

О ХАРАКТЕРЕ НАРАСТАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ РАЗНЫХ ТИПОВ СТАРТОВЫХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

В. А. Бабешко^{1,2}, А. Г. Федоренко², Е. М. Горшкова¹, О. В. Евдокимова²,
А. С. Мухин¹, С. Б. Уафа¹, И. С. Телятников², И. Б. Гладской¹

¹Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар

²Южный научный центр РАН, 630090, Ростов-на-Дону

УДК 539.3

Ранее на примере двух полубесконечных литосферных плит, моделируемых пластинами Кирхгофа, с прямолинейными границами, способных сближаться, установлена возможность возникновения землетрясения в зоне сближения литосферных плит, которое было названо «стартовым». Рассматривался лишь случай статических вертикальных воздействий на основание тяжестей литосферных плит. Для исследования применялся метод упакованных блочных элементов в сочетании с факторизационными и топологическими методами. В настоящей статье рассматриваются статические граничные задачи, в которых изучаются результаты горизонтальных воздействий на литосферные плиты. Выявлены характеристики возникающих концентраций напряжений в зоне сближения литосферных плит. Доказано, что для касательных напряжений в области контакта при сближении литосферных плит имеет место нарастание контактных напряжений по мере сближения торцов плит.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, псевдодифференциальные уравнения, трещина, пластина, разломы.

1 Постановка задачи

Изучается случай статической задачи для полубесконечных литосферных плит с прямолинейными границами, параллельными друг другу, находящихся на деформируемом основании в двух состояниях. В первом случае дистанция между торцами плит отлична от нуля, равна $2\theta > 0$, во втором случае — она отсутствует, $\theta = 0$, хотя плиты не взаимодействуют. Предполагается, что горизонтальные воздействия на плиты, которые, как известно, крайне медленно движутся, настолько велики, что вертикальными составляющими контактных напряжений можно пренебречь. В реальности, считаем, что кора Земли в этой области состоит из гранитных плит, моделируемых пластинами, находящихся на деформируемом базальтовом основании, на границе Конрада. В статическом варианте можно считать, что плиты, «слиплись» с основанием, что при горизонтальных воздействиях вызывает появление вектора касательных контактных напряжений. В основе исследования лежит ранее развитая теория скрытых дефектов в деформируемых материалах.

2 Исследование проблемы

Статическая граничная задача для векторного варианта горизонтальных воздействий на плиты, моделируемые пластинами Кирхгофа, лежащими на деформируемом основании, ранее рассматривалась в [1]. Примем оси координат x_1, x_2 расположенными в плоскости пластин, а ось x_3 имеющей направление по внешней нормали к основанию. Уравнения граничных задач для пластин имеют форму

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_b - \varepsilon_{5b} \mathbf{g}_b = \varepsilon_{5b} \mathbf{t}_b, \quad (1)$$

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. (код проекта 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П (коды проектов с 0256-2015-0088 по 0256-2015-0093), Минобрнауки (код проекта 9.8753.2017/БЧ) и при поддержке грантов РФФИ (коды проектов 14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_b = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ \left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1b} \\ u_{2b} \end{pmatrix} \right\|.$$

Рассматривается каждая пластина как многообразие с краем, причем $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по касательной и нормали к торцам пластин лежит в их срединных плоскостях.

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений имеет вид

$$-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{U}_b = \left\| \begin{pmatrix} (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2) U_{1b} & \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \\ \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b} & (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2) U_{2b} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_2 \mathbf{g}, \quad b = 1, 2, \dots, B,$$

$$\varepsilon_{1b} = 0.5(1 - \nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0.5(1 + \nu_b), \quad \varepsilon_{5b} = \frac{1 - \nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b} \left(\frac{du_{1b}}{dx_3} + \frac{du_{3b}}{dx_1} \right), \quad g_{2b} = \mu_{0b} \left(\frac{du_{2b}}{dx_3} + \frac{du_{3b}}{dx_2} \right), \quad \mu_{0b} = \frac{\mu_b}{H}, \quad x_3 = 0.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига, ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщины пластин, H — толщина основания, $\mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}\}$, $\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}\}$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания, как и перемещения, в областях Ω_b , где $b = \lambda$ для левой плиты и $b = r$ — для правой. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Описанные в [1] граничные условия здесь сохраняются. Выражения для нормальной N_{x_2} и касательной $T_{x_1 x_2}$ составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1 x_2} = \varepsilon_7 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad N_{x_2} = \varepsilon_8 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1 + \nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1 - \nu^2)H}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей (1), применимы различные модели, даваемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i \langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta, \quad \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty; x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r(|x_1| \leq \infty; \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta(|x_1| \leq \infty; -\theta \leq x_2 \leq \theta), \quad (2)$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2, \quad \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{g},$$

\mathbf{g} — вектор касательных напряжений под пластинами.

Свойства матриц-функций $K_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ в статическом случае описаны в [2, 3].

Рассматривая плиты и основание как блочную структуру, состоящую из трех деформируемых блоков, применим для ее исследования метод блочного элемента. Этот метод, как описано в [4], предполагает, как первый шаг, погружение граничной задачи в топологическую структуру, и лишь на этом этапе использует внешнюю алгебру [5] в варианте, изложенном в [6–8]. В результате строится функциональное уравнение граничной задачи для блочной структуры. Многошаговый алгоритм дальнейших исследований функционального уравнения, уже не имеющих никакого отношения к аппарату внешней алгебры, чтобы не повторять всякий раз операции алгоритма, назван авторами «внешним анализом» [9]. Основанием такого названия является

то, что аналитические преобразования алгоритма осуществляются над математическими объектами, которые включают в себя также и внешние формы. Поэтому название «внешний анализ» несет в себе понятные специалисту вполне определенные действия над функциональными уравнением, включающие дифференциальную факторизацию матриц-функций с элементами из нескольких комплексных переменных, реализации автоморфизма, состоящее в вычислении форм-вычетов Лере, либо неполных функциональных уравнений Винера–Хопфа, построение псевдодифференциальных уравнений, извлечение из них интегральных уравнений, диктуемых конкретными граничными условиями граничной задачи, решением интегральных уравнений и получение интегрального представления граничной задачи в каждом блоке в форме «упакованного» блочного элемента [4]. Наконец, «склейка» решений каждого блока, состоящая в построении фактор — топологии некоторых топологических пространств, являющихся декартовыми произведениями топологических пространств носителей и решений [4]. Применяя описанный подход, функциональное уравнение граничной задачи для этого случая, представленное для каждой пластины, превращается в матричное и имеет вид [1]

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\mathbf{U}_b &= \int_{\partial\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b}, \alpha_{2b})(\mathbf{g}_b + \mathbf{t}_b), \\ \mathbf{U}_b &= \{U_{1b}, U_{2b}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм, имеющий представление

$$\boldsymbol{\omega}_b = \{\omega_{1b}, \omega_{2b}\},$$

$$\begin{aligned} \omega_{1b} &= e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ -\left(\varepsilon_{1b} \frac{\partial u_{1b}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2b} \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{2b}u_{1b} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} - i\alpha_{1b}u_{1b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{2b} \right) dx_2 \right\}, \\ \omega_{2b} &= e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ -\left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_2} - i\alpha_{2b}u_{2b} \right) dx_1 + \left(\varepsilon_{1b} \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{1b}u_{2b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{1b} \right) dx_2 \right\}. \end{aligned}$$

$b = \lambda$ — для левой пластины и $b = r$ — для правой.

Для построения псевдодифференциальных уравнений осуществляется дифференциальная факторизация матрицы-функции $-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ функционального уравнения. Ради краткости индексы локальных систем координат опущены. Применением алгоритма внешнего анализа, строится факторизующая матрица-функция $\mathbf{D}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})$. Принимая во внимание, что определитель матрицы-функции $-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ имеет двукратные корни $\alpha_{2b\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_{1b}^2} \equiv \pm i|\alpha_{1b}|$, получаем факторизующую матрицу-функцию для левой пластины

$$\mathbf{D}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_{2-})^2} & \frac{\alpha_{2-}}{(\alpha_2 - \alpha_{2-})^2 \alpha_1} - \frac{(1 + \varepsilon_{1\lambda})}{(\alpha_2 - \alpha_{2-}) \varepsilon_{2\lambda} \alpha_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Для правой пластины она аналогична.

Дальнейшее применение внешнего анализа, описанного выше, с учетом схемы, реализованной в [4], приводит к следующим соотношениям при $\theta > 0$:

$$\mathbf{P}_\lambda \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_\theta \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_r \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \varepsilon_6^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)], \quad (4)$$

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\lambda \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_r \mathbf{g}(x_1, x_2),$$

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{F}_2^{-1} [\mathbf{R}_p(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_p} \omega_p + \varepsilon_{5p} \mathbf{F}_2(\mathbf{g}_p + \mathbf{t}_\lambda) \right\rangle, \quad p = \lambda, r.$$

Здесь \mathbf{P}_λ , \mathbf{P}_r , \mathbf{P}_θ — проекторы на левую, правую полуплоскости и на область Ω_θ . Применив оператор \mathbf{F}_2^{-1} , получим соотношения вида

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda} (\mathbf{G}_\lambda + \mathbf{T}_\lambda) \right\rangle + [\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r} (\mathbf{G}_r + \mathbf{T}_r) \right\rangle - \\ - \varepsilon_6^{-1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)] = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{F}_2 \mathbf{t}_\lambda(x_1, x_2), \quad \mathbf{T}_r = \mathbf{F}_2 \mathbf{t}_r(x_1, x_2).$$

Вектор-функции $\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)$, являющиеся преобразованиями Фурье функций, с носителями в полуплоскостях, являются регулярными функциями параметров α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить вектор-функции, регулярные по параметру α_2 в нижней, знак минус, и в верхней, знак плюс, полуплоскостях, положив

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

3 Результаты исследования

Внося последние формулы в предыдущее соотношение, приходим при $\theta > 0$ к матричному функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V} + \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{U}_\theta, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K}_2 = \varepsilon_{5r}\mathbf{R}_r^{-1} - \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_1 = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K} - \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{R}_\lambda^{-1},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_1^{-1} \left(\mathbf{R}_\lambda^{-1} \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1} \int_{\partial\Omega_r} \omega_r - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1} \mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{T}_r \right), \quad \mathbf{U}_\theta = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\theta u(x_1, x_2).$$

При $\theta \rightarrow 0$ последнее функциональное уравнение непрерывно переходит в следующее

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V}.$$

Эти два функциональных уравнения имеют совершенно разные качественные решения. Первое, являющееся обобщенным функциональным уравнением Винера–Хопфа, при решении сводится к векторной системе интегральных уравнений вида [2]

$$\begin{aligned} X_2^+ + \{N_+(\alpha, \beta)D_-^{-1}(\alpha, \beta)e^{-2i\alpha\theta}X_1^-\}^+ &= \{N_-^{-1}(\alpha, \beta)F_2^+(\alpha, \beta)\}^+, \\ X_1^- + \{D_-(\alpha, \beta)N_+^{-1}(\alpha, \beta)e^{2i\alpha\theta}X_2^+\}^- &= \{D_+^{-1}(\alpha, \beta)F_1^-(\alpha, \beta)\}^-, \\ M(\alpha, \beta) &= D_+(\alpha, \beta)D_-(\alpha, \beta) = N_-(\alpha, \beta)N_+(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Контактные напряжения на краях пластин имеют представление

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(x_2 + \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ \mathbf{g}_r(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned}$$

Векторы $\sigma_{1\lambda}$, σ_{1r} непрерывны по обоим параметрам.

Второе уравнение приводит к решениям, имеющим следующие концентрации напряжений в зоне схождения трех блоков

$$\mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1}, \quad \mathbf{g}_r(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1},$$

Все векторы $\sigma_{n\lambda}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{nr}(x_1, x_2)$, $n = 1, \dots, 4$ непрерывны по обоим параметрам. Таким образом, и для касательных напряжений в области контакта при сближении литосферных плит имеет место нарастание контактных напряжений по мере сближения торцов плит.

Список литературы

- [1] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Гладской И.Б., Евдокимова О.В., Уафа Г.Н., Хафуз Т.А., Шестопалов В.Л. О локализации статического процесса в телах с дефектными покрытиями // МТТ. 2015. № 4. С. 90–97.
- [2] Ворович И.И., Бабешко В.А., Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [3] Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

- [4] Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The theory of the starting earthquake // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2016, no. 1, vol. 2. Pp. 37–80.
- [5] Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. Внешняя алгебра. М.: Изд-во Советская энциклопедия. Т. 1. 1977, 1151 с.
- [6] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
- [8] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1985. 464 с.
- [9] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Внешний анализ в проблеме скрытых дефектов и прогнозе землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, № 2. С. 19–28.

Бабешко Владимир Андреевич — академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заместитель председателя Южного научного центра РАН, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;

e-mail: babeshko41@mail.ru;

Федоренко Алексей Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН;

e-mail: afedorenko@mail.ru;

Горшкова Елена Михайловна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;

e-mail: gem@kubsu.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН;

e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Мухин Алексей Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;

e-mail: muhin@mail.kubsu.ru

Уафа Самир Баширович — инженер Кубанского государственного университета;

e-mail: uafa70@mail.ru

Телятников Илья Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики Южного научного центра РАН;

e-mail: ilux_t@list.ru

Гладской Игорь Борисович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;

e-mail: i.glad@list.ru

Дата поступления — 10 мая 2017 г.