

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

М. А. Якунин

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.676

В работе с помощью метода статистического моделирования исследуется влияние винеровских и пуассоновских случайных шумов на поведение линейного осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля. Для линейного осциллятора получено аналитическое выражение автоковариационной функции решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ), позволяющее совместно с формулами для математического ожидания и дисперсии решения исследовать оценки моментов численного решения СДУ на основе обобщенного явного метода Эйлера. Для осциллятора Ван-дер-Поля численно исследовано влияние пуассоновской составляющей на характер колебаний первого и второго моментов решения СДУ при большой величине скачков. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, винеровская и пуассоновская составляющие, обобщенный метод Эйлера, стохастические осцилляторы.

Введение

Исследование влияния случайных шумов на поведение осциллирующих решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) ранее проводилось в работах [1–6]. Для нелинейной системы СДУ, в отличие от линейной, невозможно получить конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на математическое ожидание ее решения, которая в линейном случае легко получается из сопутствующей системы ОДУ, т.е. системы СДУ с нулевыми интенсивностями шумов. Параметрический анализ решений нелинейных систем СДУ можно провести только методом статистического моделирования. В [1] приводится большое количество примеров математических моделей физических процессов в виде систем СДУ, описывающих линейные и нелинейные стохастические колебания, проведен численный анализ решений этих систем. В [2, 3] исследованы первые два момента гармонического осциллятора с аддитивным и мультипликативным шумами. Рассмотрены варианты случайного затухания и случайной частоты и влияние на моменты внешнего периодического воздействия. В [4, 5] для стохастических осцилляторов с полиномиальной нелинейностью, в том числе осцилляторов Ван-дер-Поля и Дуффинга, при наличии внешнего и мультипликативного пуассоновских шумов построены аппроксимации плотностей вероятности распределений их решений.

Настоящая работа является продолжением работы [6] по исследованию влияния винеровских и пуассоновских случайных шумов на поведение линейного осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля и оценок функционалов от численных решений соответствующих им СДУ, полученных обобщенным явным методом Эйлера. При численном решении СДУ используется адаптированная к скачкам временная сетка, представляющая собой суперпозицию заданной равномерной временной сетки и множества моментов скачков моделируемой траектории решения [7]. Используемая численная схема решения СДУ, не имеющая ошибки дискретизации пуассоновской составляющей, удобна при очень малом размере шага интегрирования метода Эйлера, что необходимо, например, при решении уравнения Ван-дер-Поля, при этом среднее число скачков на интервале интегрирования существенно меньше числа шагов интегрирования. В этом случае пуассоновская составляющая не так существенно увеличивает среднее время моделирования одной траектории решения СДУ, как винеровская, поскольку не требует моделирования случайной величины на каждом шаге. Для осциллятора

Ван-дер-Поля численно исследовано влияние пуассоновской составляющей на характер колебаний первого и второго моментов решения СДУ, приводящее при большой величине скачков к появлению эффекта “биений”, накладывающихся на основные колебания оценок моментных функций.

1 Линейный осциллятор

Рассмотрим случай “шумящей” частоты колебаний в линейном колебательном контуре, который задается СДУ в смысле Ито второго порядка вида

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + a \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = \left(\sigma \frac{dw(t)}{dt} + P(t) \right) z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где a, ω, σ — вещественные параметры, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, $P(t)$ — пуассоновский белый шум вида

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N_T} \xi_k \delta(t - \tau_k),$$

N_T — случайное число скачков на интервале $(0, T]$ (процесс Пуассона), ξ_k — независимые одинаково распределенные случайные величины скачков в моменты времени τ_k , $\delta(t)$ — дельта-функция. При $N_T = 0$ формально будем полагать $P(t) \equiv 0$. Вводя новые переменные $y_1 = z$, $y_2 = dz/dt$, СДУ (1) можно переписать в виде линейной системы

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \quad y_1(0) = y_{10}, \\ dy_2 &= -(\omega^2 y_1 + a y_2) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x \nu(dx, dt), \quad y_2(0) = y_{20}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ν — независимая с $w(t)$ однородная пуассоновская мера в пространстве $\mathbf{R} \times [0, T]$ с характеристической мерой, заданной функцией

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right). \quad (3)$$

Здесь λ — интенсивность скачков, m_ξ и σ_ξ^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины скачка ξ . При $\sigma_\xi = 0$ имеем пуассоновский процесс со скачками постоянной величины и формально в этом случае будем задавать $\varphi(x) = \lambda \delta(x - m_\xi)$. Заметим, что СДУ в смысле Ито (2) не отличается от соответствующего ему СДУ в смысле Стратоновича, что несложно установить из связи интегралов Ито и Стратоновича [8].

Из системы СДУ (2) несложно получить ОДУ на математическое ожидание $m_1(t) = \mathbf{E}y_1(t)$ первой компоненты решения СДУ, являющееся уравнением свободных колебаний

$$\frac{d^2 m_1(t)}{dt^2} + a \frac{dm_1(t)}{dt} + (\omega^2 - \lambda m_\xi) m_1(t) = 0, \quad m_1(0) = y_{10}. \quad (4)$$

При

$$\beta^2 = 4(\omega^2 - \lambda m_\xi) - a^2 > 0 \quad (5)$$

решение данного ОДУ имеет вид

$$m_1(t) = e^{-at/2} \left(y_{10} \cos \frac{\beta t}{2} + (2y_{20} + ay_{10}) \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta t}{2} \right). \quad (6)$$

Для нахождения вторых моментов $s_{ij}(t) = \mathbf{E}y_i(t)y_j(t)$, $i, j = 1, 2$, вначале с помощью формулы Ито [8] перейдем от системы (2) к трехмерной системе СДУ для случайных процессов $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j(t)$. Затем, применяя к полученной системе СДУ операцию взятия математического ожидания, получаем трехмерную линейную систему ОДУ

$$\begin{aligned} ds_{11}/dt &= 2s_{12}, \quad s_{11}(0) = y_{10}^2, \\ ds_{12}/dt &= (\lambda m_\xi - \omega^2) s_{11} - a s_{12} + s_{22}, \quad s_{12}(0) = y_{10} y_{20}, \\ ds_{22}/dt &= (\lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2) + \sigma^2) s_{11} + 2(\lambda m_\xi - \omega^2) s_{12} - 2a s_{22}, \quad s_{22}(0) = y_{20}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Численное решение этой системы можно получить, например, методом Эйлера. Точное решение линейных систем ОДУ, как известно, выражается через матричную экспоненту. Колебательный режим решения системы (7) обеспечивается в случае, если

$$\tilde{\beta}^2 = q^2 + (4(\omega^2 - \lambda m_\xi) - a^2)^3 / 27 > 0,$$

где $q = \lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2) + \sigma^2$. В этом случае матрица коэффициентов, входящая в правую часть системы (7), имеет одно вещественное и два комплексно-сопряженных собственных значения. Точная формула для второго момента $s_{11}(t)$ в случае колебательного режима решения приведена в [6], дисперсия первой компоненты решения СДУ (2) $D_1(t) = s_{11}(t) - m_1^2(t)$. Зная $s_{11}(t)$, из первого уравнения системы ОДУ (7) можно получить формулу для второго смешанного момента $s_{12}(t) = 0.5ds_{11}(t)/dt$.

Обозначим ковариационные функции компонент решения системы СДУ (2) через $c_{ij}(t, t+\tau) = \mathbf{E}y_i(t)y_j(t+\tau)$, $i, j = 1, 2$.

Утверждение. Пусть значения параметров СДУ (2) удовлетворяют условию (5). Тогда автоковариационная функция $c_{11}(t, t+\tau)$ определяется по формуле

$$c_{11}(t, t+\tau) = e^{-a|\tau|/2} \left(s_{11}(t_m) \cos \frac{\beta\tau}{2} + (2s_{12}(t_m) + as_{11}(t_m)) \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta|\tau|}{2} \right), \quad (8)$$

где $t_m = \min(t, t+\tau)$, $\tau \geq -t$, β определяется согласно (5).

Систему СДУ (2) можно представить в виде

$$dy_1 = y_2 d\theta, \quad dy_2 = -(\omega^2 y_1 + ay_2) d\theta + \sigma y_1 dw(\theta) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, d\theta), \quad (9)$$

где $\theta \geq t$, с начальными значениями $y_1(t)$, $y_2(t)$ при $\theta = t$. Производя домножение каждого уравнения системы (9) на $y_1(t)$ и применяя к полученной системе СДУ операцию взятия математического ожидания, получаем систему ОДУ на ковариационные функции $c_{11}(t, \theta)$, $c_{12}(t, \theta)$ с начальными значениями $c_{11}(t, t) = s_{11}(t)$, $c_{12}(t, t) = s_{12}(t)$, которая является формой записи уравнения свободных колебаний вида (4). Первая компонента ее решения имеет вид (8) при $\tau = \theta - t \geq 0$, $t_m = t$. При $-t \leq \tau \leq 0$ имеем $c_{11}(t, t+\tau) = c_{11}(t+\tau, t+\tau+|\tau|)$ и в формуле (8) $t_m = t+\tau$. Аналогичным путем можно получить автоковариационную функцию c_{22} и взаимные ковариационные функции c_{12} , c_{21} . При $t = 0$ из (8) имеем $c_{11}(0, \tau) = y_{10}m_1(\tau)$, где $m_1(\tau)$ определяется согласно (6).

2 Осциллятор Ван-дер-Поля

Стохастическое нелинейное уравнение Ван-дер-Поля, записанное аналогично (1) в виде системы СДУ в смысле Ито

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, \quad y_1(0) = y_{10}, \\ dy_2 &= (\mu y_2(1 - by_1^2) - \omega^2 y_1) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, dt), \quad y_2(0) = y_{20}, \end{aligned} \quad (10)$$

описывает колебания нелинейного контура под воздействием винеровского и пуассоновского случайных шумов. В (10) параметры μ, b, ω определяют скорость переходных участков в решении, пуассоновская мера ν задается согласно (3). Для вычисления математического ожидания решения системы СДУ (10) замкнутой системы ОДУ не существует.

Пуассоновская составляющая, входящая во второе уравнение системы (10), имеет инфинитезимальные моменты

$$\mathbf{E} \left(\int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, dt) \right)^k = \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}} x^k \nu(dx, dt) = \lambda dt \mathbf{E} \xi^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где ξ — постоянная или случайная величина скачков. Второе уравнение системы (10) удобно представить с использованием центрированной меры $\tilde{\nu}(dx, dt) = \nu(dx, dt) - \varphi(x)dxdt$ в виде

$$dy_2 = (\mu y_2(1 - by_1^2) - \tilde{\omega}^2 y_1) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x\tilde{\nu}(dx, dt),$$

где $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \lambda m_\xi$. При этом $\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}} x \tilde{\nu}(dx, dt) = 0$, а k -й момент интеграла $\int_{\mathbf{R}} x \tilde{\nu}(dx, dt)$ при $k \geq 2$ будет совпадать с (11). Численные исследования решения системы СДУ (10) без винеровской составляющей показали [6], что разные значения параметров СДУ могут задавать близкие по характеру колебаний математические ожидания решения СДУ, если для второго момента (11) (при $k = 2$) выполняется условие $\lambda \mathbf{E} \xi^2 = \text{const}$, т.е. в случае нормальной случайной величины скачков $\lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2) = \text{const}$, при одновременном выполнении условия $\tilde{\omega} = \text{const}$.

3 Численные эксперименты

Общая численная схема решения СДУ (2) или (10) на основе обобщенного явного метода Эйлера приведена в [6]. В ней используется адаптированная к скачкам временная сетка, представляющая собой суперпозицию заданной равномерной временной сетки $\{t_n\}$, $n = 0, \dots, N_h$, $t_0 = 0$, $t_{N_h} = T$ с постоянным шагом h и множества моментов скачков моделируемой траектории решения. Оценки математического ожидания $\hat{m}_1(t)$, второго момента $\hat{s}_{11}(t)$ и автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t + \tau)$ первой компоненты случайного процесса $\{y_1(t), y_2(t)\}$ на основе ансамбля из N_{tr} траекторий численного решения системы СДУ (2) или (10) определяются стандартным способом. Ниже будут исследоваться указанные СДУ только с пуассоновской составляющей, т.е. при $\sigma = 0$.

Для линейного осциллятора (2) задавались $y_{10} = 1$, $y_{20} = 0$, интервал интегрирования $T = 10$, $N_h = T/h = 10^6$, значения параметров СДУ $m_\xi = 1$, $\sigma_\xi = 0.35$, $\omega = 2\pi$, $\lambda = 1.44\pi^2$. При $a = 0$ период гармонических колебаний математического ожидания (6) равен 1.25 вместо 1 при отсутствии пуассоновской составляющей. На рис. 1 приведены два примера графиков оценок автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t + \tau)$ при $N_{tr} = 10^5$, $t = 5$, $a = 0$ (сплошная линия) и $a = 0.6$ в случае затухающих колебаний (штриховая линия). Графики оценок визуально совпадают с соответствующими графиками, построенными по точной формуле (8).

В приведенных ниже примерах исследования осциллятора Ван-дер-Поля (10) задавались значения $y_{10} = 3$, $y_{20} = 0$, $T = 200$.

Пример 1. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ (10) от размера шага интегрирования численной схемы. Значения параметров СДУ: $\mu = 20$, $b = 0.3$, $\omega = \sqrt{2}$, $\lambda = 0.8$, $m_\xi = 1.25$, $\sigma_\xi = 0$, число моделируемых траекторий решения $N_{tr} = 10^5$. Как видно из рис. 2, увеличение размера шага интегрирования (т.е. уменьшение числа шагов на интервале интегрирования N_h) ведет к завышению периода колебаний математического ожидания решения и с ростом t к все большему смещению графика его оценки вправо по оси времени. При малых размерах шага таких, что $N_h \geq 2 \cdot 10^6$, графики будут визуально совпадать между собой. Как показали вычисления, сказанное справедливо и в случае, когда для пуассоновской составляющей задается $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$ или когда $m_\xi < 0$. Заметим также, что увеличение значения параметра нелинейности μ в уравнении Ван-дер-Поля требует при численном решении СДУ соответствующего уменьшения размера шага интегрирования численной схемы.

Пример 2. Наличие в СДУ (10) пуассоновской составляющей с ненулевым значением m_ξ приводит к искажениям моментов решения СДУ по сравнению со случаем $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$, которые при $m_\xi > 0$ имеют характер затухающих высокочастотных осцилляций (“биений”) на фоне основных колебаний момента. Они становятся заметными на графиках оценки математического ожидания при достаточно больших значениях m_ξ . На рис. 3 приведены графики оценок математического ожидания решения СДУ при $N_{tr} = 10^5$, $N_h = 2 \cdot 10^7$, $\mu = 10$, $b = 0.3$, $\lambda = 0.1$. Для одного варианта оценок задавалось $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$, $\omega = \sqrt{1.2}$, для второго $m_\xi = -2$, $\sigma_\xi = 0$, $\omega = \sqrt{0.8}$, для третьего $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$, $\omega = 1$. Значения параметров СДУ для всех этих вариантов заданы таким образом, чтобы обеспечивать, как указывалось выше, неизменность величин $\lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2)$ и $\tilde{\omega}$, равных в данном примере соответственно 0.4 и 1. Как видно из рис. 3, “биения” возникают при $m_\xi = 2$, а при $m_\xi = 0$ они отсутствуют. При $m_\xi = -2$ искажения колебаний также имеют место по сравнению с вариантом $m_\xi = 0$. В целом характер таких искажений или “биений” зависит от значений параметров СДУ μ , λ , m_ξ , σ_ξ . Например, при $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi \neq 0$ “биения” математического ожидания быстро сглаживаются с ростом t уже при небольших значениях $\sigma_\xi \approx 0.3$. На рис. 4 приведены графики оценок второго момента решения СДУ для двух вариантов $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$ и $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$. Колебания оценки второго момента при $m_\xi = 2$ включают медленно затухающую высокочастотную составляющую.

Замечание 1. Вычисления оценки второго момента решения СДУ (10) при указанных в приведенном выше примере 1 значениях параметров показали наличие в ее колебаниях “биений”, хотя для оценки математического ожидания на рис. 2 они незаметны.

Замечание 2. Вычисления оценок первого и второго моментов решения СДУ (10) по упрощенной по

сравнению с используемой в настоящей работе численной схеме решения СДУ на равномерной временной сетке, когда появление скачка на каждом шаге моделируется с вероятностью λh , при $N_{tr} = 10^5$, $N_h = 2 \cdot 10^6$ и приведенных в примере 2 значениях параметров СДУ показали визуальное совпадение графиков этих оценок с соответствующими графиками, приведенными на рис. 3, 4.

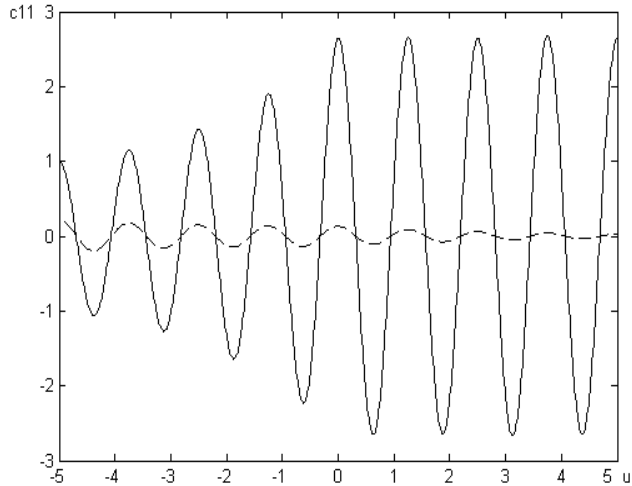


Рис. 1: Оценки автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t+\tau)$ решения СДУ (2) при $t = 5$, $a = 0$ (сплошная линия) и $a = 0.6$ (штриховая линия). На рисунке обозначено $u = \tau$

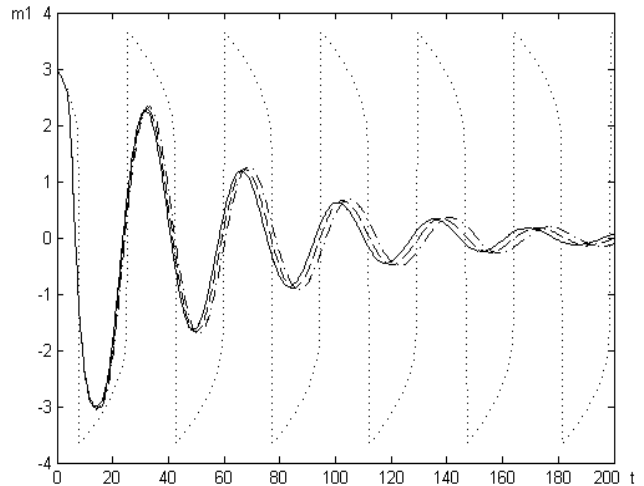


Рис. 2: Оценки математического ожидания решения СДУ (10) при $N_h = 2 \cdot 10^6$ (сплошная линия), $N_h = 2 \cdot 10^5$ (штриховая линия) и $N_h = 10^5$ (штрих-пунктирная линия). Точечная линия – решение соответствующей системы ОДУ при $\tilde{\omega} = 1$.

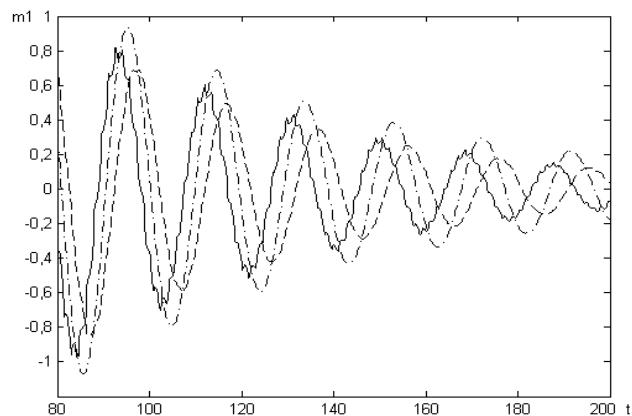


Рис. 3: Оценки математического ожидания решения СДУ (10) при $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$ (сплошная линия), $m_\xi = -2$, $\sigma_\xi = 0$ (штриховая линия) и $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$ (штрих-пунктирная линия)

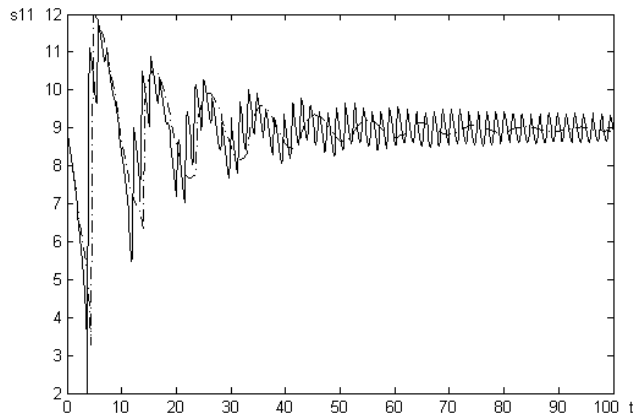


Рис. 4: Оценки второго момента решения СДУ (10) при $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$ (сплошная линия) и $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$ (штрих-пунктирная линия)

Заключение

Для линейного осциллятора получено аналитическое выражение автоковариационной функции решения СДУ, позволяющее совместно с формулами для математического ожидания и дисперсии проводить параметрический анализ и исследовать точность оценок моментов численного решения СДУ. Проведенные

численные исследования влияния пуассоновской составляющей на осциллятор Ван-дер-Поля показали, что большие значения $|m_\xi|$ приводят к искажениям колебаний оценок моментных функций по сравнению с вариантом нормальной случайной величины скачков при $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$. При $m_\xi > 0$ колебания оценок включают в себя высокочастотную составляющую в виде “биений”, амплитуда которых растет с ростом m_ξ , а при $m_\xi = 0$ и больших значениях σ_ξ они отсутствуют.

Список литературы

- [1] Артемьев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Якунин М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2016.
- [2] Gitterman M. Classical harmonic oscillator with multiplicative noise // Physica A. 2005. Vol. 352. P. 309–334.
- [3] Gitterman M. New stochastic equation for a harmonic oscillator: Brownian motion with adhesion // Journal of Physics: Conference Series. 2010. Vol. 248.
- [4] Guo S.S., Er G.K. The probabilistic solution of stochastic oscillators with even nonlinearity under poisson excitation // Central European Journal of Physics. 2012. Vol. 10, N 3. P. 702–707.
- [5] Er G.K., Zhu H.T., Iu V.P., Kou K.P. PDF solution of nonlinear oscillators subject to multiplicative Poisson pulse excitation on displacement // Nonlinear Dynamics. 2009. Vol. 55, iss. 4. P. 337–348.
- [6] Артемьев С.С., Якунин М.А. Параметрический анализ осциллирующих решений СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими методом Монте-Карло // Сиб. журн. индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 3–14.
- [7] Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [8] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.

*Михаил Александрович Якунин — к.ф.-м.н., ст.науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: yta@osmf.sscs.ru.*

Дата поступления — 25 мая 2017 г.