

# ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ L-СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

И. А. Блатов<sup>1</sup>, А. И. Задорин<sup>2</sup>, Е. В. Китаева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 443090, Самара

<sup>2</sup> Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Омский филиал, 644043, Омск

<sup>3</sup> Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева, 443086, Самара

УДК 519.652

Рассматривается задача обобщенной сплайн-интерполяции функций, имеющих области больших градиентов. Рассматриваются сплайны класса  $C^2$ , являющиеся на каждом сеточном интервале суммой многочлена второй степени и экспоненциальной функции, соответствующей пограничному слою. Доказано существование и единственность построенного сплайна и получены асимптотически точные двусторонние оценки погрешности на классе функций с экспоненциальным погранслоем. Установлено, что кубический и параболический интерполяционные сплайны являются предельными для решения рассматриваемой задачи. Приводятся результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** пограничный слой, экспоненциальный сплайн, оценка погрешности.

## Введение

Для сингулярно возмущенных задач известны два подхода к построению разностных схем, обладающих свойством сходимости, равномерной по малому параметру. При первом подходе разностные схемы строятся на сетках, сгущающихся в области пограничных слоев, отметим работы [1, 2, 3]. При втором подходе [4] строятся разностные схемы на равномерных сетках на основе того, чтобы они были точными на быстро растущей погранслоистой составляющей.

Для сеточных функций, найденных с помощью равномерно сходящихся схем, необходимы сплайн-интерполяционные формулы, так же обладающие свойством равномерной сходимости по возмущающему параметру, для восполнения их для всех значений независимых переменных.

В случае сетки Шишкина [2] кубический сплайн для функций с большими градиентами в пограничном слое исследовался в [5].

Остановимся на случае, когда необходимо осуществить интерполяцию функции с большими градиентами в пограничном слое, заданной в узлах равномерной сетки. В [5] показано, что интерполяция функций с большими градиентами в пограничном слое кубическими сплайнами на равномерных сетках неэффективна. В [6] построен сплайн класса  $C^2[0, 1]$ , на основе того, чтобы он был точным на многочленах второй степени и на функции пограничного слоя. Однако обоснования точности сплайна в [6] не приведено.

В данной работе мы предлагаем строить  $L$ -сплайны, точные на всех многочленах второй степени и на составляющей, задающей основной рост интерполируемой функции в экспоненциальном пограничном слое. Доказано существование и единственность интерполяционного сплайна и получены асимптотически наилучшие оценки погрешности, из которых вытекает равномерная по малому параметру  $\varepsilon$  сходимость интерполяционного процесса на функциях, имеющих большие градиенты в пограничном слое. Также показано, что предельные по возмущающему параметру постановки задач приводят к кубическим и параболическим интерполяционным сплайнам. Как следствие основного результата получено, что для параболической сплайн-интерполяции в случае совпадения узлов интерполяции с узлами сплайна на равномерной сетке, несмотря

на неограниченность совокупности констант Лебега, на классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций имеет место сходимость третьего порядка по шагу сетки, как и в случае традиционной сплайн-интерполяции по Субботину или Марсдену [7].

Отметим, что интерполяционные L-сплайны рассматривались во многих работах, например, в [8],[9], см. также обзор литературы в [9]. Однако важные для сингулярно возмущенных задач вопросы равномерной по параметру сходимости интерполяционных процессов для таких сплайнов исследованы очень слабо.

Введем обозначения. Пусть  $\varepsilon \in (0, 1]$  — положительный параметр. Пусть  $\Omega = \{x_n : x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$  — равномерная сетка интервала  $[0, 1]$  с шагом  $h = 1/N$ . Обозначим через  $S(\Omega, k, 1)$  пространство полиномиальных сплайнов степени  $k$  дефекта 1 на сетке  $\Omega$ . В случае необходимости будем считать разбиение  $\Omega$  продолженным левее точки  $x = 0$  и правее точки  $x = 1$  на всю ось с шагом  $h$ . Под  $C$  и  $C_j$  будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра  $\varepsilon$  и шага  $h$ . При этом один и тот же символ  $C_j$  может обозначать разные константы. Будем писать  $f = O(g)$ , если справедлива оценка  $|f| \leq C|g|$  и  $f = O^*(g)$ , если  $f = O(g)$  и  $g = O(f)$ , где  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ . Пусть  $C[a, b]$  — пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций с нормой  $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ . Через  $C_h[0, 1]$  обозначим линейное нормированное пространство функций из  $C[0, 1]$ , имеющих в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  односторонние производные второго порядка, с нормой  $\|u\|_{C,h} = \|u\|_{C[0,1]} + h^2(|u''(0)| + |u''(1)|)$ . Если предполагается зависимость функции  $u(x)$  от параметра  $\varepsilon$ , то будем писать  $u(x, \varepsilon)$ .

## 1 Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть  $\Omega$  — равномерная сетка интервала  $[0, 1]$  с узлами  $x_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  и шагом  $h$ , заданная во введении. Предполагаем, что функция  $u(x)$  задана в узлах сетки  $\Omega$ ,  $u_n = u(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Зададим пространство L-сплайнов, учитывающих наличие погранслошной составляющей экспоненциального вида у интерполируемой функции:

$$SL(\Omega, 3, 1) = \{S(x) \in C^2[0, 1] : S(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n e^{-x/\varepsilon}, \\ x \in [x_n, x_{n+1}], 0 \leq n \leq N-1\}.$$

Интерполяционный L-сплайн  $S(x; u) \in SL(\Omega, 3, 1)$  функции  $u(x)$  определим из условий

$$S(x_n; u) = u(x_n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad S''(0; u) = u''(0), \quad S''(1; u) = u''(1). \quad (1)$$

Основным для настоящей работы является случай, когда для интерполируемой функции  $u(x, \varepsilon)$  справедлива декомпозиция в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих:

$$u(x, \varepsilon) = q(x) + \gamma \Phi(x, \varepsilon), \quad (2)$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \leq C_1, \quad 0 \leq j \leq 4, \quad \Phi(x, \varepsilon) = e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in [0, 1].$$

Предполагаем, что в представлении (2) регулярная составляющая  $q(x)$  и постоянная  $\gamma$  не заданы, функция  $\Phi(x, \varepsilon)$  известна, ее производные неограниченно растут у границы  $x = 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Представление (2) соответствует решению краевой задачи для уравнения с малым параметром  $\varepsilon$  при старшей производной [2].

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что  $\alpha = 1$ , т.к. этот параметр можно включить в значение  $\varepsilon$ .

**Теорема 1.** Для любой функции  $u(x) \in C_h[0, 1]$  при всех значениях  $h$  и  $\varepsilon \in (0, +\infty)$  существует единственный интерполяционный сплайн  $S(x; u) \in SL(\Omega, 3, 1)$ , удовлетворяющий условиям (1), причем справедлива оценка погрешности

$$\|S(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq C \min \left\{ \frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon} \right\} \inf_{v \in SL(\Omega, 3, 1)} \|u - v\|_{C,h}. \quad (3)$$

Если функция  $u(x, \varepsilon)$  имеет вид (2), то справедливы оценки

$$\|S(x; u) - u(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq C \begin{cases} \min \left\{ h^3, \frac{h^4}{\varepsilon} \right\}, & \varepsilon \in (0, 1], \\ h^4, & \varepsilon \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (4)$$

**Замечание 1.** Из (4) вытекает равномерная по  $\varepsilon \in (0, 1]$  сходимость с третьим порядком точности интерполяционного процесса (1) для функций вида (2).

В соответствии со следующей теоремой оценки (3) и (4) являются не улучшаемыми.

**Теорема 2.** Найдется такая константа  $C_1 > 0$ , что для любых  $\varepsilon \in (0, 1]$  и  $h$  существуют такая функция  $u(x) \in C_h[0, 1]$ , что  $u''(0) = u''(1) = 0$ ,

$$\|S(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\left\{\frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\} \inf_{v \in SL(\Omega, 3, 1)} \|u - v\|_{C[0,1]} \quad (5)$$

и такая функция  $u_1(x) \in C^4[0, 1]$ , что

$$\|S(x; u_1) - u_1(x)\|_{C[0,1]} \geq C_1 \min\left\{h^3, \frac{h^4}{\varepsilon}\right\} \|u_1\|_{C[0,1]}. \quad (6)$$

Получим некоторые следствия из теорем 1 и 2 для параболического и кубического сплайнов. Пусть  $S_3(x; u) \in S(\Omega, 3, 1)$  — интерполяционный кубический сплайн функции  $u(x)$ , определяемый из условий (1), а  $S_2(x; u) \in S(\Omega, 2, 1)$  — интерполяционный параболический сплайн, определяемый из условий

$$S_2(x_n; u) = u(x_n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad S_2''(1 - 0; u) = u''(1). \quad (7)$$

Изучим предельные по параметру  $\varepsilon$  свойства экспоненциального сплайна  $S(x; u) \in SL(\Omega, 3, 1)$ .

**Теорема 3.** Для любой функции  $u(x) \in C_h[0, 1]$  интерполяционные сплайны  $S_2(x; u)$  и  $S_3(x; u)$  существуют, единственны, и при каждом фиксированном  $h = 1/N$  имеют место формулы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|S(x; u) - S_3(x; u)\|_{C[0,1]} = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \|S(x; u) - S_2(x; u)\|_{C[0,1]} = 0. \quad (9)$$

**Замечание 2.** Аналогичные (8), (9) предельные переходы к кубическим и линейным сплайнам для гиперболических сплайнов [10], содержащих две экспоненты, были получены в [11], [12]. Ниже мы приведем приложения оценок (8), (9) к обычной полиномиальной сплайн-интерполяции.

**Следствие 1.** Справедливы следующие оценки:

$$\|S_3(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq C \inf_{v \in S(\Omega, 3, 1)} \|u - v\|_{C, h}, \quad (10)$$

$$\|S_2(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq \frac{C}{h} \inf_{v \in S(\Omega, 2, 1)} \|u - v\|_{C, h}. \quad (11)$$

Если  $u(x) \in C^4[0, 1]$ , то справедливы оценки погрешности:

$$\|S_3(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq Ch^4, \quad (12)$$

$$\|S_2(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \leq Ch^3. \quad (13)$$

**Замечание 3.** Оценки (10), (12) — хорошо известные оценки погрешности кубической сплайн-интерполяции на равномерных сетках [13]. Оценки (11), (13) — это оценки погрешности параболической сплайн-интерполяции в случае совпадения узлов сплайна и узлов интерполяции. В [14], [15] отмечается, что такая постановка задачи параболической сплайн-интерполяции не является удачной. Однако из оценки (13) следует, что, несмотря на неограниченность совокупности констант Лебега в соответствии с (11) и теоремой 4 ниже, при повышенной гладкости, когда  $u(x) \in C^4[0, 1]$ , погрешность интерполяции будет иметь такой же порядок, как и в случае обычной интерполяции по Субботину или Марсдену.

В теореме 3 предельный переход по  $\varepsilon$  делается при фиксированном  $h = 1/N$ . Однако аналогичный результат справедлив, если предельный переход осуществляется в зависимости от отношения  $\varepsilon/h$ .

**Следствие 2.** Для любой функции  $u(x) \in C_h[0, 1]$  интерполяционные сплайны  $S_2(x; u)$  и  $S_3(x; u)$  существуют, единственны, и при всех  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $h = 1/N$  имеют место формулы:

$$\lim_{\varepsilon/h \rightarrow +\infty} \|S(x; u) - S_3(x; u)\|_{C[0,1]} = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{\varepsilon/h \rightarrow 0} \|S(x; u) - S_2(x; u)\|_{C[0,1]} = 0. \quad (15)$$

Остановимся на обосновании следствия 2. Формулы (14), (15) вытекают из (8), (9), поскольку доказательство формул (8), (9) основано на предельных переходах при фиксированном  $h = 1/N$  от экспоненциальных  $B$ -сплайнов к кубическим и параболическим  $B$ -сплайнам соответственно. Но для каждого отдельного  $B$ -сплайна на сетке с меняющимся шагом  $h$  предельный переход при  $\varepsilon/h \rightarrow 0$  или  $\varepsilon/h \rightarrow +\infty$  можно рассматривать как предельный переход при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  или  $\varepsilon_1 \rightarrow +\infty$ , где  $\varepsilon_1 = \varepsilon h_1/h$ , для  $B$ -сплайна на сетке с фиксированным шагом  $h_1 = 1/N_1$ , получающегося из исходного  $B$ -сплайна растяжением в  $h_1/h$  раз.

**Теорема 4.** Найдется такая константа  $C_1 > 0$ , что для любого  $h = 1/N$  существует такая функция  $u(x) \in C_h[0, 1]$ , что  $u''(0) = u''(1) = 0$ , и

$$\|S_2(x; u) - u(x)\|_{C[0,1]} \geq \frac{C_1}{h} \inf_{v \in SL(\Omega, 3, 1)} \|u - v\|_{C[0,1]}. \quad (16)$$

## 2 Численные результаты

Зададим функцию вида (2)

$$u(x, \varepsilon) = \cos \frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

а также семейство быстроосциллирующих функций, определяемых формулами

$$u_N(x) = (-1)^i \frac{x_{2i+1} - x}{h}, \quad x \in [x_{2i}, x_{2i+2}] \cap [0, 1], \quad 0 \leq i \leq N/2, \quad x_i = i/N. \quad (18)$$

Таблица 1: Погрешности и наблюдаемые скорости сходимости для функции (17).

$\varepsilon$	$N$					
	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$
1	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$9.75 \cdot 10^{-6}$ 4.01	$6.05 \cdot 10^{-7}$ 4.01	$3.77 \cdot 10^{-8}$ 4.00	$2.36 \cdot 10^{-9}$ 4.00	$1.47 \cdot 10^{-10}$ 4.00
$10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$7.18 \cdot 10^{-5}$ 4.12	$4.17 \cdot 10^{-6}$ 4.11	$2.50 \cdot 10^{-7}$ 4.06	$1.53 \cdot 10^{-8}$ 4.03	$9.46 \cdot 10^{-10}$ 4.02
$10^{-2}$	$3.73 \cdot 10^{-3}$	$4.33 \cdot 10^{-4}$ 3.10	$4.22 \cdot 10^{-5}$ 3.36	$3.02 \cdot 10^{-6}$ 3.81	$1.78 \cdot 10^{-7}$ 4.08	$1.03 \cdot 10^{-8}$ 4.11
$10^{-3}$	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$ 2.99	$6.02 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.43 \cdot 10^{-6}$ 3.01	$8.62 \cdot 10^{-7}$ 3.08	$9.21 \cdot 10^{-8}$ 3.25
$10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-3}$	$4.83 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.05 \cdot 10^{-5}$ 2.99	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
$10^{-5}$	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
$10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
$10^{-7}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00
$10^{-8}$	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$ 3.03	$6.06 \cdot 10^{-5}$ 3.00	$7.57 \cdot 10^{-6}$ 3.00	$9.46 \cdot 10^{-7}$ 3.00	$1.18 \cdot 10^{-7}$ 3.00

Результаты расчетов сведены в две таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. В табл. 1 приведены погрешности и вычисленные порядки точности для функции (17), а в табл. 2 приведены погрешности для быстроосциллирующих

Таблица 2: Погрешность для быстроосциллирующих функций (18).

$\varepsilon$	$N$					
	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
1	$6.25 \cdot 10^{-1}$	$6.20 \cdot 10^{-1}$	$6.10 \cdot 10^{-1}$	$6.05 \cdot 10^{-1}$	$6.03 \cdot 10^{-1}$	$6.02 \cdot 10^{-1}$
$10^{-1}$	$9.94 \cdot 10^{-1}$	$8.18 \cdot 10^{-1}$	$7.03 \cdot 10^{-1}$	$6.50 \cdot 10^{-1}$	$6.25 \cdot 10^{-1}$	$6.13 \cdot 10^{-1}$
$10^{-2}$	2.42	3.06	1.98	1.22	$8.81 \cdot 10^{-1}$	$7.32 \cdot 10^{-1}$
$10^{-3}$	2.92	6.28	7.61	8.09	4.37	2.39
$10^{-4}$	2.99	6.92	14.5	25.6	31.5	20.0
$10^{-5}$	3.00	6.99	14.9	30.4	58.2	93.4
$10^{-6}$	3.00	7.00	15.0	31.0	62.4	122
$10^{-7}$	3.00	7.00	15.0	31.0	63.0	126
$10^{-8}$	3.00	7.00	15.0	31.0	63.0	127

ломанных (18). При этом для каждого  $N$  в табл. 2 бралась своя функция  $u_N(x)$ . Численные результаты из табл. 1 согласуются с оценками (4) теоремы 1. Результаты вычислений, приведенные в табл. 2, согласуются с оценкой (5) теоремы 2 и при заданном достаточно малом значении  $\varepsilon$  погрешность растет с уменьшением  $h$  со скоростью  $O(h^{-1})$ .

## Заключение

В работе получены следующие результаты. Для интерполяции функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое построен обобщенный  $L$  сплайн. Сплайн построен таким образом, чтобы он был точным на многочленах второй степени и на погранслошной составляющей, задающей основной рост интерполируемой функции в экспоненциальном пограничном слое. Доказано, что такой сплайн существует и единственный, получены двусторонние оценки погрешности на классе функций с погранслошной составляющей, соответствующей экспоненциальному пограничному слою. Установлено, что кубический и параболический интерполяционные сплайны являются предельными для построенного экспоненциального сплайна. Результаты численных экспериментов согласуются с полученными оценками погрешности.

## Список литературы

- [1] Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.
- [2] Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
- [3] Блатов И. А., Китаева Е. В. Сходимость метода адаптации сеток Н.С. Бахвалова для сингулярно возмущенных краевых задач // Сибирский ж. вычисл. матем. 2016. Т. 19, № 1. С. 43–55.
- [4] Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.
- [5] Блатов И. А., Задорин А. И., Китаева Е. В. Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 57, № 1. С. 7–26.
- [6] Zadorin A.I., Guryanova M. V. Analogue of a Cubic Spline for a Function with a Boundary Layer Component // Proc. Fifth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, 2010. Rousse: Rousse University, 2011. P. 166–173.

- [7] Волков Ю. С. Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Украинский математический журнал. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
- [8] Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967.
- [9] Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. О равномерных константах Лебега локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 261–272.
- [10] Квасов Б. И. О построении интерполяционных гиперболических сплайнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 4. С. 570–579.
- [11] Pruess S. Properties of splines in tension // J. Approximation Theory. 1976. V. 17. P. 86–96.
- [12] Mc. Cartin B. J. Theory of exponential splines // J. Approximation Theory. 1991. V. 66. P. 1–23.
- [13] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [14] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
- [15] Бор К.Де. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.

*Игорь Анатольевич Блатов — д.ф.-м.н., зав. кафедрой Поволжского государственного университета  
телекоммуникаций и информатики  
e-mail: blatow@mail.ru;*

*Александр Иванович Задорин — д.ф.-м.н., зав. лабораторией Института математики им. С.Л. Соболева СО  
РАН, Омский филиал;  
e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru;*

*Елена Викторовна Китаева — к.ф.-м.н., доцент Самарского национального исследовательского университета  
имени академика С.П. Королёва;  
e-mail: el\_kitaeva@mail.ru.*

*Дата поступления — 4 мая 2017 г.*