^{n+1}_j - (Jv)^n_j}{\tau} + \frac{(\bar{a}v)^n_{j+1/2} - (\bar{a}v)^n_{j-1/2}}{h} -$$
$$- \frac{\tau}{2h}\left[\left((1+\theta)\frac{\bar{a}^2}{J} v_q\right)^n_{j+1/2} - \left((1+\theta)\frac{\bar{a}^2}{J} v_q\right)^n_{j-1/2}\right] = 0. \quad (9)$$

Условия устойчивости схемы (9) имеют вид $\theta^n_{j+1/2} \geq 0$, $\max\limits_{j=0,\ldots,N-1}\left(\sqrt{1+\theta}\,\mathrm{C}\right)^n_{j+1/2} \leq 1$, где $\mathrm{C}^n_{j+1/2} = \dfrac{\tau}{h}\left(\dfrac{|\bar{a}|}{J}\right)^n_{j+1/2} < 1$ — число Куранта. Для сохранения схемой (9) монотонности численного решения, достаточно [1] использовать, например,

$$\theta^n_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \left|\tilde{g}^n_{j+1/2}\right| \leq \left|\tilde{g}^n_{j+1/2-s}\right| \text{ и } \tilde{g}^n_{j+1/2} \cdot \tilde{g}^n_{j+1/2-s} \geq 0, \\ \left(\theta_0(1-\xi)\right)^n_{j+1/2} & \text{при } \left|\tilde{g}^n_{j+1/2}\right| > \left|\tilde{g}^n_{j+1/2-s}\right| \text{ и } \tilde{g}^n_{j+1/2} \cdot \tilde{g}^n_{j+1/2-s} \geq 0, \\ \theta^n_{0,j+1/2} & \text{при } \tilde{g}^n_{j+1/2} \cdot \tilde{g}^n_{j+1/2-s} < 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$s = \operatorname{sgn} \bar{a}^n_{j+1/2}, \quad \theta^n_{0,j+1/2} = \frac{1}{\mathrm{C}^n_{j+1/2}} - 1, \quad \tilde{g}^n_{j+1/2} = \left(|\bar{a}|(1-\mathrm{C})v_q\right)^n_{j+1/2}, \quad \xi^n_{j+1/2} = \frac{\tilde{g}^n_{j+1/2-s}}{\tilde{g}^n_{j+1/2}}.$$

Выполнение геометрического закона сохранения [16] является необходимым условием согласованности формул для характеристик подвижной неравномерной сетки [15] и гарантирует то, что схема (6), как и уравнение (1), имеет в качестве точного решения постоянную функцию. Простым методом построения любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках является вывод на основе дивергентной канонической формы (9) с помощью выбора θ [15]. В [15] на примере метода эквираспределения продемонстрированы некоторые проблемы построения адаптивных сеток для разрывных решений: например, в случае разрывной начальной функции резкое изменение длин ячеек начальной сетки в окрестности разрыва или отсутствие решения нелинейной задачи для вычисления координат узлов начальной сетки. Даже для TVD-схем возможен рост количества экстремумов решения [15], что может привести к чередованию длинных и коротких ячеек. Для устранения проблем может быть использована неявная процедура сглаживания [17] управляющей функции. Результаты решения задач [15] для уравнения переноса с разрывной и гладкой начальными функциями показывают преимущество использования монотонизации и подвижных адаптивных сеток.

2. Схемы для нелинейного скалярного уравнения

Схема предиктор-корректор [18] для нелинейного скалярного уравнения

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \tag{11}$$

состоит из аппроксимирующего уравнение для потоков $f_t + a(u)f_x = 0$ (получается умножением (11) на $a(u) = f_u(u)$) шага предиктор

$$\frac{f^*_{j+1/2} - \dfrac{1}{2}(f^n_{j+1} + f^n_j)}{\tau^*_{j+1/2}} + a^n_{j+1/2}\frac{f^n_{j+1} - f^n_j}{h} = 0, \tag{12}$$

где в $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ определяются потоки f^*, $f^n_j = f\left(u^n_j\right)$, $\tau^*_{j+1/2} = 0.5\tau(1+\theta^n_{j+1/2})$, τ — шаг по времени, $\theta^n_{j+1/2}$ — схемный параметр, и аппроксимирующего (11) шага корректор

$$\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + \frac{f^*_{j+1/2} - f^*_{j-1/2}}{h} = 0. \tag{13}$$

Способ вычисления $a^n_{j+1/2}$ определяется требованием сохранения для сеточных функций правила дифференцирования $f_x = a(u)u_x$. Это, например, сеточная функция [10]

$$a^n_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{f^n_{j+1} - f^n_j}{u^n_{j+1} - u^n_j} & \text{при} \quad u^n_{j+1} \neq u^n_j, \\ a(u^n_j) & \text{при} \quad u^n_{j+1} = u^n_j, \end{cases}$$

которая позволяет переписать шаг предиктор (12) в виде

$$f^*_{j+1/2} = \frac{f^n_{j+1} + f^n_j}{2} - \frac{\tau}{2}\Big((1+\theta)a^2u_x\Big)^n_{j+1/2} \tag{14}$$

и получить каноническую форму явных дивергентных двухслойных схем для (11) [18]:

$$\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + \frac{f^n_{j+1} - f^n_{j-1}}{2h} - \frac{\tau}{2h}\Big[\Big((1+\theta)a^2u_x\Big)^n_{j+1/2} - \Big((1+\theta)a^2u_x\Big)^n_{j-1/2}\Big] = 0, \tag{15}$$

Для $\theta = O(h)$ схема (15) аппроксимирует (11) со вторым порядком по τ и h. При $\theta = \text{const} \neq 0$ — с первым порядком на гладких решениях. Необходимое условие устойчивости для $a(u) = \text{const}$ [15], требует, в частности, $\theta \geq 0$. Далее предполагается $\theta^n_{j+1/2} \geq 0$. Для произвольного $\theta = O(h)$ схема (13), (12) не сохраняет монотонность численного решения. Используя п.д.п. схемы предиктор–корректор, параметр θ можно подобрать так, чтобы диссипативный член п.д.п. приводил к изменению дисперсионного члена в тех подобластях, где возможно появление осцилляций в численном решении:

$$\theta^n_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |g^n_{j+1/2}| \leq |g^n_{j+1/2-s}| \quad \text{и} \quad g^n_{j+1/2} \cdot g^n_{j+1/2-s} \geq 0, \\ (\theta_0(1-\xi))^n_{j+1/2} & \text{при} \quad |g^n_{j+1/2}| > |g^n_{j+1/2-s}| \quad \text{и} \quad g^n_{j+1/2} \cdot g^n_{j+1/2-s} \geq 0, \\ \theta^n_{0,j+1/2} & \text{при} \quad g^n_{j+1/2} \cdot g^n_{j+1/2-s} < 0, \end{cases} \tag{16}$$

$s = \operatorname{sgn} a^n_{j+1/2}$, $\xi^n_{j+1/2} = \dfrac{g_{j+1/2-s}}{g_{j+1/2}}$, $g^n_{j+1/2} = \Big(|a|(1-\mathrm{C})u_x\Big)^n_{j+1/2}$, и доказать что для $\mathrm{C}^n_{j+1/2} = |a^n_{j+1/2}|\dfrac{\tau}{h} < 1$, схема (13), (12), (16) сохраняет монотонность численного решения [3].

Лемма 1. *Схема (13), (12) сохраняет постоянное решение: если $u^n_j \equiv U_0 = const$, то и $u^{n+1}_j \equiv U_0$ [18].*

Для $f''(u) \geq 0$ и $U_l > U_r$ задача Римана для уравнения (11) с начальной функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} U_l, & x < x_0, \\ U_r, & x > x_0, \end{cases} \qquad U_l \neq U_r. \tag{17}$$

при $t > 0$ имеет физически корректное решение в виде ударной волны, которое удовлетворяет условию неубывания энтропии [8, 9]:

$$u(x,t) = \begin{cases} U_l & \text{при} \quad x < x_0 + Wt, \\ U_r & \text{при} \quad x > x_0 + Wt, \end{cases} \tag{18}$$

W — постоянная скорость движения скачка, определяемая из условия Ренкина-Гюгонио $W = \dfrac{f(U_r) - f(U_l)}{U_r - U_l}$. При $W = 0$ скачок является стационарным, $f(U_r) = f(U_l)$.

Лемма 2. *Схема (13), (12) сохраняет стационарный скачок [18].*

При $U_l < U_r$ решение (18) в виде ударной волны разрежения является для задачи (11), (17) нефизичным и нарушающим условие неубывания энтропии, а устойчивым и не нарушающим энтропийное условие решением является центрированная волна разрежения [8, 9]. Исследование п.д.п. [18] показывает, что при малых значениях a и при $u_x > 0$ схемная вязкость становится отрицательной, что и является причиной нефизичного решения при расчете волн разрежения с критической точкой $a = 0$. Обеспечение неотрицательности схемной вязкости приводит к формуле для шага предиктор (14):

$$f^*_{j+1/2} = \frac{f^n_{j+1} + f^n_j}{2} - \frac{\tau}{2}\Big((a^2 + \psi)u_x\Big)^n_{j+1/2}, \tag{19}$$

$$\psi^n_{j+1/2} = \begin{cases} \delta^n_{j+1/2} & \text{при} \quad \begin{cases} (\theta a^2)^n_{j+1/2} \leq \delta^n_{j+1/2}, \\ \mathrm{C}^n_{j+1/2} < 1/\sqrt{3}, \quad u^n_{x,j+1/2} > 0, \end{cases} \\ \left(\theta a^2\right)^n_{j+1/2} & \text{в других случаях}, \end{cases} \tag{20}$$

функция θ вычисляется по формуле (16),

$$\delta^n_{j+1/2} = \frac{h}{æ}\left((1-3\mathrm{C}^2)u_x\right)^n_{j+1/2}. \tag{21}$$

На подвижной сетке схема предиктор–корректор для уравнения (11) [18] имеет вид:

$$\Big(\frac{\hat f - f^n}{\tau^*}\Big)_{j+1/2} + \Big(\frac{\bar a^2}{J}u_q\Big)^n_{j+1/2} = 0, \quad \bar a = a - x_t, \tag{22}$$

$$\frac{(Ju)^{n+1}_j - (Ju)^n_j}{\tau} + \frac{\Big(\hat f - (x_t u)^n\Big)_{j+1/2} - \Big(\hat f - (x_t u)^n\Big)_{j-1/2}}{h} = 0. \tag{23}$$

Выбор θ для монотонизации схемы (22), (23) можно также сделать с помощью п.д.п. схемы [18] и использовать формулу (16) для равномерной сетки, но с

$$s = \operatorname{sgn}\bar a^n_{j+1/2}, \quad g^n_{j+1/2} = \left(|\bar a|(1-\mathrm{C})u_q\right)^n_{j+1/2}, \quad \mathrm{C}^n_{j+1/2} = æ\Big(\frac{|\bar a|}{J}\Big)^n_{j+1/2} < 1, \tag{24}$$

при этом схема (22), (23), (16) сохраняет монотонность численного решения. Энтропийная коррекция приводит к формуле для шага предиктор (22):

$$\hat f_{j+1/2} = f^n_{j+1/2} - \frac{\tau}{2}\Big((\frac{\bar a^2}{J} + \psi)u_q\Big)^n_{j+1/2},$$

$$\psi^n_{j+1/2} = \begin{cases} \delta^n_{j+1/2} & \text{при} \begin{cases} \Big(\theta\dfrac{\bar a^2}{J}\Big)^n_{j+1/2} \le \delta^n_{j+1/2}, \\ \mathrm{C}^n_{j+1/2} < 1/\sqrt{3}, \quad u^n_{q,j+1/2} > 0, \end{cases} \\ \Big(\theta\dfrac{\bar a^2}{J}\Big)^n_{j+1/2} & \text{в других случаях,} \end{cases} \tag{25}$$

функция $\delta^n_{j+1/2}$ вычисляется по (21) с заменой u_x на u_q и использованием $\mathrm{C}^n_{j+1/2}$ из (24). Из одношаговой формы схемы (22), (23) в дивергентном виде с помощью выбора θ могут получены любые явные двухслойные дивергентные схемы на подвижных сетках [18]. Для подвижных сеток лемма 1 справедлива, а лемма 2 принимает вид [18]:

Лемма 3. *При условии $x^n_{t,j_0+1/2} = W$ схема предиктор–корректор (22), (23) сохраняет движущийся скачок (17), (18).*

При условии $\mathrm{C}^n_{j+1/2} = |a^n_{j+1/2}|\dfrac{\tau}{h} < 1$ схема Лакса для невязкого уравнения Бюргерса ($f(u) = u^2/2$) является TVD-схемой, но увеличивает количество экстремумов, а противопоточная схема и монотонизированная схема предиктор-корректор без/с коррекцией схемной вязкости (также TVD-схемы) количество экстремумов не увеличивают [18].

Результаты решения задачи для невязкого уравнения Бюргерса с непрерывной начальной функцией, где точным решением является центрированная волна сжатия, в момент градиентной катастрофы генерирующая в зависимости от значений входных данных стационарный или движущийся скачок, показывают преимущество использования подвижных адаптивных сеток [15]. Результаты решения задачи Римана с точным решением в виде волны разрежения показывают преимущество использования подвижных адаптивных сеток и энтропийной коррекции для схемы предиктор-корректор [15].

В [18] схема предиктор-корректор на неравномерной подвижной сетке выписана и для неоднородного уравнения $u_t + [f(u)]_x = g(x,t,u)$. Результаты численного решения начально-краевой задачи с известным точным решением для неоднородного невязкого уравнения Бюргерса показывают преимущество использования адаптивных сеток [18].

3. Схема предиктор-корректор для нелинейных уравнений мелкой воды

В новых координатах (q,t) система уравнений мелкой воды, описывающая течение несжимаемой жидкости со свободной границей, имеет вид [18]:

$$\mathbf{u}_t + \frac{1}{J}\left(\mathbf{f}_q - x_t\mathbf{u}_q\right) = \frac{1}{J}\mathbf{G}, \qquad \mathbf{f}_t + \frac{1}{J}\mathcal{A}\left(\mathbf{f}_q - x_t\mathbf{u}_q\right) = \frac{1}{J}\mathcal{A}\mathbf{G}, \tag{26}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + H^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(q,t,\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ Hh_q \end{pmatrix},$$

t — время, $u(q,t)$ — скорость, $\eta(q,t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня, $h(q,t)$ — глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной свободной границы, $H = \eta + h$ — полная глубина, $\mathcal{A} = \dfrac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ — матрица Якоби.

Схема предиктор–корректор для (26) является аналогом схемы для неоднородного нелинейного скалярного уравнения. На шаге предиктор используются аппроксимации уравнений (26), записанных в характеристической форме [18]. Важным вопросом является способ аппроксимации матрицы Якоби. Аналогично скалярному случаю потребуем $\mathbf{f}^n_{q,j+1/2} = (\mathcal{A}\mathbf{u}_q)^n_{j+1/2}$, чему удовлетворяет, например, следующая матрица

$$\mathcal{A}^n_{j+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^n_j u^n_{j+1} + H^n_{j+1/2} & 2u^n_{j+1/2} \end{pmatrix} = (\mathcal{R}\Lambda\mathcal{L})^n_{j+1/2}\,, \tag{27}$$

с собственными значениями $\lambda^n_{k,j+1/2} = u^n_{j+1/2} \mp \sqrt{\left(u^n_{j+1/2}\right)^2 - u^n_j u^n_{j+1} + H^n_{j+1/2}}$, $k = 1,2$, $H^n_{j+1/2} = (H^n_j + H^n_{j+1})/2$, $u^n_{j+1/2} = (u^n_j + u^n_{j+1})/2$,

$$\mathcal{R}^n_{j+1/2} = \left(\mathcal{L}^n_{j+1/2}\right)^{-1} = \frac{\lambda^n_{2,j+1/2} - \lambda^n_{1,j+1/2}}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda^n_{1,j+1/2} & \lambda^n_{2,j+1/2} \end{pmatrix}.$$

Схема предиктор-корректор имеет вид [18]:

$$\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2} = \left[\mathbf{f} - \frac{\tau}{2}\Big(\frac{1}{J}\mathcal{R}\mathcal{D}\bar{\Lambda}(\bar{\Lambda}\mathbf{P} - \mathcal{L}\mathbf{G})\Big)\right]^n_{j+1/2}, \tag{28}$$

$$\frac{(J\mathbf{u})^{n+1}_j - (J\mathbf{u})^n_j}{\tau} + \frac{\left(\hat{\mathbf{f}} - (x_t\mathbf{u})^n\right)_{j+1/2} - \left(\hat{\mathbf{f}} - (x_t\mathbf{u})^n\right)_{j-1/2}}{h} = \mathbf{G}^*_j, \tag{29}$$

$\bar{\Lambda}^n_{j+1/2} = \Lambda^n_{j+1/2} - x^n_{t,j+1/2}\mathcal{E}$, $\mathbf{P}^n_{j+1/2} = (\mathcal{L}\mathbf{u}_q)^n_{j+1/2}$, $\mathcal{E}$ — единичная матрица, функции $\theta^k_{j+1/2}$ вычисляются по формуле типа (16):

$$\theta^k_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \left|g^k_{j+1/2}\right| \le \left|g^k_{j+1/2-s_k}\right| \text{ и } g^k_{j+1/2}\cdot g^k_{j+1/2-s_k} \ge 0, \\ \theta^k_{0,j+1/2}(1-\xi^k_{j+1/2}) & \text{при } \left|g^k_{j+1/2}\right| > \left|g^k_{j+1/2-s_k}\right| \text{ и } g^k_{j+1/2}\cdot g^k_{j+1/2-s_k} \ge 0, \\ \theta^k_{0,j+1/2} & \text{при } g^k_{j+1/2}\cdot g^k_{j+1/2-s_k} < 0, \end{cases} \tag{30}$$

$\xi^k_{j+1/2} = g^k_{j+1/2-s_k}/g^k_{j+1/2}$, $g^k_{j+1/2} = \Big(|\bar\lambda_k|(1-\mathrm{C}_k)p_k\Big)^n_{j+1/2}$, $\mathrm{C}^n_{k,j+1/2} = \text{æ}\Big(\ |\bar\lambda_k|/J\ \Big)^n_{j+1/2} < 1$, $\theta^k_{0,j+1/2} = 1/\mathrm{C}^n_{k,j+1/2} - 1$, $p^n_{k,j+1/2}$ — компоненты вектора $\mathbf{P}^n_{j+1/2}$, $\bar\lambda^n_{k,j+1/2}$ — диагональные элементы $\bar\Lambda^n_{j+1/2}$, $s_k = \mathrm{sgn}\ \bar\lambda^n_{k,j+1/2}$, $\mathbf{G}^*_j = \begin{pmatrix} 0 \\ H^*_j h^*_{q,j}\end{pmatrix}$, $k=1,2$, H^*_j определяется как [19]

$$\begin{aligned}\frac{H^*_j - \tilde H^n_j}{\tau/2} &+ \Big[\frac{1+\theta^1}{J(\lambda_2-\lambda_1)}\Big(\bar\lambda_1\lambda_2 H_q - \bar\lambda_1(Hu)_q + \tilde H h_q\Big) - \\ &- \frac{1+\theta^2}{J(\lambda_2-\lambda_1)}\Big(\lambda_1\bar\lambda_2 H_q - \bar\lambda_2(Hu)_q + \tilde H h_q\Big)\Big]^n_j = 0,\end{aligned} \tag{31}$$

где используются центральные разности и обозначения $\tilde u^n_j = (u^n_{j-1}+u^n_{j+1})/2$, $f^n_{q,j} = (f^n_{j+1} - f^n_{j-1})/2h$, $u^n_{q,j} = (u^n_{j+1}-u^n_{j-1})/2h$, функции θ^k_j вычисляются по формуле (30), но по компонентам $\mathbf{P}^n_j$ в целых узлах, $h^*_{q,j} = (h^*_{j+1/2} - h^*_{j-1/2})/h$, $h^*_{j\pm1/2} = \dfrac{1}{4}\Big[h(x^n_j) + h(x^n_{j\pm1}) + h(x^{n+1}_j) + h(x^{n+1}_{j\pm1})\Big]$. Для нелинейных уравнений мелкой воды не удается строго обосновать свойство сохранения монотонности численного решения, поэтому особенно важны исследование свойств схемы и численное тестирование.

Лемма 4. *Схема (28)–(31) сохраняет состояние покоя жидкости: если* $\eta^n_j \equiv 0$, $H^n_j = h(x_j)$, $u^n_j \equiv 0$, *то и* $\eta^{n+1}_j \equiv 0$, $H^{n+1}_j = h(x_j)$, $u^{n+1}_j \equiv 0$ *[19].*

Лемма 5. *Для плоского горизонтального дна* $h(x) \equiv h_0 = \mathrm{const}$ *схема (28)–(31) сохраняет постоянное течение жидкости: если* $H^n_j \equiv H_0 = \mathrm{const}$, $u^n_j \equiv u_0 = \mathrm{const}$, *то* $H^{n+1}_j \equiv H_0$, $u^{n+1}_j \equiv u_0$ *[19].*

Для $h(x) \equiv h_0 = \mathrm{const}$ нелинейные уравнения мелкой воды имеют разрывное решение — движение устойчивого гидравлического скачка, обращенного вправо:

$$H(x,t) = \begin{cases} H_l & \text{при} \quad x \le x_0 + Wt, \\ H_r & \text{при} \quad x > x_0 + Wt, \end{cases} \qquad u(x,t) = \begin{cases} U_l & \text{при} \quad x \le x_0 + Wt, \\ U_r & \text{при} \quad x > x_0 + Wt, \end{cases} \tag{32}$$

где $H_l > H_r$, W — скорость движения скачка, $U_l = U_r + (H_l - H_r)\sqrt{(H_l+H_r)/(2H_lH_r)}$, $W = U_r + \sqrt{(H_l/H_r)(H_l+H_r)/2}$. На скачке выполняется соотношение $W(H_r - H_l) = H_rU_r - H_lU_l$. Скачок является стационарным, если $W = 0$.

Лемма 6. *Схема (28)–(31) сохраняет стационарный скачок (32).*

Результаты численного решения задачи о разрушении плотины на плоском горизонтальном дне с известным точным решением демонстрируют преимущества использования подвижных адаптивных сеток и энтропийной коррекции схемы. В данной работе во всех тестовых задачах адаптивная сетка строилась методом эквираспределения [15] с использованием неявной процедуры сглаживания управляющей функции.

Список литературы

[1] Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. Об использовании дифференциального приближения при построении монотонных схем // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. Спец. выпуск: Тр. Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. С. 139–149.

[2] Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S. Construction of monotonic schemes by the differential approximation method // Russian J. of Numerical Analysis and Math. Modelling. 2005. Vol. 20, No. 5. P. 463–481.

[3] Шокин Ю.И., Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. О монотонизации явной схемы предиктор-корректор // Вестник КазНУ. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 2. Спец. выпуск. С. 103–114.

[4] Остапенко В.В. О монотонности разностных схем // Сибирский матем. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1111–1126.

[5] Breuss M. An analysis of the influence of data extrema on some first and second order central approximations of hyperbolic conservation laws // ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 2005. Vol. 39, No. 5. P. 965–993.

[6] LeFloch P.G., Liu J.-G. Generalized monotone schemes, discrete paths of extrema, and discrete entropy conditions // Math. Comp. 1998. Vol. 68. No. 168. P. 1025–1055.

[7] Oleinik O. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations // Amer. Math. Soc. Transl. 1957. Ser. 2, Vol. 26. P. 95-172.

[8] LeVeque R.J. Numerical methods for conservation laws. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2008.

[9] Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Springer-Verlag, Berlin/New-York, 2009.

[10] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comput. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357–393.

[11] Roe P. L. Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1992. Vol. 13, No. 2. P. 611–630.

[12] Osher T.S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. Numer. Anal. I984. Vol. 21, No. 2. P. 217-235.

[13] Tadmor E. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes // Math. Comp. 1984. Vol. 43. No. 168. P. 369-381.

[14] Яушев И.К. О численном расчёте нестационарных течений газа в одномерном приближении в каналах со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Техн. науки. 1967. Т. 8, № 2. С. 39–48.

[15] Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 79–98.

[16] Trulio J.G., Tigger K.R. Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations in an arbitrary time-dependent coordinate system // Tech. Rep. UCLR-6522. Univ. of California, Lawrence Radiation Laboratory. 1961.

[17] Похилко В.И., Тишкин В.Ф. Однородный алгоритм расчёта разрывных решений на адаптивных сетках // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 11. С. 25–40.

[18] Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Принято в печать.

[19] Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S. Predictor–corrector scheme for the solution of shallow water equations // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2006. Vol. 21, No. 5. P. 459–479.