

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОСТИ.

Бельмецев Н. Ф., Бытев В. О.

625003, Тюменский государственный университет, weqsmachine@gmail.com

В данной работе представлены предварительные результаты исследования на гиперболичность системы уравнений нестационарной линейной теории упругости (см. [4, 5]) для линейной модели асимметричной упругости в случае двух независимых пространственных координат, описанной в [2]. Получены ограничения на новый параметр μ_0 , в которых следует проводить дальнейшее исследование применимости асимметричной модели упругости. В рамках рассматриваемой модели найдена группа контактных преобразований уравнения Гамильтона–Якоби.

Общий вид тензора напряжений в случае линейной зависимости между компонентами его и аргументами, от которых этот тензор зависит, получен ранее [2]:

$$T = \lambda I \operatorname{div} \vec{u} + 2M\varepsilon^0 \quad (1)$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — модули упругости, μ_0 — вещественный параметр, I — единичная матрица,

$$M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$2\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} u_x - v_y & u_y + v_x \\ u_y + v_x & v_y - u_x \end{pmatrix}.$$

Будем использовать обозначения: $\vec{u} = (u, v)^T \equiv (u^1, u^2)^T$ — вектор смещения, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ — пространственные координаты, $\varepsilon^{ij} = (1/2)(\partial u^i / \partial x^j + \partial u^j / \partial x^i)$ — компоненты тензора деформаций ($i, j = 1 \div 2$) с условием совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon^{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon^{12}}{\partial x \partial y}$$

Из (1) получаем покомпонентную запись тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = (\mu + \lambda')\varepsilon^{11} + 2\mu_0\varepsilon^{12} + (\lambda' - \mu)\varepsilon^{22}, \quad (2)$$

$$\sigma_{12} = \mu_0\varepsilon^{11} + 2\mu\varepsilon^{12} + \mu_0\varepsilon^{22}, \quad (3)$$

$$\sigma_{22} = (\lambda' - \mu)\varepsilon^{11} - 2\mu_0\varepsilon^{12} + (\lambda' + \mu)\varepsilon^{22}, \quad (4)$$

где $\lambda' \equiv \lambda + \mu$. При $\mu_0 = 0$ выражения (2)–(4) совпадают с классическими выражениями связи компонент тензора напряжений с компонентами тензора деформаций.

Матрица коэффициентов системы (2)–(4):

$$S = \begin{pmatrix} \lambda' + \mu & 2\mu_0 & \lambda' - \mu \\ -\mu_0 & 2\mu & \mu_0 \\ \lambda' - \mu & -2\mu_0 & \lambda' + \mu \end{pmatrix}$$

имеет определитель

$$\det S = 8\lambda'(\mu_0^2 + \mu^2) > 0, \quad \text{если} \quad \lambda' \equiv \mu + \lambda > 0.$$

Разрешая (2)–(4) относительно ε^{ij} ($i, j = 1 \div 2$), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{11} &= \frac{\mu_0^2 + \mu(\lambda + 2\mu)\sigma_{11}}{4(\lambda + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)} - \frac{\mu_0\sigma_{12}}{2(\mu_0^2 + \mu^2)} + \frac{\mu_0^2 - \mu\lambda\sigma_{22}}{4(\lambda + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)}, \\ \varepsilon^{12} &= \frac{\mu_0\sigma_{11}}{4(\mu_0^2 + \mu^2)} + \frac{\mu\sigma_{12}}{2(\mu_0^2 + \mu^2)} - \frac{\mu_0\sigma_{22}}{4(\mu_0^2 + \mu^2)}, \\ \varepsilon^{22} &= \frac{\mu_0^2 - \mu\lambda\sigma_{11}}{4(\lambda + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)} + \frac{\mu_0\sigma_{12}}{2(\mu_0^2 + \mu^2)} + \frac{\mu_0^2 + \mu(\lambda + 2\mu)\sigma_{22}}{4(\lambda + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)}. \end{aligned}$$

Исходная система нестационарной линейной теории упругости, как известно (см. [5]), имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\dot{u}_1 = \dot{u}$, $\dot{u}_2 = \dot{v}$ — компоненты вектора скорости перемещения ($i, j = 1 \div 2$).

Введем модуль всестороннего сжатия $K = \lambda' - (1/3)\mu = \lambda + (2/3)\mu$, два модуля сдвига μ и μ_0 , а также обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3\mu_0^2 + \mu(3K + 4\mu)}{4(3K + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)}, & \beta &= \frac{3\mu_0^2 + \mu(2\mu - 3K)}{4(3K + \mu)(\mu_0^2 + \mu^2)}, \\ \gamma &= \frac{\mu_0}{4(\mu_0^2 + \mu^2)}, & \delta &= \frac{\mu}{2(\mu_0^2 + \mu^2)}. \end{aligned}$$

Учитывая $\lambda' = \lambda + \mu$, получаем матричную запись для (5), (6):

$$A \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + C \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

где $\vec{V} = (\dot{u}, \dot{v}, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22})^T$, а матрицы коэффициентов следующие:

$$A = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -2\gamma & \beta \\ 0 & 0 & 2\gamma & 2\delta & -2\gamma \\ 0 & 0 & \beta & 2\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и C симметричны, а A — симметрична тогда и только тогда, когда $\mu_0 \equiv 0$.

Пусть $\vec{\nu} = (\tau, \xi, \eta)$ — вектор нормали к характеристической поверхности для системы (7) (подробнее см. в [4]). Теперь запишем характеристическое уравнение для системы (7):

$$\det \|\tau A + \xi B + \eta C\| = 0 \quad (9)$$

Уравнение (9) является полиномом пятой степени относительно τ и имеет корни:

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{1,2} = \pm C_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tau_{3,4} = \pm C_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\mu + \lambda)^2 - 4\mu_0^2}},$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) - \sqrt{(\mu + \lambda)^2 - 4\mu_0^2}}. \quad (10)$$

Утверждение 1 Система уравнений (7):

$$A \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + C \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0$$

где $\vec{V} = (\dot{u}, \dot{v}, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22})^T$, а матрицы A, B, C имеют вид (8), является гиперболической тогда и только тогда, когда выполнены неравенства:

$$\mu > 0, \quad \mu + \lambda > 0, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \leq \mu_0 \leq \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \quad (12)$$

и t -гиперболической, если неравенства (12) строгие.

Утверждение 2 Характеристические поверхности системы уравнений (7), содержащие вектор $(1, 0, 0)$ в пространстве $\{\tau, \xi, \eta\}$ задаются уравнениями:

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\mu + \lambda)^2 - 4\mu_0^2}} \quad (13)$$

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) - \sqrt{(\mu + \lambda)^2 - 4\mu_0^2}} \quad (14)$$

Выражения (13), (14) при $\mu_0 = 0$ совпадают с соответствующими выражениями описанными Годуновым С. К. [4]. Внутри характеристического конуса τ_2 предполагается выполнение теоремы единственности.

Аналог уравнений Lamè (6) для линейной асимметричной модели упругости, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (u_x + v_y) - \mu \nabla^2 u - \mu_0 \nabla^2 v &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} (u_x + v_y) - \mu \nabla^2 v + \mu_0 \nabla^2 u &= 0,\end{aligned}$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа. Характеристическое уравнение (по книге Петровского И. Г. [9]) данной системы уравнений имеет только четыре действительных и различных корня:

$$\tau_{1,2} = \pm C_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tau_{3,4} = \pm C_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

в случае выполнения (11) и ограничений на μ_0 :

$$-\frac{1}{2}(\lambda + \mu) < \mu_0 < \frac{1}{2}(\lambda + \mu). \quad (15)$$

Константы C_1, C_2 определены равенствами (10).

Внутренней полый конуса, содержащей вектор $\tau = 1, \xi = 0, \eta = 0$, будет верхняя половина конуса:

$$\tau^2 - \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2\rho_0} \left((\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - (2\mu_0)^2} \right) = 0.$$

Это означает, что матрицы $\|\tau A + \xi B + \eta C\|$, будут неотрицательно определены, если

$$\tau - \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - (2\mu_0)^2}} \geq 0.$$

В этом случае, функция Гамильтона определяется равенством:

$$H(\xi, \eta) = -\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - (2\mu_0)^2}}.$$

Всюду предполагается выполнение неравенств (15).

Хорошо известно (см., например, [4]), что задача построения поверхности (характеристики) с уравнением $\varphi(t, x, y) = 0$, на которой неотрицательна квадратичная форма $([\varphi_t A + \varphi_x B + \varphi_y C] \vec{V}, \vec{V})$ (условия неотрицательности для данной модели пока не определены), сводится к решению задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с начальным условием:

$$\varphi_t = -H(\varphi_x, \varphi_y), \quad \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y).$$

Введем постоянную C_0 равенством:

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sqrt{(\lambda + 3\mu) + \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - (2\mu_0)^2}}$$

Учитывая выражение для функции Гамильтона, получаем классическую задачу Коши (см. [4], С. 168–177) для нахождения возможной поверхности $S = \{(t, x, y) : \varphi(t, x, y) = 0\}$:

$$\varphi_t - C_0 \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = 0; \quad (16)$$

$$\varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y).$$

Эта поверхность $\varphi(t, x, y) = 0$ ограничивает область единственности решения системы уравнений (7) с начальными данными, которые известны (при $t = 0$) в области $\varphi_0(x, y) \leq 0$.

Обратимся к вопросу о том как будет изменяться граница области $\Omega = \{(x, y) : \varphi(t, x, y) < 0, t = \text{const}\}$ с течением времени. Для этого введем обозначения:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \partial_x \varphi(x, y), \quad p_2 = \partial_y \varphi(x, y),$$

$$H(p_1, p_2) = -C_0 \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

и запишем уравнения бихарактеристики, проходящей через точку $(q_{10}, q_{20}) = (x_0, y_0) \in \{(x, y) : \varphi_0(x, y) = 0\}$:

$$\frac{dq_1}{dt} = H_{p_1} = -C_0 \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -H_{q_1} \equiv 0,$$

$$\frac{dq_2}{dt} = H_{p_2} = -C_0 \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -H_{q_2} \equiv 0;$$

$$q_i|_{t=0} = q_{i0}, \quad p_i|_{t=0} = p_{i0} = \left. \frac{\partial \varphi_0(q_1, q_2)}{\partial q_i} \right|_{t=0}, \quad (i = 1, 2).$$

Из этих уравнений следует, что вдоль бихарактеристики $\{x(t) = q_1(t, q_{10}, q_{20}), y(t) = q_2(t, q_{10}, q_{20})\}$ величины p_1 и p_2 будут постоянными, но тогда и весь вектор скорости движения $(\dot{x}, \dot{y})$ остается постоянным вдоль бихарактеристики. Этот вектор антинправлен вектору $\vec{v}(p_1, p_2)$; его модуль равен

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = C_0.$$

Следовательно, при движении вдоль бихарактеристики граница области Ω (при росте значения времени $t \geq 0$) будет перемещаться внутрь области $\Omega_0 = \{(x, y) : \varphi_0(x, y) < 0\}$ по нормали к границе $\Gamma = \{(x, y) : \varphi_0(x, y) = 0\}$ с постоянной скоростью C_0 , которую можно считать местной скоростью звука.

Используя величину C_0 , которую можно интерпретировать как местную скорость звука, получаем, что конус характеристических нормалей состоит из плоскости $\tau = 0$ и из конуса:

$$\tau^2 - C_0(\xi^2 + \eta^2) = 0;$$

а конус характеристик даёт прямую:

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

и конус

$$C_0^2(t - t_0)^2 - (x - x_0^2) - (y - y_0)^2 = 0.$$

Следует отметить, что общий подход к построению разнообразных поверхностей S может быть основан на групповых свойствах исходного уравнения (16) (см., например, [6, 7]). Общий вид инфинитезимального оператора локальной группы Ли:

$$\begin{aligned} X &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \xi^1 &= \frac{c_0^2 t^2 + x^2 + y^2}{2} F_1 + xt F_2 + yt F_3 + x F_4 + t F_5 + y F_6 + F_7, \\ \xi^2 &= \frac{c_0^2 t^2 + x^2 - y^2}{2} F_2 + c_0^2 t (x F_1 + F_4) + xy F_3 + x F_5 + y F_8 + F_9, \\ \xi^3 &= \frac{c_0^2 t^2 - x^2 + y^2}{2} F_3 + c_0^2 t (y F_1 + F_6) + xy F_2 + y F_5 - x F_8 + F_{10}, \\ \eta &= F_{11}, \end{aligned} \quad (17)$$

допускаемой уравнением (16), был опубликован в статье [3]. Здесь $F_i = F_i(\varphi)$ — произвольные гладкие функции ($i = 1 \div 11$) от координаты $\varphi = \varphi(t, x, y)$.

Для уравнения (16) имеем следующий вид допускаемого оператора группы контактных преобразований (см. [6]):

$$Y = \left(-\frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(W - \varphi_i \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \varphi_i \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}. \quad (18)$$

Здесь используется суммирование по повторяющемуся буквенному индексу, и введены обозначения: $x^1 = t$, $x^2 = x$, $x^3 = y$;

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}; \quad W = W(x^1, x^2, x^3, \varphi, \varphi_2, \varphi_3); \quad (i = 1, 2, 3).$$

Неизвестная функция W является решением определяющего уравнения:

$$\sqrt{(\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2} \frac{\partial W}{\partial x^1} - C_0 \varphi_2 \frac{\partial W}{\partial x^2} - C_0 \varphi_3 \frac{\partial W}{\partial x^3} = 0$$

в пространстве координат $\{x^1, x^2, x^3, \varphi, \varphi_2, \varphi_3\}$. Легко видеть, что общее решение этого уравнения задается выражением:

$$W = W \left(\varphi, \varphi_2, \varphi_3, x^2 + \frac{C_0 \varphi_2 t}{\sqrt{(\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2}}, x^3 + \frac{C_0 \varphi_3 t}{\sqrt{(\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2}} \right) \quad (19)$$

где W — произвольная гладкая функция своих аргументов.

Таким образом, в результате проведенного исследования, получены условия гиперболичности и t -гиперболичности системы уравнений (7), (8) линейной асимметричной модели упругости. Для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби (16) получены допускаемые группы точечных и контактных преобразований, с операторами вида (17) и (18), (19), позволяющие строить аналитические выражения для характеристических поверхностей гиперболической системы уравнений (7), (8).

Список литературы

- [1] *Андреев В. К.* Симметрии неклассических моделей гидродинамики / В. К. Андреев, В. В. Бублик, В. О. Бытев. — Новосибирск: Наука, 2003. — 352 с.
- [2] *Анин Б. Д.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Анин, В. О. Бытев, С. И. Сенашев. — Новосибирск: Наука, 1985. — 143 с.
- [3] *Бельмецев Н. Ф.* О характеристических поверхностях волнового уравнения / Н. Ф. Бельмецев, М. Ю. Глазков, П. В. Марков, Е. Р. Юмачикова // Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных ИТ-решений: третья науч.-практ. конф. молодых ученых. 14–15 апр. 2010 г., г. Тюмень, ТюмГУ. — Тюмень: Изд. Вектор Бук, 2010. — С. 47–50.
- [4] *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979. — 392 с.
- [5] *Годунов С. К.* Элементы механики сплошных сред. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
- [6] *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
- [7] *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. — 240 с.
- [8] *Сиротин Ю. И.* Основы кристаллофизики: Учеб. пособие / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. — Новосибирск: Наука, 1979. — 640 с.
- [9] *Шемякин Е. И.* Динамические задачи теории упругости и пластичности. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1968. — 336 с.