

ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХМЕРНОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

О. Н. Соболева^{1,2,3}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

³ *Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск*

УДК 517.968

В геофизической неоднородной среде, как правило, координаты мелкомасштабных неоднородностей точно неизвестны. По этой причине физические параметры среды описывают статистическими полями. Лабораторные исследования кернов и полевые измерения показали, что в сильно неоднородных средах значительно увеличивается разброс параметров среды, если масштаб измерений уменьшается. Этот факт привел многих исследователей к пониманию того, что такие среды хорошо описываются случайными фрактальными полями. В настоящей работе с помощью метода подсеточного моделирования получены уравнения для эффективных коэффициентов в уравнениях для упругих волн, если модуль параметров среды аппроксимируются непрерывными мультипликативными каскадами с логарифмически нормальным распределением.

Ключевые слова: сейсмические волны, многомасштабные неоднородные среды, подсеточное моделирование, эффективные коэффициенты.

Введение

Осадконакопление в достаточно спокойных условиях (в отсутствии антропогенных факторов или природных катастроф) приводит к тому, что природные неоднородные среды приобретают свойства слоистой системы. Как правило, решение таких задач основано на аналитическом или численном решении уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами для сред с разного вида регулярными неоднородностями – слоями. Однако для природных сред, особенностью которых является их существенная неоднородность, решение задачи требует больших вычислительных затрат и использование его для анализа и интерпретации результатов существенно затруднено. Обычно мелкомасштабные аномалии поля можно учесть с помощью эффективных коэффициентов, используя статистические подходы [1]. При полномасштабном численном моделировании процесса распространения волн в средах, включающих мелкомасштабные неоднородности эффективные коэффициенты слабо зависят от граничных условий, если масштаб неоднородностей много меньше длины волны. В этом случае для определения эффективных коэффициентов нужно учитывать члены высшего порядка в теории возмущений [1]. Геофизическая, среда, как правило, является многомасштабной, к тому же координаты мелкомасштабных неоднородностей точно неизвестны. Поэтому часто среда описывается статистическими полями. Лабораторные исследования кернов и полевые измерения показали, что в неупорядоченных неоднородных средах увеличивается разброс по величине параметров среды и уменьшается корреляционная длина, если масштаб измерений уменьшается [2], [3]. Такие геофизические неупорядоченные среды хорошо описываются мультипликативными иерархическими каскадами с негауссовским распределением вероятностей и фрактальными моделями [2]. Этот факт позволяет для построения эффективного решения применять метод подсеточного моделирования. В настоящей работе с помощью метода подсеточного моделирования получены эффективные коэффициенты для задачи распространения упругих волн, если параметры аппроксимируются непрерывными мультифракталами с логарифмически нормальным распределением вероятностей в изотропной среде.

1 Постановка задачи

Уравнения для задачи распространения упругих волн в двумерной неоднородной изотропной среде имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_{x_1}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} \right) &= f_{x_1}(\mathbf{x}, t) \\ \rho \frac{\partial^2 u_{x_2}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} \right) &= f_{x_2}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{x} — вектор координат, t — время, ρ — плотность, $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ — коэффициенты Ламе, $u_{x_1}(\mathbf{x}, t)$ and $u_{x_2}(\mathbf{x}, t)$ — компоненты смещения, $f_{x_1}(\mathbf{x}, t)$, $f_{x_2}(\mathbf{x}, t)$ — компоненты источника с доминантной частотой ω_0 . Для моделирования случайных полей $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$, ρ используется подход, подробно описанный в работе [4]. Пусть, например, поле коэффициента $\mu(\mathbf{x})$ известно. Это означает, что выполнено его измерение на некотором масштабе l_0 в каждой точке. Чтобы перейти к более грубой сетке масштабов не достаточно сгладить это поле по масштабу l , $l > l_0$, потому что сглаженное поле не будет правильно описывать физический процесс описываемый системой уравнений (1) на интервале масштабов (l, L) , где L максимальный масштаб неоднородности среды. Это объясняется тем, что флуктуации коэффициента $\mu(\mathbf{x})$ на интервале масштабов (l_0, L) коррелируют с флуктуациями полей $\frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_j}$, ($i = 1, 2, j = 1, 2$) и эти корреляции могут быть достаточно большими. Рассмотрим безразмерное поле ψ , равное отношению полей полученных сглаживанием поля $\mu(\mathbf{x}, l_0)$ по двум различным l, l' масштабам, близким к l_0 . Пусть $\mu(\mathbf{x}, l)$ сглаженное по масштабу l поле $\mu(\mathbf{x}, l_0)$. Для ψ имеем соотношение $\psi(\mathbf{x}, l, l') = \mu(\mathbf{x})_{l'}/\mu(\mathbf{x})_l$, $l' < l$. Поле ψ меняется плавно по сравнению с полями $\mu(\mathbf{x}, l)$, $\mu(\mathbf{x}, l')$. Разложим поле ψ в ряд относительно $(l - l')$, и оставим только члены первого порядка малости при $l' \rightarrow l$. В результате получим:

$$\frac{\partial \ln \mu_l(\mathbf{x})}{\partial \ln l} = \varphi(\mathbf{x}, l), \quad (2)$$

здесь $\varphi(\mathbf{x}, l') = (\partial \psi(\mathbf{x}, l', l') / \partial y) |_{y=1}$. Мелкомасштабные флуктуации поля φ наблюдаются только в некотором конечном диапазоне масштабов l_0, L . Решение уравнения (2) равно

$$\mu_{l_0}(\mathbf{x}) = \mu_0 \exp \left(- \int_{l_0}^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right), \quad (3)$$

здесь μ_0 — константа. Согласно теореме о суммах независимых случайных полей [6], если дисперсия $\varphi(\mathbf{x}, l)$ в данной точке конечна, то при больших значениях L/l_0 интеграл в (3) стремится к полю с нормальным распределением вероятностей. Коэффициент плотности ρ моделируется таким же образом:

$$\rho_{l_0}(\mathbf{x}) = \rho_0 \exp \left(- \int_{l_0}^L \chi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right). \quad (4)$$

Для получения эффективных коэффициентов, задача решается при условии, что $\lambda(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$, как первый шаг.

Предполагается, что поля $\varphi(\mathbf{x}, l)$, $\chi(\mathbf{x}, l)$ имеют нормальное распределение и изотропные, однородные корреляционные функции:

$$\begin{aligned} < \varphi(\mathbf{x}, l) \varphi(\mathbf{y}, l') > - < \varphi(\mathbf{x}, l) > < \varphi(\mathbf{y}, l') > = \Phi^{\varphi\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l, l') \delta(\ln l - \ln l'), \\ < \chi(\mathbf{x}, l) \chi(\mathbf{y}, l') > - < \chi(\mathbf{x}, l) > < \chi(\mathbf{y}, l') > = \Phi^{\chi\chi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l, l') \delta(\ln l - \ln l'), \\ < \varphi(\mathbf{x}, l) \chi(\mathbf{y}, l') > - < \varphi(\mathbf{x}, l) > < \chi(\mathbf{y}, l') > = \Phi^{\varphi\chi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, l, l') \delta(\ln l - \ln l'). \end{aligned} \quad (5)$$

Угловые скобки означают статистическое усреднение.

2 Подсеточное моделирование

Функции плотности и коэффициент Ламе разделим на две компоненты относительно масштаба l . Крупномасштабные компоненты (надсеточные) $\mu(\mathbf{x}, l)$, $\rho(\mathbf{x}, l)$, получим статистическим усреднением по всем $\varphi(\mathbf{x}, l_1)$

и $\chi(\mathbf{x}, l_1)$ при $l_0 < l_1 < l$, $l - l_0 = dl$ где $l - l_0 = dl$ мало. Мелкомасштабные (подсеточные) компоненты $\rho'(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x}, l)$, $\mu'(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}, l)$ можно записать как:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, l) &= \rho_0 \exp \left[- \int_l^L \chi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right], \\ \rho'(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x}, l) \left[\exp \left[- \int_{l_0}^l \chi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] - 1 \right], \quad \langle \rho'(\mathbf{x}) \rangle = 0, \\ \mu(\mathbf{x}, l) &= \mu_0 \exp \left[- \int_l^L \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle, \\ \mu'(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}, l) \left[\frac{\exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right]}{\left\langle \exp \left[- \int_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x}, l_1) \frac{dl_1}{l_1} \right] \right\rangle} - 1 \right], \quad \langle \mu'(\mathbf{x}) \rangle = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

После преобразования Фурье по времени уравнения (1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\omega^2 \rho u_{x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} \right) &= -f_{x_1}(\omega, \mathbf{x}) \\ \omega^2 \rho u_{x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_2} + 3\mu \frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2} \right) &= -f_{x_2}(\omega, \mathbf{x})\end{aligned}\quad (7)$$

Используя (6) усредним решение системы (7) по мелкомасштабным компонентам:

$$\begin{aligned}&\omega^2 \rho(\mathbf{x}, l) u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right) \\&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} + \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} \right) \\&+ \omega^2 \langle \rho'(\mathbf{x}) u'_{x_1}(\mathbf{x}) \rangle + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\langle 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle \\&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mu(\mathbf{x}') \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right\rangle = -f_{x_1}(\mathbf{x}) \\&\omega^2 \rho(\mathbf{x}, l) u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} + \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} \right) \\&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + 3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right) \\&+ \omega^2 \langle \rho'(\mathbf{x}) u'_{x_2}(\mathbf{x}) \rangle + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right\rangle \\&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle = -f_{x_2}(\omega, \mathbf{x})\end{aligned}\quad (8)$$

В этом надсеточном уравнении есть подсеточные члены: $S_1 = \langle \rho'(\mathbf{x}) u'_{x_1}(\mathbf{x}) \rangle$, $S_2 = \langle \rho'(\mathbf{x}) u'_{x_2}(\mathbf{x}) \rangle$, $S_3 = \left\langle 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \mu(\mathbf{x}') \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle$, $S_4 = \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mu(\mathbf{x}') \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right\rangle$, $S_5 = \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle$. Подсеточные члены в (8) неизвестны и не могут быть отброшены без предварительной оценки. Оценки этих выражений в (8) определяют подсеточную модель. Для оценки используем теорию возмущений. Вычитая систему (8) из системы (7) и отбрасывая члены второго порядка

малости, получим подсеточные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \rho(\mathbf{x}, l) \omega^2 u'_{x_1}(\mathbf{x}) + 3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + 2\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \\
 = & -\omega^2 \rho' u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right) \\
 & \omega^2 \rho(\mathbf{x}, l) u'_{x_2}(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} + \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + 3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial^2 u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \\
 = & -\omega^2 \rho' u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Смещения $u_{x_i}(\omega, \mathbf{x}, l)$ в правой части (9) предполагаются известными. Для фрактальных полей малое изменение масштаба измерения вызывает значительное возмущение поля. Поэтому можно предположить, что $\mu(\mathbf{x}, l)$, $\rho(\mathbf{x}, l)$, $u_{x_i}(\omega, \mathbf{x}, l)$ и производные этих полей меняются медленнее, чем $\mu(\mathbf{x})'$, $\rho(\mathbf{x})'$, u'_{x_i} и их производные. Функция Грина для уравнений (9) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 G_{ij}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) &= \frac{1}{8i\rho} (A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})), \quad r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}, \\
 A &= \frac{1}{\alpha^2} H_0^{(2)}(k_\alpha r) + \frac{1}{\beta^2} H_0^{(2)}(k_\beta r), \quad B = \frac{1}{\alpha^2} H_2^{(2)}(k_\alpha r) - \frac{1}{\beta^2} H_2^{(2)}(k_\beta r), \\
 k_\alpha &= \omega/\alpha, \quad k_\beta = \omega/\beta, \quad \gamma_i = \frac{x_i - x'_i}{r}, \quad \alpha^2 = 3\beta^2, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x}, l)}{\rho(\mathbf{x}, l)}},
 \end{aligned}$$

где $H_m^{(2)}(\cdot)$ функции Хенкеля второго порядка. Поэтому решение системы (9) имеет вид

$$\begin{aligned}
 u'_{x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \int (A - B(2\gamma_1^2 - 1)) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) - 2\gamma_1\gamma_2 B \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}', \\
 u'_{x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \int -2\gamma_1\gamma_2 B \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) + (A - B(2\gamma_2^2 - 1)) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}',
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l) &= -\omega^2 \rho' u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right), \\
 \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l) &= -\omega^2 \rho' u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} + \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} \right) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_1}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{x_2}(\omega, \mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right).
 \end{aligned}$$

Подставляя это решение в подсеточные члены придем к следующим формулам

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \rho'(\mathbf{x}) \int (A(r) - B(r)(2\gamma_1^2 - 1)) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) - 2\gamma_1\gamma_2 B(r) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle, \\
S_2 &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \rho'(\mathbf{x}) \int (A(r) - B(r)(2\gamma_2^2 - 1)) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) - 2\gamma_1\gamma_2 B(r) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle, \\
S_3 &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(3 \frac{\partial}{\partial x_1} (A(r) - B(r)(2\gamma_1^2 - 1)) - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \gamma_1\gamma_2 B(r) \right) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle \\
&+ \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (A(r) - B(r)(2\gamma_2^2 - 1)) - 6 \frac{\partial}{\partial x_1} \gamma_1\gamma_2 B(r) \right) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle, \\
S_4 &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (A(r) - B(r)(2\gamma_1^2 - 1)) - 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \gamma_1\gamma_2 B(r) \right) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle \\
&+ \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (A(r) - B(r)(2\gamma_2^2 - 1)) - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \gamma_1\gamma_2 B(r) \right) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle, \\
S_5 &= \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (A - B(2\gamma_1^2 - 1)) - 6 \frac{\partial}{\partial x_2} \gamma_1\gamma_2 B \right) \Omega_{x_1}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle \\
&+ \frac{1}{8i\rho(\mathbf{x}, l)} \left\langle \mu'(\mathbf{x}) \int \left(3 \frac{\partial}{\partial x_2} (A - B(2\gamma_2^2 - 1)) - 2\gamma_1\gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_1} B \right) \Omega_{x_2}(\omega, \mathbf{x}', l) d\mathbf{x}' \right\rangle,
\end{aligned} \tag{10}$$

Получим оценки для подсеточных членов в уравнении (8) используя выражения из (6). Применим интегрирование по частям и перейдем к полярным координатам. Пренебрегая членами порядка L^2 , получим

$$\begin{aligned}
\omega^2 \langle \rho'(\mathbf{x}) u'_{x_1}(\mathbf{x}) \rangle &\simeq 0, \quad \langle \rho'(\mathbf{x}) \omega^2 u'_{x_2}(\mathbf{x}) \rangle \simeq 0, \\
\left\langle 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \mu(\mathbf{x}') \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle &\simeq \\
-\frac{10}{9} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} 3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_1} - 2\Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_2}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_2}, \\
\left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mu(\mathbf{x}') \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right\rangle &\simeq -\frac{1}{3} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} \mu(\mathbf{x}, l) \left(\frac{\partial u_{x_2}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{x_1}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_2} \right), \\
\left\langle \mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} + 3\mu'(\mathbf{x}) \frac{\partial u'_{x_2}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right\rangle &\simeq \\
-2\Phi^{\varphi\varphi}(0, l) d\mathbf{x}' \frac{dl}{l} \mu(\mathbf{x}, l) \frac{\partial u_{x_1}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_1} - \frac{10}{9} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) 3\mu(\mathbf{x}, l) \frac{dl}{l} \frac{\partial u_{x_2}(\mathbf{x}, l)}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставим полученные оценки в надсеточные уравнения и приведем подобные члены. Получим, что со вторым порядком точности по (dl/l) параметры μ_{0l}^j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
\mu_{0l}^{(1)} &= \left(1 - \langle \varphi \rangle \frac{dl}{l} - \frac{11}{18} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} \right) \mu_0 \\
\mu_{0l}^{(2)} &= \left(1 - \frac{3}{2} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} - \langle \varphi \rangle \frac{dl}{l} \right) \mu_0 \\
\mu_{0l}^{(3)} &= \left(1 - \langle \varphi \rangle \frac{dl}{l} + \frac{1}{6} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) \frac{dl}{l} \right) \mu_0
\end{aligned}$$

Если $dl \rightarrow 0$, то для эффективных коэффициентов μ_{0l}^j , ρ_{0l} получаются уравнения

$$\begin{aligned}
\rho_{0l} &= \rho_0, \\
\frac{d \ln \mu_{0l}^{(1)}}{d \ln l} &= -\frac{11}{18} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) - \langle \varphi \rangle, \quad \mu_{0l_0}^{(1)} = \mu_0, \\
\frac{d \ln \mu_{0l}^{(2)}}{d \ln l} &= -\frac{3}{2} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) - \langle \varphi \rangle, \quad \mu_{0l_0}^{(2)} = \mu_0, \\
\frac{d \ln \mu_{0l}^{(3)}}{d \ln l} &= \frac{1}{6} \Phi^{\varphi\varphi}(0, l) - \langle \varphi \rangle, \quad \mu_{0l_0}^{(3)} = \mu_0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Если среда масштабно-инвариантная, то решения уравнений (12) имеют простой вид:

$$\rho_{0l} = \rho_0, \quad \mu_{0l}^{(1)} = \mu_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{-\frac{11}{18}\Phi_0^{\varphi\varphi} - \langle\varphi\rangle}, \quad \mu_{0l}^{(2)} = \mu_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{-\frac{3}{2}\Phi_0^{\varphi\varphi} - \langle\varphi\rangle}, \quad \mu_{0l}^{(2)} = \mu_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\frac{1}{6}\Phi_0^{\varphi\varphi} - \langle\varphi\rangle}. \quad (13)$$

3 Численный эксперимент

Численное моделирование для проверки предлагаемого подхода было проведено для трехмерного уравнения акустики. На рис. 1 приведен упругий модуль для трех масштабов.

На рис. 2 представлены результаты расчетов. Кривая 1 — высчитано смещение, если во всей области плотность и модуль упругости постоянны и равны средним значениям. Кривая 2 рассчитана с эффективными коэффициентами. Кривая 3 — усредненное по 60 реализациям смещение, если μ моделируется мультипликативным каскадом. Кривая 4 — усредненное по 60 реализациям смещение, если μ и ρ моделируются мультипликативными каскадами.

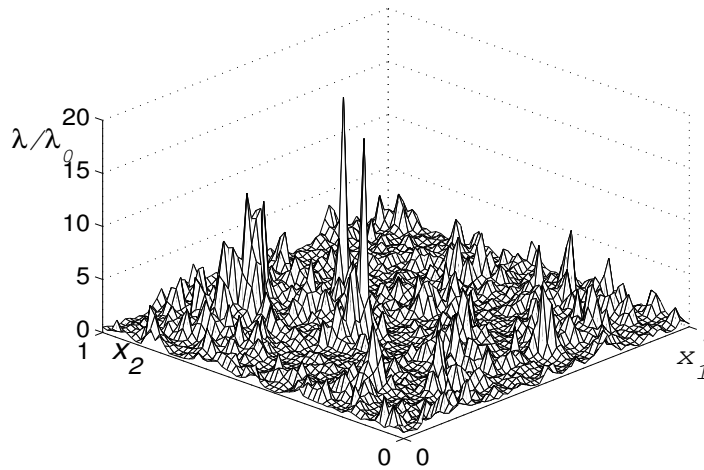


Рис. 1: упругий модуль для трех масштабов в сечении $z = 1/2$.

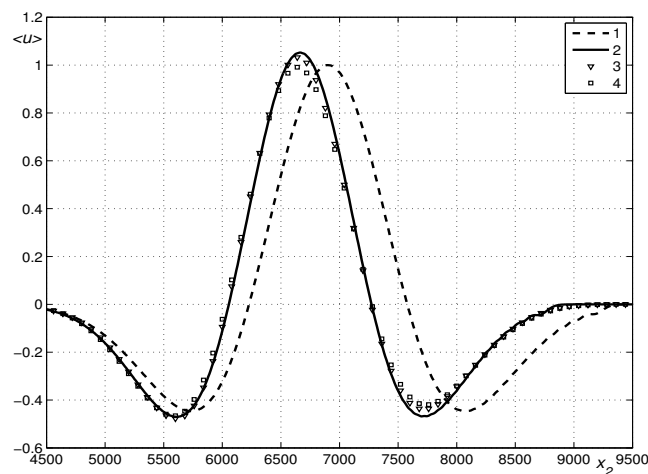


Рис. 2: Результаты численного тестирования

Заключение

В работе получены эффективные коэффициенты для уравнения акустики и двумерных уравнений теории упругости. Параметры моделей описываются крайне нерегулярными случайными полями близкими к мультифракталам. Мультифракталы получаются, если масштаб l_0 в формуле (3) устремить к нулю. Предложенный алгоритм проверяется прямым численным моделированием трехмерного уравнения акустики. Численная проверка показала хорошее соответствие теоретического результата с результатом, полученным прямым численным моделированием.

Список литературы

- [1] Sahimi M. Flow phenomena in rocks: from continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // Reviews of Modern Physics. 1993. V. 65. P. 1393–1534.
- [2] Davis, A., A. Marshak, W. Wiscombe, and R. Cahalan, Multifractal characterizations of nonstationarity and intermittency in geophysical fields: Observed, retrieved, or simulated // J. Geophys. Res. 1994. V. 99. P. 8055—8072.
- [3] Sahimi M. and Tajar S.E. Self-affine fractal distributions of bulk density, elastic moduli and seismic wave velocities of rock // Physical Review E. 2005. V. 71, 046301.
- [4] Соболева О.Н., Курочкина Е. П. Подсеточное моделирование процессов протекания в анизотропной фрактальной среде// ПМТФ. 2009. № 5. С. 75–89.
- [5] Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number
Journal Fluid Mechanics. 1962. V. 13. P. 82–85.
- [6] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Ленинград: Гостехиздат, 1954.
- [7] Dagan G., Flow and transport in Porous Formation, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
- [8] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику, Часть 2, Случайные поля, Наука, Москва, 1978.
- [9] Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications, Utrecht, The Netherlands, 1996

*Ольга Николаевна Соболева — д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Новосибирского государственного университета;
e-mail: olga@nmsf.ssc.ru;*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.