

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ДЕЛЬТЕ Р. ЛЕНЫ

А.И. Крылова¹, Е.А. Антипова²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 551.482.215.1

В рамках одномерной постановки задачи рассматривается моделирование неустановившегося движения воды в открытых руслах дельты реки Лена в гидравлическом приближении. Численное решение уравнений Сен-Венана для многорукавной устьевой области р. Лена основано на использовании одномерного математического описания процессов в каждом звене речной сети и формулировании условий сопряжения в точках разветвления. Для решения задачи используется специально разработанный метод прогонки по графу типа «дерево» для разветвленных и закольцованных участков речной сети [1]. Представлены результаты расчета распределения стока и уровня свободной поверхности по магистральным протокам дельты.

Ключевые слова: неустановившееся движение воды, гидравлическое приближение, уравнения Сен-Венана, многорукавное устье дельты реки, магистральные протоки, расход воды, уровень свободной поверхности.

Введение

Исследования водного режима устьев рек является одним из важных вопросов гидрологии речных дельт в условиях изменяющегося климата и увеличивающейся антропогенной нагрузки на природные речные объекты. С помощью математического моделирования неустановившегося движения жидкости в открытых руслах можно осуществить расчет основных характеристик речного стока. Изучение закономерностей изменений расхода воды и уровня свободной поверхности в дельте реки Лена является основной задачей данной работы.

В работе представлен гидродинамический метод описания сложной дельтовой системы, основанный на численном решении уравнений Сен-Венана с помощью устойчивой неявной разностной схемы. Методика решения базируется на использовании одномерного математического описания неустановившихся течений в каждом звене речной сети и формулировании условий сопряжения потоков в точках разветвления. При решении используется устойчивый метод прогонки по графу типа «дерево» для разветвленных и закольцованных участков системы русел.

Для применения численных методов решения уравнений Сен-Венана в условиях естественных водотоков приобретает важное значение подготовка гидравлических и морфометрических данных для обеспечения достаточной точности решения.

В данной работе рассматривается математическая модель сложноразветвленной дельты реки Лена, описывающая водный режим от с. Кюсюр в нижнем течении реки до впадения речных вод в море Лаптевых. Исследуется водный режим пяти магистральных протоков дельты: Быковской, Трофимовской, Сардахской, Туматской и Оленёкской. Цифровая модель рельефа дельты, необходимая для учета в уравнениях движения, получена на основе географических карт и спутниковых фотографий земной поверхности из системы «Google Earth».

1 Постановка задачи

Система гиперболических дифференциальных уравнений, описывающая неустановившееся медленно изменяющееся движение воды в открытом русле без учета ветрового и барического воздействия, без учета путе-

вого притока и в предположении об одномерности потока имеет следующий вид:

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\omega} \right) = -g\omega \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{K^2} \right), \quad (2)$$

где x — координата, отсчитываемая вдоль оси русла; t — время; $Q(x, t)$ — расход воды; $Z(x, t)$ — отметка свободной поверхности воды; $B(x, h)$ — ширина свободной поверхности воды при глубине $h(x, t)$; $\omega(x, h)$ — площадь поперечного сечения потока; $K(x, h) = \omega \frac{1}{n} h^{2/3}$ — модуль расхода [2], где $n(x)$ — коэффициент шероховатости; g — ускорение силы тяжести.

Сложноразветвленный устьевой участок реки может быть представлен в виде системы, состоящей из двух типов элементов (участков открытых русел и узлов разветвления), которую можно представить в виде некоторого плоского графа (рис. 1). При этом участкам соответствуют ребра графа (отрезки оси x), а узлам — его вершины.

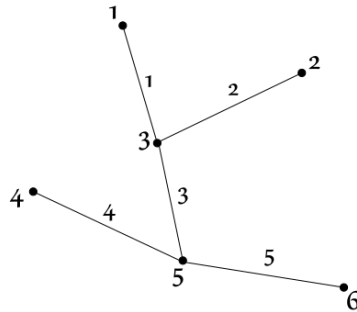


Рис. 1: Пример схематизации устьевых участков в виде плоского графа

На полученном графе рассматриваем систему уравнений (1) – (2). Расход воды и уровень свободной поверхности являются важнейшими величинами, полностью описывающими движение потока воды. Поэтому в качестве неизвестных функций на отрезках выбираются функции $Q(x, t)$ (расход воды) и $Z(x, t)$ (уровень свободной поверхности) как распределенные параметры, а в вершинах — $Q_*(t)$ и $Z_*(t)$ (сосредоточенный приток или отток и уровень в узле) как сосредоточенные параметры.

Начальные условия для распределенных параметров задаются на каждом отрезке

$$\begin{cases} Q(x, 0) = Q^0(x), \\ Z(x, 0) = Z^0(x). \end{cases} \quad (3)$$

Для сосредоточенных параметров задаются условия сопряжения в качестве баланса расходов в узле и связей между отметками уровня на концах участков и в узле. Граничные условия в начальных и конечных створах системы рассматриваются как частный случай условий сопряжения, например, в виде зависимости расхода $Q_* = f(t)$ или уровня $Z_* = Z(t)$ от времени.

2 Численный метод решения

Эффективными методами решения задач о гидрологическом режиме сложноразветвленных открытых русел являются численные методы, основанные на использовании неявных разностных схем. Неявные схемы, абсолютно устойчивые при любых соотношениях параметров разностной сетки, позволяют выбирать шаги сетки, исходя из соображений необходимой точности.

Сформулируем систему (1) – (2) в характеристической форме, переход к которой удобен для единообразного представления разностных уравнений для внутренних и граничных точек отрезков

$$R \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda R \frac{\partial U}{\partial x} = F, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} Q \\ Z \end{pmatrix}, & R &= \begin{pmatrix} 1 & -B(v-c) \\ 1 & -B(v+c) \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, & \Lambda &= \begin{pmatrix} v+c & 0 \\ 0 & v-c \end{pmatrix}, \\ F_{1,2} &= g\omega \left[Fr \cdot I - \frac{Q|Q|}{K^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $Fr = \frac{v^2}{c^2}$ — число Фруда; $c = \sqrt{\frac{g\omega}{B}}$ — скорость распространения малых возмущений; $v = \frac{Q}{\omega}$ — средняя по течению скорость потока.

В используемой неявной разностной схеме производные по времени аппроксимируются с первым порядком точности, а по пространству — со вторым. В граничных точках $n = 0$ и $n = N$ используются разностные соотношения, соответствующие только характеристическим направлениям.

С учетом вышеизложенного получим на каждом участке систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} A_n (U_{n+1}^{k+1} - U_{n-1}^{k+1}) + B_n U_n^{k+1} &= C_n, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau}{2\Delta} (\Lambda R)_n^k, \\ B_n &= R_n^k - \tau \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right)_n^k, \\ C_n &= B_n^k U_n^k + \tau F_n^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Для граничных точек ($n = 0, n = N$) разностные уравнения соответственно имеют вид:

$$2A_0^{(2)} U_1^{k+1} + (B_0^{(2)} - 2A_0^{(2)}) U_0^{k+1} = C_0^{(2)}, \quad (8)$$

$$(B_N^{(1)} + 2A_N^{(1)}) U_N^{k+1} - 2A_N^{(1)} U_{N-1}^{k+1} = C_N^{(1)}, \quad (9)$$

где индекс (1) или (2) означает, что берется только первая или вторая строка матриц.

Система уравнений (6), (8), (9) не замкнута, и для ее замыкания необходимо привлечь граничные условия или условия сопряжения. В работе [1] для решения таких систем предлагается вариант метода прогонки, который учитывает тип системы русел (каналов) и трехдиагональную структуру матрицы разностных уравнений. При решении получившейся системы линейных алгебраических уравнений для разветвлений с «кольцами» учитывается структура одномерного графа «дерево», а для простых разветвлений без «колец» используется метод параметрической прогонки.

3 Сравнение численного решения с аналитическим

При определенных дополнительных ограничениях на параметры русла система уравнений (1) – (2) может быть сведена к параболическому дифференциальному уравнению конвекции-диффузии в частных производных.

$$Q_t - \frac{K^2}{2B|Q|} Q_{xx} + \frac{K_h Q}{BK} Q_x = 0, \quad (10)$$

где $a = \frac{K^2}{2B|Q|}$ — коэффициент диффузии, $b = \frac{K_h Q}{BK}$ — скоростью конвекции. При постоянных a и b с помощью метода Фурье (метода разделения переменных) может быть построено аналитическое решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальным и граничным условиям для расхода воды в русле реки

$$\begin{cases} Q(x, 0) = Q_0(x), \\ Q(0, t) = Q_1(t), \\ Q(L, t) = Q_2(t). \end{cases} \quad (11)$$

Проведено сравнение аналитического решения уравнения конвекции-диффузии (10) – (11) с численным решением системы (1) – (2). Для этого был повторен эксперимент с участком реки Кубань, приведенный в статье [3]. Средняя величина уклона дна на рассматриваемом участке принималась равной $1,8 \cdot 10^{-3}$, что позволяет использовать для описания движения паводковой волны уравнение (10).

В качестве исходных данных рассматривались следующие зависимости:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= (6.0606 \cdot 10^{-10} x^2 - 2.739 \cdot 10^{-4} x + 100) \cdot 4, \\ Q_1(t) &= (2.0552 \cdot 10^{-15} t^3 - 7.663 \cdot 10^{-10} t^2 + 1.4 \cdot 10^{-4} t + 100) \cdot 4, \\ Q_2(t) &= (1.956 \cdot 10^{-15} t^3 - 9.285 \cdot 10^{-10} t^2 + 2.294 \cdot 10^{-4} t + 80.2581) \cdot 4. \end{aligned} \quad (12)$$

Длина рассматриваемого участка по руслу реки $L = 90$ км, ширина прямоугольного русла $B = 70$ м, начальная глубина $h_0 = 2.5$ м, коэффициент шероховатости $n = 0.04$. За расчетный период был выбран промежуток времени равный 5 суткам. Расчетный шаг по длине Δx составлял 0.5 км, а шаг по времени $\Delta t = 0.5$ часа. Коэффициент диффузии a и скорость конвекции b принимались равными 11635 и 3.5759, соответственно. Данные значения являются усреднением по времени от значений этих параметров в численном решении.

Результаты сравнительного анализа представлены на рис. 2. Расходы воды в зависимости от времени приведены в начале, в середине и в конце участка. Также представлено численное решение в каждом узле участка, где синим показано изменение расхода по времени в граничных точках, а красным во внутренних узлах сетки.

Полученные результаты показывают сходимость численного решения для выбранного режима потока.

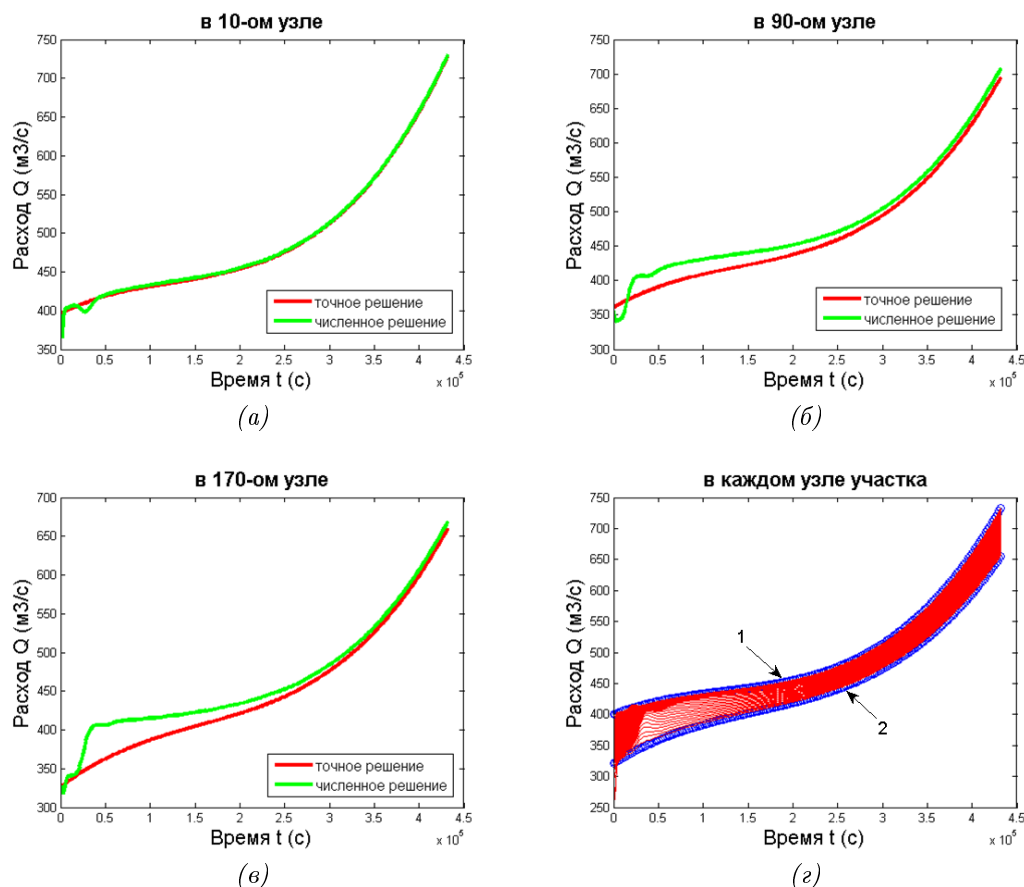


Рис. 2: Сравнение аналитического решения задачи (10), (12) с численным решением задачи (1)–(2), (12) (а) в начале, (б) в середине и (в) в конце участка реки Кубань; (г) численное решение в каждом узле расчетной сетки, где синим обозначено изменение расхода по времени в граничных точках (1 — в начальной, 2 — в конечной), красным — во внутренних узлах сетки.

4 Численное моделирование неустойчившегося движения воды в дельте р. Лены

В качестве объекта исследования была выбрана сложноразветвленная дельта р. Лены, включающая пять основных магистральных протоков: Быковскую, Трофимовскую, Сардахскую, Туматскую и Оленекскую (рис.3).

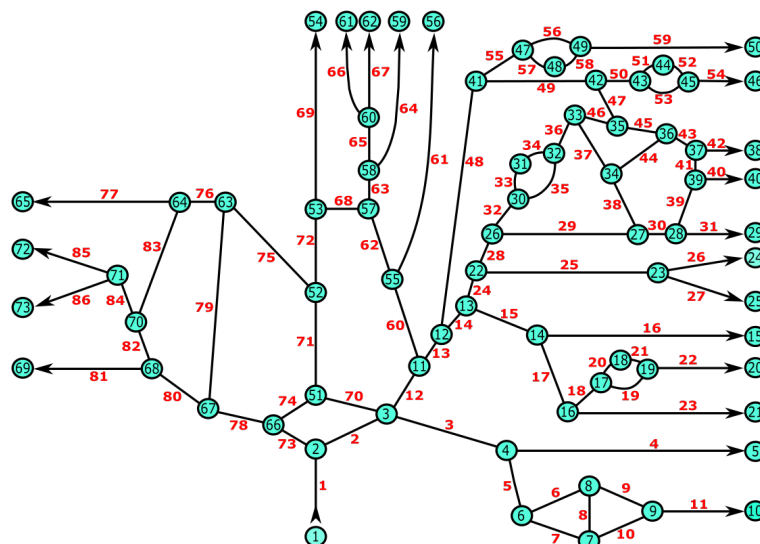


Рис. 3: Схематизация русловой сети дельты р.Лены в виде графа [5], где ⑤ — номер вершины, 12 — номер участка

Предполагается, что протоки дельты имеют параболическую форму русла, за исключением некоторого количества участков в Трофимовской протоке. Расчетный шаг по времени Δt составлял 0,5 часа, а шаг по пространству Δx был различным на разных участках дельты, но в среднем составлял 500 м.

Ввиду того, что на начальный момент времени значения расходов воды в рукавах были неизвестны, расчет проводился в два этапа. Сначала был проведен процесс установления. В качестве начальной ширины были использованы натурные данные, полученные с помощью географических карт дельты р. Лены и программы *Google Earth*. Начальный уровень свободной поверхности и расход воды на всех участках предполагался равным нулю, кроме первой вершины, в которой было задано постоянное граничное условие на расход. Затем начальная глубина потока в каждом узле расчетной области приближенно рассчитывалась по следующей гидролого-морфометрической формуле, предложенной в работе [4].

$$h = 0.42B^{1/3}.$$

Полученные в результате решения стационарной задачи для всех участков значения расхода воды задавались в качестве начальных условий при расчете неустойчившегося движения. В качестве граничных условий на левой границе расчетной области задавался ход расхода воды по времени $Q = f(t)$. В данной работе не учитываются сгонно-нагонные колебания уровня моря, поэтому на правых границах, в вершинах впадения реки в море, уровень воды принимался постоянным, равным нулю. Для задания функции $f(t)$ использовались данные расхода воды на гидростворе в селе Кюсюр за 2008 год (рис.4а) [5], который является Международным геофизическим годом. Моделирование гидравлического режима в дельте реки Лена проводилось в период открытой воды с мая по октябрь.

На рис. 4б, 5 представлены результаты численного эксперимента: 4б) сравнение измеренного и расчётного уровней свободной поверхности воды в с. Кюсюр [5]; 5) изменение расхода воды во всех пяти главных протоках дельты реки Лена за исследуемый период, включающий две фазы гидрологического режима: половодье и межень.

В таблице представлены многолетние гидрологические данные распределения водного стока по основным протокам р. Лены за 1953-1990 гг. [6] и результаты численного эксперимента.

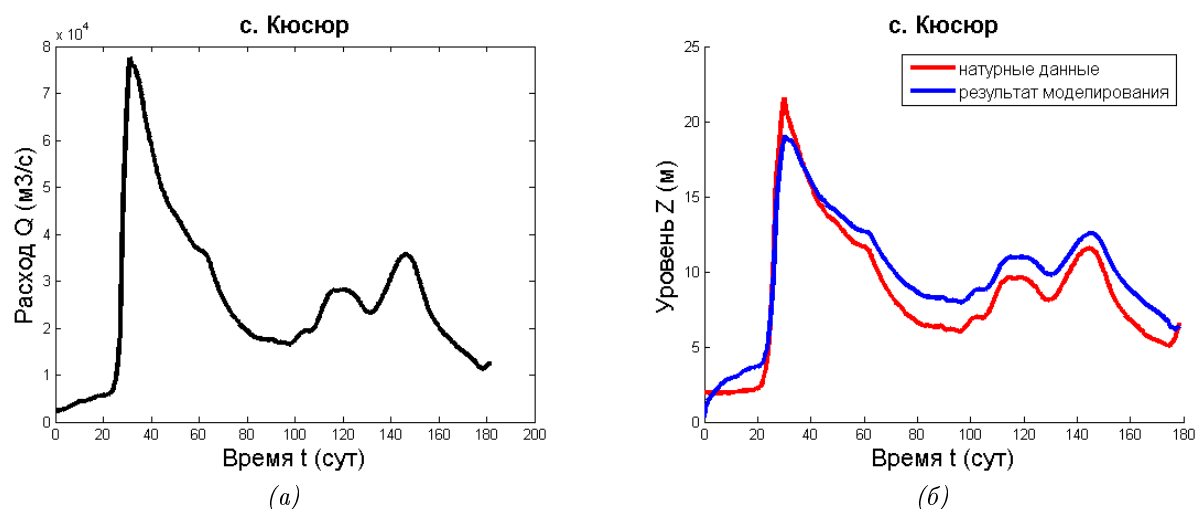


Рис. 4: (а) данные о расходе воды и (б) динамика уровня свободной поверхности: измеренная и смоделированная в с. Кюсюр за 2008 год [5].

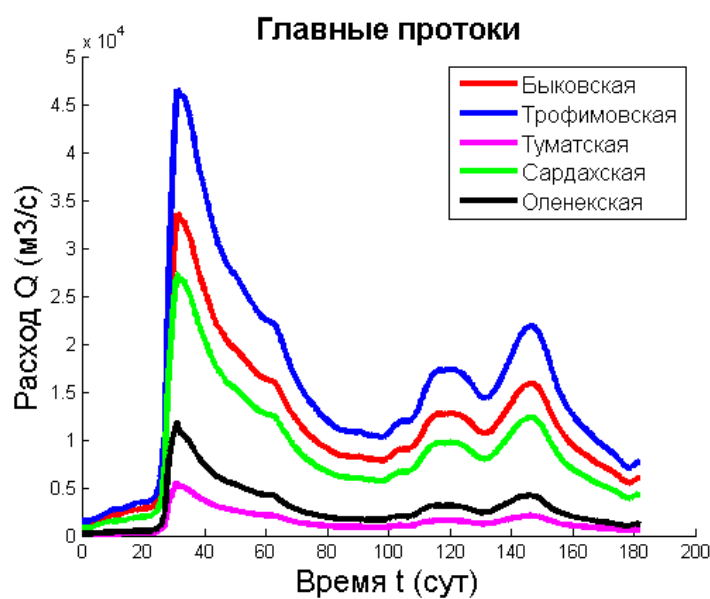


Рис. 5: Смоделированная динамика расхода воды в пяти главных протоках дельты реки Лена

Таблица 1: Процентное распределение расхода воды по протокам относительно суммарного количества поступающей в дельту воды: а — данные моделирования, б — данные, представленные в работе [6]

Период	Главные протоки							
	Быковская		Трофимовская и Сардахская		Туматская		Оленекская	
	а	б	а	б	а	б	а	б
Половодье (20 мая — 5 июня)	28.6	28	60	54	3.8	10	7.6	8
Межень (15 июля — 15 августа)	29.6	25	60.8	65	3.3	5	6.3	5
Период открытой воды	29.2	27	60.7	57	3.4	9	6.7	7

Заключение

Результаты расчета расходов и уровней воды в дельте р. Лены по представленной модели и их сравнение с данными измерений показали, что модель удовлетворительно описывает распределение расходов воды по основным протокам дельты. Ошибки расчёта для условий водного режима: межени и половодья, которые превышают предел точности гидрометрических измерений (5%), можно объяснить 1) принятой схематизацией русловой сети дельты; 2) грубыми оценками ширины и глубины русел основных протоков и малых водотоков; 3) отсутствием полных данных о морфометрии как основных, так и боковых водотоков. Численное моделирование гидрологического режима, основанное на гидродинамическом методе расчета неустановившегося движения воды, позволяет получить характеристики одномерного потока, которые в натурных условиях измерить очень сложно.

Список литературы

- [1] А.Ф.Воеводин, В.С.Никифоровская, А.С.Овчарова. Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек // Гидрометеоздат, Труды ААНИИ, т. 378. 1983. С. 23–34.
- [2] В.В.Иванов, Е.П.Котрехов. Опыт численного моделирования неустановившегося движения воды в многоорукавной дельте реки // Труды ААНИИ, т. 314. 1971. С. 16–35.
- [3] Е.А.Семенчин, Н.В.Вандина. Анализ системы уравнений Сен-Венана аналитическими и численными методами // Научный журнал КубГАУ, № 64(10). 2010. С. 1–14.
- [4] Р.С.Чалов, В.М.Панченко, С.Я.Зернов. Водные пути бассейна Лены. М.: МИКИС, 1995. 600 с.
- [5] V.A.Shlychkov, G.A.Platov, A.I.Krylova. A coupled hydrodynamic system of the Lena River delta and the Laptev Sea shelf zone: the model tuning and preliminary results of numerical simulation // Bull. NCC. Ser.: Num. Model. in Atmosph. 2014. Vol. 14. P. 81–103.
- [6] А.Ю.Гуков. Гидрология устьевой области реки Лена. М.: Научный мир, 2001, – 288 с.

*Алла Ивановна Крылова — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: alla@climate.ssc.ru;*

*Екатерина Андреевна Антипова — студентка Новосибирского государственного университета;
e-mail: antipova_aea@mail.ru.*

Дата поступления — 30 апреля 2017 г.