

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ В ЗАДАЧЕ ГЕОЭЛЕКТРИКИ ЛИНИЕЙ С ПОТЕРЯМИ

Ю. В. Анищенко, А. Дж. Сатыбаев

Ошский технологический университет имени академика М. М. Адышева, 723503, Кыргызстан

УДК 517.962

Рассмотрена задача геоэлектрики и определена скорость распространения волн. Доказана теорема о сходимости приближенного решения, построенной конечно-разностным методом, к точному решению обратной задачи геоэлектрики и получена оценка сходимости.

Ключевые слова: задача геоэлектрики, обратная задача, линия с потерями, конечно-разностное решение, сходимость, оценка сходимости.

Введение

Многочисленные задачи интерпретации геофизических данных приводятся к задачам определения формы и глубины залегания источника поля (электрического, магнитного, гравитационного, теплового и др.).

Многие задачи прикладных проблем приводятся к задачам геоэлектрики:

- система уравнений Максвелла в случае макроскопической электродинамики;
- при исследовании геоэлектрических и геодинамических строений Земли;
- при исследовании сейсмoeлектрических состояний Земли и т.д.

Таким образом, построение устойчивых вычислительных методов, алгоритмов и компьютерных программ уравнения геоэлектрики является одной из актуальных задач современности [5, 1].

Прямая задача геоэлектрики заключается в нахождении электромагнитного поля, возбуждаемого заданной системой источников в заданной геоэлектрической среде.

Обратная задача электроразведки (геоэлектрики) заключается в определении физических параметров уравнения при задании дополнительной информации о решении задачи на поверхности среды и источников [2].

1 Постановка задачи

Уравнение геоэлектрики описывает электромагнитное поле в изотропных проводящих средах, когда индуктивный ток мал в сравнении с током проводимости. Рассмотрим вектор потенции в проницаемости поля, тогда имеем математическую модель в виде уравнений геоэлектрики:

$$H''_{tt}(z, t) = \frac{\bar{c}^2(z)}{\varepsilon(z)\mu(z)} H''_{zz}(z, t) + \frac{\bar{c}^2(z)}{\varepsilon(z)\mu(z)} \cdot \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} H'_z(z, t) - \frac{4\pi\lambda(z)}{\varepsilon(z)} [H'_z(z, t) + H'_t(z, t)],$$

где $H(z, t)$ — напряженность магнитного поля, $\bar{c}(z)$ — скорость распространения волн, $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$ — электрическая и магнитная проницаемости, $\lambda(z)$ — электропроводимость. Пусть магнитная проницаемость $\mu(z) = 1$, тогда второе выражение правой части будет равно нулю. Задача

$$H''_{tt}(z, t) = \frac{\bar{c}^2(z)}{\varepsilon(z)} H''_{zz}(z, t) - \frac{4\pi\lambda(z)}{\varepsilon(z)} [H_z(z, t) + H_t(z, t)], \quad z \in R_+, \quad t \in R_+, \quad (1)$$

$$H(z, t)|_{t < 0} \equiv 0, H'_z(z, t)|_{z=0} = -\frac{1}{2}r_0\delta(t), \quad (2)$$

$$H(z, t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, r_0 — некоторое постоянное число. Отметим, что если функция $\lambda(z)$ относительно большая, а функция $\varepsilon(z)$ относительно малая, то получим задачу линией с потерями.

2 Обратная задача

Определить из задачи (1)–(3) функцию $\bar{c}(z)$ — скорость распространения волны при известных функциях $\varepsilon(z)$, $\lambda(z)$, постоянного r_0 и дополнительной информации $f(t)$. Пусть относительно коэффициентов и неизвестной скорости распространения волн выполнено условие:

$$\{\bar{c}(z), \lambda(z), \varepsilon(z)\} \in \Lambda_0, \quad (4)$$

где

$$\Lambda_0 = \left\{ \varepsilon(z) \in C^6(R_+), \quad \varepsilon'(0) = 0, \quad 0 < M_1 \leq \varepsilon(z) \leq M_2, \quad \|\varepsilon\|_{C^2} \leq M_3 \right\},$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные.

Приведение к обратной задаче с данными на характеристиках.

Введем новую переменную x :

$$x = \int_0^z \frac{\sqrt{\varepsilon(\lambda)}}{\bar{c}(\lambda)} d\lambda.$$

Для того, чтобы, замена была невырожденной, пусть выполняется условие:

$$x_z > 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} x(z) = 0.$$

Введем теперь новые функции:

$$c(x(z)) = \bar{c}(z), \quad a(x(z)) = \varepsilon(z), \quad d(x(z)) = \lambda(z), \quad u(x(z), t) = H(z, t).$$

Тогда, продолжая решать все входящие функции в уравнения четным образом по x на $R_- = x \in R, \quad x < 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) - \frac{(\sqrt{a(x)})'_x \cdot c(x) - \sqrt{a(x)} \cdot c'_x(x)}{\sqrt{a(x)} \cdot c(x)} u_x - \frac{4\pi d(x)}{a(x)} (u_t + u_x), \quad x \in R, \quad t \in R, \\ u(x, t)|_{t < 0} &\equiv 0, \quad u_x(x, t)|_{x=0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c(0) \cdot r_0}{\sqrt{a(0)}} \delta(t), \\ u(x, t)|_{x=0} &= f(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где искомой функцией является функция $c(x)$. В силу условия (4) и принципа конечной зависимости области решения гиперболического уравнения от области определения его коэффициентов и от области данных можно ограничиться рассмотрением задачи (5) в области

$$\Delta(T) = \{(x, t) \in R \times R_+, x \in (0, T/2), |x| < t < T - |x|\}.$$

Предоставляя теперь решение прямой задачи (4) в суперпозиции сингулярных и регулярных частей:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + S(x)\Theta(t - |x|), \quad (x, t) \in \Delta(T),$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — гладкая непрерывная функция, $\Theta(t - |x|)$ — тета-функция Хевисайда. Проводим следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \tilde{u}(x, t) + S(x)\theta(t - |x|), \\
u_t(x, t) &= \tilde{u}_t(x, t) + S(x)\delta(t - |x|), \\
u_{tt}(x, t) &= \tilde{u}_{tt}(x, t) + S(x)\delta'(t - |x|), \\
u'_x(x, t) &= \tilde{u}_x(x, t) + S'_x\theta(t - |x|) - S(x)\delta(t - |x|), \\
u_{xx} &= \tilde{u}_{xx} + S''_{xx}\theta(t - |x|) - 2S'_x(x)\delta(t - |x|) + S(x)\delta'(t - |x|), \\
\tilde{u}_{tt} + S(x)\delta'(t - |x|) &= \tilde{u}_{xx} + S''_{xx}\theta(t - |x|) - 2S'_x(x)\delta(t - |x|) + S(x)\delta'(t - |x|) - \left(\frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}}\right)' \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)' [\tilde{u}_x + \\
&+ S'_x(x)\theta(t - |x|) - S(x)\delta(t - |x|)] - \frac{4\pi d(x)}{a(x)} [\tilde{u}_t(x, t) + S(x)\delta(t - |x|) + \tilde{u}_x + S'_x(x)\theta(t - |x|) - S(x)\delta(t - |x|)]. \\
\theta(t - |x|) : S''_{xx}(x) - \left(\frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}}\right)' \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)'_x S'(x) - \frac{4\pi d(x)}{a(x)} S'(x) &= 0. \\
\delta(t - |x|) : -2S'_x(x) + \left(\frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}}\right)' \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)'_x S(x) = 0 \Rightarrow 2\frac{S'(x)}{S(x)} &= \left(\frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}}\right)' \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)'_x. \\
\delta'(t - |x|) : \emptyset.
\end{aligned}$$

Тогда из обратной задачи (5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) - 2\frac{S'(x)}{S(x)}u_x(x, t) - \frac{4\pi d(x)}{a(x)}(u_t(x, t) + u_x(x, t)), \quad (x, t) \in \triangle(T), \\ u(x, t)|_{t=|x|} &= S(x), \quad x \in [0, T/2], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

Таким образом, мы получим регулярную обратную задачу, в которой необходимо определить функцию $S(x)$. Функции $S(x)$ и $c(x)$ связаны следующей задачей

$$2\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)'_x}{\left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)}\right)_x}, \quad S(0) = \frac{c(0)r_0}{\sqrt{a(0)}}. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$D(x) = 2\frac{S'(x)}{S(x)}, \quad G(x) = \frac{1}{S(x)}. \quad (9)$$

Тогда, они соответственно будут удовлетворять следующим интегральным уравнениям:

$$S(x) = -\frac{c(0)r_0}{\sqrt{a(0)}} + \frac{1}{2} \int_0^x D(\lambda)S(\lambda)d\lambda, \quad x \in [0, T/2], \quad (10)$$

$$G(x) = -\frac{\sqrt{a(0)}}{r_0c(0)} - \frac{1}{2} \int_0^x D(\lambda)G(\lambda)d(\lambda), \quad x \in [0, T/2]. \quad (11)$$

Конечно-разностное решение. Решение обратной задачи (6), (7), (9), (10), (11), где искомой функцией является функция $S(x)$, будем искать конечно-разностным методом. Введем сеточную область

$$\triangle_h(T) = \{x_i = ih, \quad t_k = kh, \quad h = T/2N, \quad i = \overline{0, N}, \quad ih < kh < T - ih\},$$

где h — сеточный шаг по переменным x, t . Используя сеточные обозначения [3], напомним сеточный аналог обратной задачи (6), (7), (9), (10), (11):

$$\left. \begin{aligned} u_{\bar{t}\bar{t}} &= u_{x\bar{x}} - D_i u_{\bar{x}} - \frac{4\pi d_i}{a_i}(u_{\bar{t}} + u_{\bar{x}}), \quad (x_i, t_k) \in \triangle_h(T), \\ u_{\bar{t}}^i &= S_i, \quad i = \overline{0, N}, \\ G_i &= \frac{1}{f_0} - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^{i-1} D_l G_l, \quad i = \overline{1, N}, \\ D_i &= 2S_{\bar{x}} G_i, \quad i = \overline{2, N}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$u_0^k = f_k, \quad k = \overline{0, 2N}. \quad (13)$$

Опишем алгоритм решения обратной задачи (12), (13). Полагаем

$$u_0^k = f^k, \quad k = \overline{0, 2N}. \quad (14)$$

Из четности всех функций следует

$$u_2^k = (f^{k+2} + f^{k-2})/2, \quad k = \overline{2, 2N-2}. \quad (15)$$

Тогда можно определить последовательно

$$\begin{aligned} S_0 = u_0^0, \quad S_{-2} = u_2^2, \quad G_0 = \frac{1}{f^0}, \\ D_0 = 2G_0 S_0|_{i=0} = \frac{2}{f^0} \frac{S_0 - S_2}{2h} = \frac{2}{f^0} \frac{u_0^0 - u_2^2}{2h}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим следующие значения:

$$\begin{aligned} u_1^k &= (f^{k+1} + f^{k-1})/2 - h^2 D_0 \left(\frac{u_0^k - u_2^k}{2h} \right) - \frac{4\pi d_0}{a_0} h^2 \left[\left(\frac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h} \right) + \left(\frac{u_1^k - u_0^k}{h} \right) \right], \\ S_1 &= u_1^1, \quad S_{-1} = u_1^1, \quad G_1 = \frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} D_0 G_0, \quad D_1 = 2G_1 \frac{S_1 - S_{-1}}{2h}, \\ G_2 &= -\frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} D_0 G_0 - \frac{h}{2} D_1 G_1, \quad D_2 = 2G_2 \frac{S_2 - S_0}{2h}, \end{aligned} \quad (17)$$

Допустим, построен i -й слой. Покажем, как определяется следующий слой: определим u_{i+1}^k по формуле Даламбера:

$$\begin{aligned} u_{i+1}^k &= (f^{k+1} + f^{k-1})/2 - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p D_\mu \left[\frac{u_\mu^{k-i-\mu+2p} - u_{\mu-2}^{k-i-\mu+2p}}{2h} \right] - \\ &- 4\pi h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p \left[\frac{u_\mu^{k-i-\mu+2p} - u_{\mu-2}^{k-i-\mu+2p-1}}{h} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

а затем определяем

$$S_{i+1} = u_{i+1}^{i+1}, \quad G_{i+1} = \frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^i D_l G_l, \quad D_{i+1} = 2G_{i+1} \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h}. \quad (19)$$

Таким образом, последовательно определяется неизвестная функция S_i . Показываем теперь, что S_i точное решение обратной задачи сходится к \tilde{S}_i — точному решению по методике [4]. Если определены S_i , то по формуле (8) можем определить и неизвестную i . Проинтегрируя (8) и заменив интеграл квадратурной формулой получим:

$$2 \ln S_i = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \left[1 - \frac{c_i}{c_{i-1}} \sqrt{\frac{a_{i-1}}{a_i}} \right] h,$$

отсюда

$$c_i = 2c_{i-1} \sqrt{\frac{a_i}{a_{i-1}}} \left[1 - \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \right].$$

Из (18) получим:

$$u_{i+1}^k = \frac{1}{2} [f^{k+i+1} + f^{k-i-1}] - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{k-i-\mu+2p}, \quad (20)$$

где

$$B_\mu^{k-i-\mu+2p} = \frac{D_\mu}{2h} [u_\mu^{k-i-\mu+2p} - u_{\mu-2}^{k-i-\mu+2p}] - \frac{4\pi d_\mu}{h a_\mu} [u_\mu^{k-i-\mu+2p} - u_\mu^{k-i-\mu+2p-1}].$$

Предполагая в (20) $k = i + 1$ получим:

$$S_{i+1} = \frac{1}{2} [f^{2i+2} + f^0] - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{1-\mu+2p}. \quad (21)$$

Напишем разностный аналог (9)

$$G_{i+1} = 1/S_{i+1} = 1/\left\{\frac{1}{2}[f^{2i+2} + f^0] - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p}\right\} \quad (22)$$

$$D_{i+1} = 2 \left[\frac{S_{i+1} - S_i}{h} \right] G_{i+1} = \frac{2}{h} \left\{ [f^{2i+2} - f^{2i+1} + f^0 - f^1] - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p [B_{\mu}^{1-\mu+2p} - B_{\mu-1}^{1-\mu+2p}] \right\} \times \\ \times \left\{ 1/\left[\frac{1}{2}(f^{2i+2} + f^0) - h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p}\right] \right\}. \quad (23)$$

Из (20) имеем:

$$u_0^k = \frac{1}{2}[f^k + f^{k-2}], \quad (24)$$

$$\frac{S_i - S_{i-1}}{h} = \frac{1}{2h}(f^{2i} - f^{2i-2}) + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{2i-\mu-1} + h \sum_{\mu=1}^{i-3} B_{\mu}^{2i-\mu-1}. \quad (25)$$

Покажем теперь как определяется неизвестная c^i , если определена сеточная функция S^i .

$$\begin{aligned} \int \frac{2S'(x)dx}{S(x)} &= \int \frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}} \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)} \right)'_x dx, \\ 2 \ln S(x) &= \int \frac{c(x)}{\sqrt{a(x)}} \left(\frac{\sqrt{a(x)}}{c(x)} \right) dx, \\ 2 \ln S_i &= h \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\sqrt{a_i}} \left[\frac{\frac{\sqrt{a_i}}{c_i} - \frac{\sqrt{a_{i-1}}}{c_{i-1}}}{h} \right], \\ 2 \ln S_i &= \sum_{i=1}^N \left[1 - \frac{c_i}{c_{i-1}} \sqrt{\frac{a_{i-1}}{a_i}} \right], \\ 2 \ln S_i &= 1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \Rightarrow c_1 = [1 - \ln S_1] c_0 \sqrt{\frac{a_1}{a_0}}, \\ 2 \ln S_2 &= \underbrace{\left[1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \right]}_{2 \ln S_1} + \left[1 - \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \right], \\ 2[\ln S_2 - \ln S_1] &= 2 \ln \frac{S_2}{S_1} = \left[1 - \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \right], \\ c_2 &= \left[1 - 2 \ln \frac{S_2}{S_1} \right] c_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \\ 2 \ln S_3 &= \underbrace{\left[1 - \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{a_0}{a_1}} \right]}_{2 \ln S_1} + \underbrace{\left[1 - \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \right]}_{2 \ln S_2} + \left[1 - \frac{c_3}{c_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_3}} \right], \\ c_3 &= \left[1 - 2 \ln \frac{S_3}{S_2} \right] c_2 \sqrt{\frac{a_3}{a_2}}, \\ c_N &= \left[1 - 2 \ln \frac{S_N}{S_{N-1}} \right] c_{N-1} \sqrt{\frac{a_N}{a_{N-1}}}. \end{aligned}$$

Составим теперь разностный аналог системы обратной задачи (12), (13)

$$\Phi_{i+1}^k = F_{i+1}^k + h \sum_{p=1}^i A[\Phi_p^k], \quad (26)$$

где

$$F_{i+1}^k = \begin{pmatrix} f^{k+i+1} + f^{k-i-1} \\ f^{2i+1} + f^0 \\ f^0 \\ \frac{2}{h}(f^{2i} - f^{2i-2})/(f^{2i} - f^0) \\ f^k + f^{k-2} \end{pmatrix}, \Phi_i^k = \begin{pmatrix} u_i^k \\ u_i^i \\ S_i \\ D_i \\ u_0^k \end{pmatrix}, A[\Phi_p^k] = \begin{pmatrix} h \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_{\mu}^{1-\mu+2p} \\ B_{\mu}^{1-\mu+2p} \\ h \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили операторное уравнение (26). Такое же операторное уравнение можно получить для уравнения

$$\tilde{\Phi}_{i+1}^k = \tilde{F}_{i+1}^k + h \sum_{p=1}^i A[\tilde{\Phi}_p^k] + O(h). \quad (27)$$

Здесь $\tilde{\Phi}_{i+1}^k$ — есть решение обратной задачи (12)–(13) с малой частью $O(h)$. Тогда из (27) отнимая (26) получим:

$$|\Phi_{i+1}^k - \tilde{\Phi}_{i+1}^k| = |F_{i+1}^k - \tilde{F}_{i+1}^k| + h \sum_{p=1}^i A |\Phi_p^k - \tilde{\Phi}_p^k| + O(h).$$

Введем обозначения:

$$\Delta_i = \max(\Phi_i^k - \tilde{\Phi}_i^k), \quad \delta_i = \max(F_{i+1}^k - \tilde{F}_{i+1}^k), \quad k = \overline{i, 2N-i}.$$

Используя дискретный аналог Гронуолла–Беллмана из последнего выражения получим оценку сходимости:

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\Delta_i| \leq [|\delta_i|_C + O(h)] \exp hA[\exp \Delta_i]. \quad (28)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Пусть дополнительная информация обратной задачи $f(t) \in \mathbb{C}^4 \quad (0, T)$ и пусть решение прямой задачи (12) $u(x, t) \in \mathbb{C}^6 \quad (\Delta(T))$. Пусть также выполняется условие (4), тогда при малом T, S_i — приближенное решение обратной задачи (12)–(13) сходятся к точному решению обратной задачи \tilde{S}_i в классе \mathbb{C} со скоростью порядка $O(h)$ и имеет оценку сходимости (28).

3 Результаты

Разработано конечно-разностное решение обратной задачи геоэлектрики линией с потерями. Показана сходимость этого решения к точному решению и получена оценка сходимости.

Заключение

В работе получены следующие результаты: построено приближенное решение поставленной задачи, доказана теорема сходимости приближенного решения, установлена оценка сходимости, построен алгоритм решения неизвестной скорости распространения волн.

Список литературы

- [1] Крылов С. С. Геоэлектрика: поля искусственных источников. СПб.: СПбГУ, 2004, 140 с.
- [2] Романов В. Г., Кабанихин С. И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991. — 304 с.
- [3] Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Либроком, 2009, 3-е издание, 384 с.
- [4] Сатыбаев А. Дж. Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа. Ош: ОшОблТипография, 2001. — 143 с.
- [5] Светов Б. С. Основы геоэлектрики. М.: Ozon.ru, 2015, 664 с.

Юлия Владимировна Андисенко — аспирантка каф. “Информационные технологии и управление”
Ошский технологический университет имени М. М. Адышева (Кыргызстан);
e-mail: program85@mail.ru;

Абдуганы Джунусович Сатыбаев — д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой
“Информационные технологии и управление”
Ошский технологический университет имени М. М. Адышева (Кыргызстан);
e-mail: abdu-satybaev@mail.ru.

Дата поступления — 29 мая 2017 г.