

ЭКОНОМИЧНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЫЛИ В ОКОЛОЗВЕЗДНЫХ ДИСКАХ

О. П. Стояновская^{1,2}, В. Н. Снытников^{1,2}, Э. И. Воробьев^{3,4}, Т. В. Маркелова¹

¹Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН, 630090, Новосибирск,

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск,

³Институт физики, Южный федеральный университет, 344090, Ростов-на-Дону,

⁴Институт астрофизики, Венский университет, 1180, Вена, Австрия.

УДК 519.688

В работе проводится анализ методов численного интегрирования по времени уравнений движения твердой фазы, которые применяются в современных астрофизических кодах для моделирования газопылевых околозвездных дисков. Вычислительную трудность при этом представляет случай, когда характерное время обмена импульсом между фазами на несколько порядков меньше, чем характерные времена действия других сил.

(1) Показано, что некоторые применяемые в кодах схемы, обладающие безусловной устойчивостью и первым порядком аппроксимации, имеют низкую фактическую точность при приемлемых шагах интегрирования по времени, а для достижения необходимой точности в несколько процентов требуется применять шаги по времени столь же мелкие, как и в явных методах для обеспечения устойчивости.

(2) Приведены экономичные методы первого порядка аппроксимации, которые позволяют избегать дополнительных ограничений на шаг по времени со стороны трения при расчете движения тел любого размера.

Приведены результаты расчета динамики двухфазного самогравитирующего диска с использованием одного из методов.

Ключевые слова: околозвездный диск, жесткие уравнения, среда газ-пыль .

Введение

При моделировании динамики околозвездного диска требуется интегрировать по времени уравнение движения пылевой компоненты диска:

$$\frac{dv}{dt} = g + g_{\text{drag}}, \quad (1)$$

где $g_{\text{drag}} = \frac{u - v}{t_{\text{stop}}}$ — ускорение тела под действием трения о газ, g — ускорение тела за счет неаэродинамических сил, v — скорость тел, u — скорость газа. Для тел, размер которых сопоставим с длиной свободного пробега молекулы газа (свободно-молекулярное обтекание), время остановки определяется соотношением:

$$t_{\text{stop}} = \frac{a\rho_s}{\rho c_s}, \quad (2)$$

где a — радиус сферической частицы, ρ_s — плотность вещества твердой фазы, ρ — плотность обтекающего газа, c_s — скорость звука в газе. Для околозвездного диска справедливо $\frac{c_s}{v_K} = \frac{H}{r}$, где $v_K = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ — кеплерова скорость, M — масса звезды, G — гравитационная постоянная, $H(r)$ — высота диска, r — расстояние от

протозвезды до точки внутри диска. Тогда, положив что $\Omega = \frac{v_K}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ — кеплеровская частота, $\Sigma = \int_{-H}^H \rho dz$ — поверхностная плотность диска, соотношение (2) принимает вид

$$t_{\text{stop}} = \frac{a\rho_s}{\Sigma\Omega}. \quad (3)$$

Вычислительную трудность при интегрировании уравнения (1) представляет случай, когда характерное время для аэродинамической силы (t_{stop} , время установления или релаксации скорости пыли относительно скорости газа, в англоязычной литературе *stopping time*) на несколько порядков меньше, чем характерные времена действия других сил (гравитационной, центробежной). Наличие в системе нескольких времен означает, что применяя явные методы интегрирования, мы должны использовать шаг меньший, чем минимальное характерное время, но проводить интегрирование на интервале, большем, чем максимальное характерное время. Для задач моделирования, в которых каждый временной шаг является вычислительно трудоемким (двух и трехмерные уравнения, учет собственного гравитационного или магнитного поля вместе с другими физико-химическими процессами), использовать явные методы интегрирования оказывается невозможным, если требуется рассчитывать динамику мелкой пыли, сильно связанной с газом.

Явный метод первого порядка аппроксимации для уравнения (1) будет иметь вид:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = g^n + \frac{u^n - v^n}{t_{\text{stop}}}, \quad (4)$$

где v^n — скорость тела в текущий момент времени t (на временном слое n), v^{n+1} — скорость тела в следующий момент времени $t + \tau$, (на временном слое $n + 1$). Отметим, что уравнение (1) возникает при реализации численных схем расщепления по физическим процессам для системы уравнений динамики двухфазного диска, поэтому величины g и u в (4) также снабжены индексами временного шага. Пусть $g^n = 0$ и $u^n = 0$, тогда (4) примет вид:

$$v^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{t_{\text{stop}}}\right) v^n = \left(1 - \frac{\tau}{t_{\text{stop}}}\right)^n v_0. \quad (5)$$

Из (5) следует, что необходимое условие ограниченности v^{n+1} при любом n : $\left|1 - \frac{\tau}{t_{\text{stop}}}\right| < 1$, что эквивалентно

$$\tau < 2t_{\text{stop}}. \quad (6)$$

Рассмотрим, насколько приемлемым является такое ограничение на шаг по времени. Пусть пылинка имеет радиус 1 мкм, тогда для массивного диска, в котором для $r = 20$ АЕ, $\Sigma = 100$ г см⁻² из (3) получим $t_{\text{stop}} \approx 100$ сек.

Для интегрирования уравнений динамики диска (обычно на протяжении 10 и более оборотов его периферийной части) применяется шаг по времени, определяемый из условия Куранта $\tau < \frac{\Delta r}{v}$, где Δr — размер, на котором происходит дискретизация пространственных производных (длина ячеек сетки или радиус сглаживания в гидродинамике сглаженных частиц Smoothed Particle Hydrodynamics). Оценим характерную величину этого шага. Пусть внутренняя граница диска составляет $r = 1$ АЕ, мы проводим моделирование его динамики в цилиндрической системе координат, разбивая полный оборот на 256 ячеек. Получаем

$$\tau = \frac{\Delta r}{v_K} = \frac{2\pi r}{256v_K} \approx 1,23 \times 10^5 \text{ сек.} \quad (7)$$

Видно, что для того, чтобы удовлетворить условию (6) требуется проводить в 1000 раз больше временных шагов. Из теории численных методов решения жестких задач известно, что ограничение на шаг по времени со стороны трения можно снять, если использовать для расчета неявную схему, например, неявный метод Эйлера:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = g^{n+1} + \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{t_{\text{stop}}}. \quad (8)$$

Однако в силу того, что значения g^{n+1}, u^{n+1} неизвестны, организация вычислений по такой схеме требует итераций до сходимости, в случае двух и трехмерных уравнений на каждой итерации требуется обращение матриц. Поэтому в современных работах по моделированию динамики газопылевых дисков применяются следующие более экономичные подходы [1, 4, 5, 8].

1 Тестируемые схемы

1.1 Асимптотическое приближение или аппроксимация коротких времен

Наиболее экономичный с точки зрения вычислительных затрат подход связан с переходом к асимптотическому приближению, которое имеет несколько названий: терминальное приближение, приближение коротких времен, диффузионное приближение, приближение малого запаздывания. В этом приближении скорость тел и скорость газа связаны простым алгебраическим соотношением:

$$v = g_{\text{rel}} t_{\text{stop}} + u, \quad (9)$$

где $g_{\text{rel}} = g - g_u$ — разность ускорений, действующих на газ и на тела. В работе [9] показано, при описании радиальной миграции тел, которые дрейфуют по орбитам, близким к Кеплеровым, приближение (9) дает относительную погрешность вычисления радиальной скорости, равную St^2 , где $St = t_{\text{stop}} \Omega$ — число Стокса. Это означает, что приближение (9) дает корректные результаты только для пыли ограниченного размера, для которой справедливо $(St)^2 < 0.1$.

1.2 Схема смешанного временного слоя

Схема смешанного временного слоя имеет вид:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{u^n - v^{n+1}}{t_{\text{stop}}} + g^n. \quad (10)$$

Эта схема используется, например, в работе [2].

1.3 Квазианалитическая схема без расщепления

$$v^{n+1} = (g^n t_{\text{stop}} + u^n) + (v^n - g^n t_{\text{stop}} - u^n) e^{-\frac{\tau}{t_{\text{stop}}}}. \quad (11)$$

1.4 Схемы, основанные на методе расщепления

В работе мы будем тестировать схемы, основанные на методе расщепления по физическим процессам, которые имеют первый порядок аппроксимации по времени (например, [5, 8]): первый этап схемы расщепления — нахождение скорости отдельного тела за счет неаэродинамического (гравитационного) ускорения:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = g, \quad (12)$$

второй этап схемы расщепления — коррекция скорости пылинки за счет трения:

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = g_{\text{drag}}. \quad (13)$$

Этапы (12)–(13) некоммутативны, в случае изменения порядка мы получаем схему:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = g_{\text{drag}}, \quad (14)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = g. \quad (15)$$

Здесь $v^{n+1/2}$ — промежуточное значение скорости тела. Будем называть схему (12)–(13) схемой с прямым порядком операторов, а схему (14)–(15) — с обратным порядком операторов.

1.4.1 Метод регуляризации

Метод регуляризации с прямым порядком операторов имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = g^n, \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \frac{u^n - v^{n+1/2}}{t_{\text{stop}} + \tau}, \end{cases} \quad (16)$$

с обратным порядком операторов:

$$\begin{cases} \frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \frac{u^n - v^n}{t_{\text{stop}} + \tau}, \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = g^n. \end{cases} \quad (17)$$

Метод регуляризации в сочетании со схемой расщепления используется, например, в работе [8].

1.4.2 Квазианалитическое интегрирование

Метод квазианалитического интегрирования с прямым порядком операторов имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = g^n, \\ v^{n+1} = u^n + (v^{n+1/2} - u^n)e^{-\frac{\tau}{t_{\text{stop}}}}, \end{cases} \quad (18)$$

с обратным порядком операторов:

$$\begin{cases} v^{n+1/2} = u^n + (v^n - u^n)e^{-\frac{\tau}{t_{\text{stop}}}}, \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = g^n, \end{cases} \quad (19)$$

Метод квазианалитического интегрирования в сочетании с методом расщепления используется, например, в работе [5].

2 Модельное уравнение, точное аналитическое решение

Рассмотрим медленную миграцию пылинки к протозвезде в протопланетном газовом диске, давление в котором убывает по радиусу. Пусть газовый диск близок к равновесию, тогда его радиальная скорость близка к нулю, а азимутальная u_φ близка к Кеплеровой скорости $v_K = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, но не достигает ее.

Пусть пылевая частица движется по своей орбите со скоростью v_φ . Будем считать, что гравитационное поле, действующее на частицу, создается только протозвездой, но не диском. Тогда частица испытывает радиальное ускорение $g = \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{MG}{r^2}$. Если движение таково, что радиальная скорость частицы много меньше Кеплеровой, тогда ускорение, в общем случае зависящее от радиуса, может быть рассмотрено как постоянное. Это приводит к модели прямолинейного движения тела под действием постоянного ускорения и трения о газ, который движется с постоянной скоростью u . Отметим, что такое приближение является упрощенной моделью и не описывает преобразования азимутальной компоненты скорости в радиальную, но представляет из себя нетривиальный тест для методов интегрирования (10), (16–19).

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g + \frac{u - v}{t_{\text{stop}}}, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \quad (20)$$

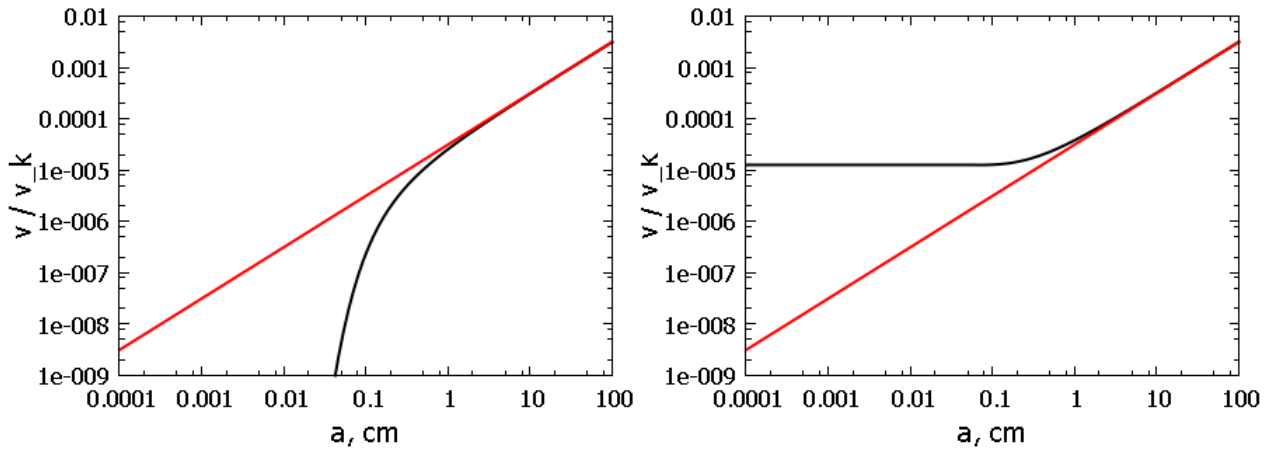


Рис. 1: Отклонение численного решения задачи (20) от аналитического. Слева — квазианалитическое интегрирование с прямым порядком операторов (18), справа — квазианалитическое приближение с обратным порядком операторов (19), метод регуляризации с обратным порядком операторов (17). Черная линия — численное решение, серая (красная) линия — аналитическое решение.

В нашем случае v — радиальная скорость мигрирующей пылинки, g — постоянное радиальное ускорение пылинки, u — радиальная скорость газа. Аналитическое решение поставленной задачи имеет вид:

$$v = (gt_{\text{stop}} + u) + (v_0 - gt_{\text{stop}} - u)e^{-\frac{t}{t_{\text{stop}}}}. \quad (21)$$

Видно, что при $t \gg t_{\text{stop}}$ $v \rightarrow (gt_{\text{stop}} + u)$, что совпадает с терминальной скоростью, выраженной условием (9).

3 Результаты тестирования методов

Возьмем 100 пылевых частиц размером от 1 мкм до 1 м и расположим их на расстоянии $r = 20$ АЕ от протозвезды массы $M = 1M_{\odot}$. Для простоты будем считать, что $u = 0$, также положим, что $\Sigma(20\text{АЕ}) = 100 \text{ г см}^{-2}$. Пусть $g = -0.001 \frac{v_K^2}{r}$, $v_0 = 0.01v_K$.

Для каждой из частиц будем проводить интегрирование задачи (20) на протяжении 1000 оборотов, то есть на временном интервале $[0; T] = [0; 2000\pi\Omega_K^{-1}]$, используя временной шаг τ , определенный соотношением (7). Для всего диапазона размеров частиц $T \gg t_{\text{stop}}$, поэтому данный тест позволяет оценить, насколько полученное в расчете стационарное значение скорости будет близко к аналитическому значению (21).

Мы получили, что метод регуляризации с прямым порядком операторов (16) и схема смешанного временного слоя без использования расщепления (10) воспроизводит скорость радиальной миграции близкую к аналитическому значению для всех рассмотренных значений t_{stop} . На рис. 1 приведено отношение модуля вычисленной скорости v к Кеплеровой скорости v_K на радиусе 20 АЕ. Метод регуляризации с обратным порядком операторов многократно завышает скорость радиальной миграции для частиц менее 1 см с $t_{\text{stop}} < \tau$. Из правой панели рис. 1 следует, что при использовании схемы (17) все тела менее 1 см будут испытывать одинаковое влияние силы трения и двигаться в диске как сантиметровые. Квазианалитическое интегрирование с прямым порядком операторов (18), напротив, существенно занижает скорость миграции для тел размером менее 1 см, практически жестко привязывая их движение к газу. Квазианалитическое интегрирование с обратным порядком операторов (19) дает тот же счетный артефакт, что и метод регуляризации с обратным порядком операторов (17) — искусственное завышение темпа миграции маленьких тел. Отметим, что для схемы (11) данный тест не является содержательным, поскольку для случая, когда $g = \text{const}$, численное решение в точности совпадает с аналитическим.

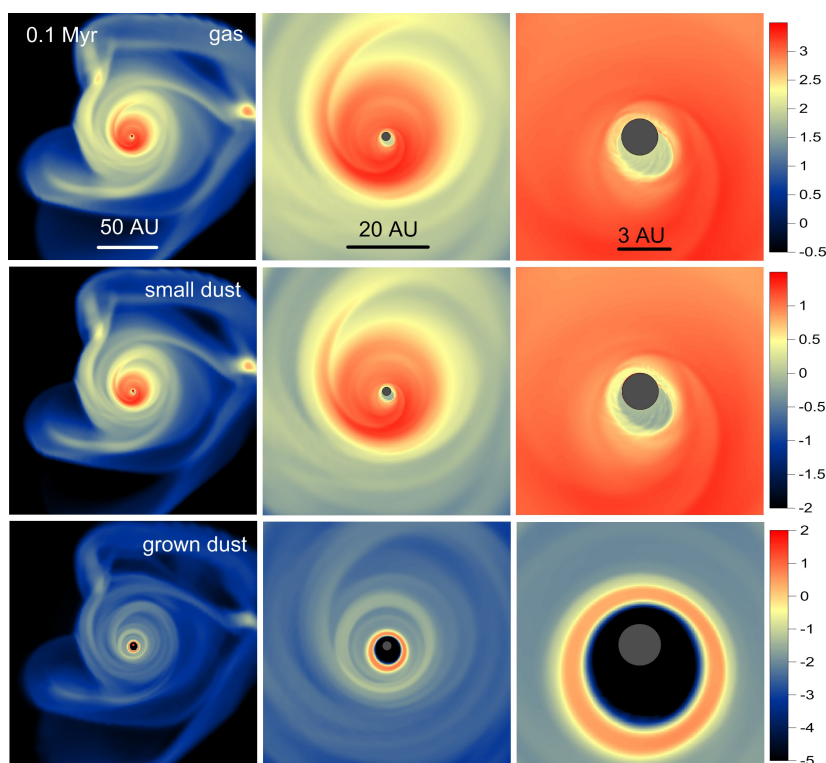


Рис. 2: Логарифм поверхностной плотности газа (верхний ряд), мелкой пыли (средний ряд) и растущей пыли (нижний ряд) в граммах на сантиметр квадратный в момент времени 100 тысяч лет после формирования диска. Слева направо приведены иллюстрации с увеличением масштаба.

4 Работоспособность рассматриваемых методов при моделировании динамики околозвездного газопылевого диска

В качестве иллюстрации работоспособности рассматриваемых методов мы приведем результаты моделирования динамики околозвездного газопылевого диска с учетом комплекса физических процессов: вязкого транспорта, приводящего к аккрецированию вещества из газа на звезду, самогравитации газовой и пылевой компоненты диска, процессов нагрева и охлаждения газа, роста пыли. Начальный радиус диска составляет 150 астрономических единиц (на графиках масштаб обозначен на английском языке — AU). Подробное описание численной модели газовой компоненты диска представлено в работе [6]. Численная модель динамики и роста пыли описана в [7]. Расчет выполнен с использованием схемы смешанного временного слоя (10). На рис. 2 приведена поверхностная плотность газа (верхний ряд), замороженной мелкой пыли (средний ряд) и дрейфующей растущей пыли (нижний ряд) в граммах на сантиметр квадратный (логарифм). Видно, что во внутренней области диска образуется плотное кольцо из выросшей пыли, которое отсутствует в газе и подсистеме мелкой пыли. Появление такого кольца связано с укрупнением пыли и увеличением темпа ее радиальной миграции. Миграция пыли останавливается только во внутренней части диска, где происходит изменение вязкости газа (так называемая мертвая зона) и резко возрастает градиент давления. Образование плотного кольца из выросшей твердой фазы может инициировать формирование планет земной группы и пояса астероидов.

Заключение

В работе рассмотрены методы интегрирования уравнений движения твердых тел в газопылевом околозвездном диске. Рассматривался случай, когда тела взаимодействуют с газом в режиме Эпштейна (свободно-молекулярного обтекания). Методы сравнивались с точки зрения их применимости для расчета тел произвольного размера (от 1 мкм до ста метров).

1. При необходимости решать уравнения движения тел с произвольным значением числа Стокса существует несколько устойчивых и экономичных схем, близких по своим вычислительным затратам. Мы показали, что схема смешанного временного слоя (10), метод регуляризации с прямым порядком операторов (16), квазианалитическое интегрирование (11) точно воспроизводят изменение углового момента твердых тел независимо от их размера. Все эти методы позволяют интегрировать уравнения движения тел с шагом по времени, который определяется условием Куранта для решения уравнений газовой динамики. Эти методы являются оптимальными для обеспечения точности расчетов за минимальное количество арифметических операций.

2. Для устойчивых экономичных схем (10), (16) и (11) расщепление по физическим процессам, которое часто используется в астрофизических кодах, приводит к существенному изменению фактической точности алгоритма для малых тел $t_{\text{stop}} < \tau$. К такому же результату приводит изменение порядка операторов в методе расщепления. Выявить фактическую точность схемы позволяет анализ погрешности решения на линейной задаче (20) и соответствующий численный тест.

Приведены результаты расчета динамики двухфазного самогравитирующего диска с использованием схемы смешанного временного слоя.

Список литературы

- [1] X.N. Bai, J.M. Stone (2010) Particle-gas Dynamics with Athena: Method and Convergence, ApJL vol.190, 297–310.
- [2] S.H. Cha, S. Nayakshin (2011) A numerical simulation of a 'Super-Earth' core delivery from 100 to 8 AU, MNRAS vol.415, 3319–3334.
- [3] T.J. Haworth, J.D. Ilee, D.H. Forgan, S. Facchini, D.J. Price, D.M. Boneberg, R.A. Booth, C.J. Clarke, J.F. Gonzalez, M.A. Hutchison, I. Kamp, G. Laibe, W. Lyra, F. Meru, S. Mohanty, O. Panić, K. Rice, T. Suzuki, R. Teague, C. Walsh, P. Woitke, ... (2016) Grand Challenges in Protoplanetary Disc Modelling, PASA vol.33
- [4] G. Laibe, D.J. Price (2014) Dust and gas mixtures with multiple grain species — a one-fluid approach, MNRAS vol.444, 1940–1956.
- [5] P. Lorén-Aguilar, M.R. Bate (2014) Two-fluid dust and gas mixtures in smoothed particle hydrodynamics: a semi-implicit approach, MNRAS vol.443, 927–945.
- [6] Vorobyov E.I., Basu S. Variable Protostellar Accretion with Episodic Bursts (2015) The Astrophysical Journal. Vol. 805, 17.
- [7] Vorobyov E.I., Akimkin V.V., Stoyanovskaya O.P., Pavlyuchenkov Y.N., Liu H.B. The early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with dust component, A & A, submitted.
- [8] Z. Zhu, R.P. Nelson, R. Dong, C.Espaillet (2012) Dust Filtration by Planet-induced Gap Edges: Implications for Transitional Disks, ApJ vol.755
- [9] Стояновская О.П., Снытников В.Н., Воробьев Э.И. (2017) Анализ методов расчета траекторий пылевых частиц в газопылевом околозвездном диске, Астрономический журнал, Т.94, № 12, С. 1–17.

*Стояновская Ольга Петровна — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН;
Новосибирского государственного университета;
e-mail: stop@catalysis.ru;*

*Снытников Валерий Николаевич — к.ф.-м.н., ст.науч.сотр. Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН;
Новосибирского государственного университета;
e-mail: snyt@catalysis.ru;*

*Воробьев Эдуард Игоревич — к.ф.-м.н., вед.науч.сотр. Южного федерального университета;
e-mail: eivorobev@sfsu.ru;*

*Тамара Валерьевна Маркелова — вед. инж. Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН;
e-mail: matamara@gmail.com.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.