Понятие триткани В.Бляшке и инварианты трехканального изображения

О.В. Самарина, В.В. Славский
ЮГУ, ЮНИИИТ

Введение. При автоматизированной цифровой обработке многоканальных изображений (полученных при космическом зондировании, в геофизике, в медицине и.т.д.) возникает естественная задача определения инвариантных характеристик изображения. Так как условия съемки: освещенность, ориентация камеры, положение объекта в различные моменты съемки отличаются, то желательно, чтобы выбор инвариантов и характерных точек изображения не зависел от качества, ориентации, масштаба снимка. Другими словами был бы инвариантен относительно определенной группы преобразований снимка. Выбор группы преобразований зависит от целей исследования, если например, интерес представляют морфологические особенности изображения органов в медицине, то группа преобразований должна быть достаточно широкой, включать в себя кроме аффинных также различные некоторые классы диффеоморфизмов.

В математической постановке трехканальное изображение представляет собой 3 неотрицательных функции $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ в некоторой области D на плоскости. С точки зрения распознавания образов наибольший интерес представляют не сами значения этих функций, а геометрия семейства линий уровня:

$$L_1 = \{(x, y) : u_1(x, y) = const\}$$
$$L_2 = \{(x, y) : u_2(x, y) = const\}. \tag{1}$$
$$L_3 = \{(x, y) : u_3(x, y) = const\}$$

Будем называть это трехпараметрическое семейство линий топографической сеткой (или тритканью) данного изображения.

В. Бляшке предложил рассматривать «топологическую» дифференциальную геометрию, т. е. изучать дифференциально-геометрические (локальные!) свойства различных объектов, инвариантные относительно произвольных взаимно-однозначных и взаимно-непрерывных (топологических) преобразований [1]. При этом использование классического аппарата дифференциальной геометрии заставляет ограничиться преобразованиями, задаваемыми функциями, дифференцируемыми достаточное число раз или даже аналитическими.

Формы Пфаффа ткани. Пусть триткань Σ изображения состоит из семейства кривых Ξ_j ткани записываемых уравнениями:

$$u_j(x, y) = u_j = const, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Полные дифференциалы du_j умноженные каждый на множитель

$$g_j(x, y) \neq 0$$

дадут нам формы Пфаффа

$$\sigma_1 = g_1 du_1,\ \sigma_2 = g_2 du_2,\ \sigma_3 = g_3 du_3, \tag{3}$$

Кривые Ξ_j определяются дифференциальным уравнением $\sigma_j = 0$.

Множители g_j – произвольные отличные от нуля, в частности, можно выбрать так, что для всех точек (x, y) области D и всех направлений $dx : dy$ будет выполняться уравнение

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \tag{4}$$

Для «нормированных» таким образом форм Пфаффа остается возможным еще одна «перенормировка» при помощи общего множителя $g(x, y) \neq 0$:

$$\sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{g} \tag{5}$$

Найдем явный вид множителей g_j. Для этого определим вектор функции $U : D \to R^3$, $G : D \to R^3$

$$U(x, y) = \{u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)\},$$
$$G(x, y) = \{g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y)\}.$$

Тогда условие нормировки эквивалентно системе равенств

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial x}, G \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial U}{\partial y}, G \right\rangle = 0$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов. Воспользуемся векторным произведением и положим

(6) $$G = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right].$$

Отсюда получим компоненты вектора G:

$$G = \left(\begin{array}{c} u_3{}^{(0,1)}(x,y)u_2{}^{(1,0)}(x,y) - u_2{}^{(0,1)}(x,y)u_3{}^{(1,0)}(x,y) \\ u_1{}^{(0,1)}(x,y)u_3{}^{(1,0)}(x,y) - u_3{}^{(0,1)}(x,y)u_1{}^{(1,0)}(x,y) \\ u_2{}^{(0,1)}(x,y)u_1{}^{(1,0)}(x,y) - u_1{}^{(0,1)}(x,y)u_2{}^{(1,0)}(x,y) \end{array} \right).$$

Следовательно

$$\sigma_1 = du_1 \left| \begin{array}{cc} u_2^{(1,0)} & u_2^{(0,1)} \\ u_3^{(1,0)} & u_3^{(0,1)} \end{array} \right|,$$

$$\sigma_2 = du_2 \left| \begin{array}{cc} u_3^{(1,0)} & u_3^{(0,1)} \\ u_1^{(1,0)} & u_1^{(0,1)} \end{array} \right|,$$

$$\sigma_3 = du_3 \left| \begin{array}{cc} u_1^{(1,0)} & u_1^{(0,1)} \\ u_2^{(1,0)} & u_2^{(0,1)} \end{array} \right|.$$

Из условия нормировки (4) для форм σ_j следует, что

$$\sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_3 \wedge \sigma_1 = \sigma_1 \wedge \sigma_2,$$

выражение

(7) $$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \Omega$$

называется "поверхностным элементом" ткани

$$\Omega = \left| \begin{array}{cc} u_1^{(1,0)} & u_1^{(0,1)} \\ u_2^{(1,0)} & u_2^{(0,1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} u_2^{(1,0)} & u_2^{(0,1)} \\ u_3^{(1,0)} & u_3^{(0,1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} u_3^{(1,0)} & u_3^{(0,1)} \\ u_1^{(1,0)} & u_1^{(0,1)} \end{array} \right| dx \wedge dy$$

При этом, однако, Ω зависит от нормировки, а именно

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{g^2}$$

Внешние дифференциалы форм Пфаффа σ_j ткани Σ, отличаются лишь скалярным множителем h_j от "поверхностного элемента" Ω ткани:

(8) $$d\sigma_j = h_j \Omega.$$

Из условия (4) следует, что

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Величины h_j называются символами Кристоффеля триткани. Для того, чтобы выписать формулы для h_j введем обозначения

$$\nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}, \quad \nabla^\perp f = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\},$$

$$d^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} a_1 b_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} a_2 b_2$$

$$\left\langle \nabla^\perp f, \nabla g \right\rangle = \left| \begin{array}{cc} f^{(1,0)} & f^{(0,1)} \\ g^{(1,0)} & g^{(0,1)} \end{array} \right|$$

в этих обозначениях

(9)
$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{d^2u_2\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_3\right) - d^2u_3\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_2\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}\\
h_2 &= \frac{d^2u_3\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_1\right) - d^2u_1\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_3\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}\\
h_3 &= \frac{d^2u_1\left(\nabla^\perp u_3, \nabla^\perp u_2\right) - d^2u_2\left(\nabla^\perp u_3, \nabla^\perp u_1\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}
\end{aligned}
$$

Образуем форму Пфаффа

(10)
$$\gamma = h_3\sigma_2 - h_2\sigma_3 = h_1\sigma_3 - h_3\sigma_1 = h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2$$

которая называется "связностью" ткани Σ, то при перенормировке форма γ преобразуется так ([1]):

(11)
$$\gamma^* = \gamma - d\ln g$$

Таким образом, связность изменяется только на полный дифференциал; следовательно, в силу (11) интеграл

(12)
$$\int_D d\gamma = \int_{\partial D}\gamma$$

инвариантен относительно перенормировки. Точно так же инвариантен и "нормированный поверхностный элемент"

(13)
$$d\gamma = \kappa\Omega$$

Скаляр κ мы будем называть "кривизной ткани" или коротко "кривизной". В силу инвариантности $d\gamma$ при перенормировке κ изменяется так:

(14)
$$\kappa^* = g^2\kappa$$

Это обстоятельство мы выражаем, утверждая, что κ является дифференциальным инвариантом "веса" -два. Интегральная формула (12) напоминает формулу Гаусса —

(15)
$$
\begin{aligned}
\gamma =& h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2 =\\
=& \frac{d^2u_3\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_1\right) - d^2u_1\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_3\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}du_1-\\
-& \frac{d^2u_2\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_3\right) - d^2u_3\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_2\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle}du_2
\end{aligned}
$$

Следовательно

(16)
$$
\begin{aligned}
d\gamma =& d\left[\frac{d^2u_3\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_1\right) - d^2u_1\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_3\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}\right]\wedge du_1-\\
-& d\left[\frac{d^2u_2\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_3\right) - d^2u_3\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_2\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle}\right]\wedge du_2\\
=& \left\langle\nabla^\perp A, \nabla u_1\right\rangle dx\wedge dy - \left\langle\nabla^\perp B, \nabla u_2\right\rangle dx\wedge dy
\end{aligned}
$$

где функции A и B определены формулами

(17)
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{d^2u_3\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_1\right) - d^2u_1\left(\nabla^\perp u_2, \nabla^\perp u_3\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}\\
B &= \frac{d^2u_2\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_3\right) - d^2u_3\left(\nabla^\perp u_1, \nabla^\perp u_2\right)}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle}
\end{aligned}
$$

Следовательно для кривизны 3-ткани получаем формулу:

(18)
$$\kappa = \frac{\left\langle\nabla^\perp A, \nabla u_1\right\rangle - \left\langle\nabla^\perp B, \nabla u_2\right\rangle}{\langle\nabla^\perp u_1, \nabla u_2\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_2, \nabla u_3\rangle\cdot\langle\nabla^\perp u_3, \nabla u_1\rangle}$$

Следствие. *Пусть* $u_1(x,y) = x$, $u_2(x,y) = y$ *и* $u_3(x,y)$ *– произвольная функция. Тогда для элемента площади (7) и кривизны (18) получим формулы:*

$$\Omega = u_3{}^{(1,0)}(x,y)u_3{}^{(0,1)}(x,y)dx \wedge dy,$$

$$\kappa = \frac{2\left(u_3{}^{(1,1)}\right)^2 + u_3{}^{(0,1)}u_3{}^{(2,1)} + u_3{}^{(1,0)}u_3{}^{(1,2)}}{u_3{}^{(1,0)}u_3{}^{(0,1)}}$$

Заключение. В данной работе исследованы инварианты трехканальных изображений относительно максимально широкой ("топологической") группы преобразований, основанные на геометрии триткани разработанной В.Бляшке [1]. Приведены формулы для вычислений инвариантных характеристик трехканального изображения пригодные для приложений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

Библиографический список

[1] *Бляшке В.* Введение в геометрию тканей. Пер. с нем. – М.: Физмат, 1959. 144 стр.

[2] *Виноградов А.М., Юмагужин В.А.* Дифференциальные инварианты тканей на 2-мерных многообразиях// Математические заметки, 1990, том 48, вып.1, стр.46-68.