

ПРИЛОЖЕНИЕ ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ

М. А. Блинова¹, Н. И. Попова², Э. А. Бибердорф^{1,3}

¹Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

²Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера СО РАН, 630090, Новосибирск

³Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.61

Традиционным приемом исследования течений на устойчивость является дискретизация соответствующих дифференциальных операторов и изучение расположения спектра полученных матриц. Такие матрицы обладают рядом специфических особенностей, например, большой размер, большая норма и, возможно, нелинейная зависимость от собственных значений исходного дифференциального оператора. В данной работе представлена модификация метода дихотомии матричного спектра, которая позволяет исследовать спектр матриц с большой нормой, а также новый метод дихотомии гиперболой. Сочетание этих подходов позволяет изучать устойчивость плоскопараллельного течения Пуазейля и пограничного слоя Блазиуса.

Ключевые слова: дихотомия матричного спектра, плоскопараллельное течение, пограничный слой.

Введение

Как правило при численном исследовании устойчивости течений сначала проводится дискретизация соответствующего дифференциального оператора. Затем возникающая алгебраическая задача решается одним из стандартных методов линейной алгебры с рассмотрением полной спектральной задачи (см., например, [1]–[3]). Метод дихотомии матричного спектра является перспективной и интересной альтернативой традиционным подходам. Идея метода заключается в определении расположения спектральных пятен (групп собственных значений) относительно определенных кривых в интересующей области и нахождении базисов соответствующих им инвариантных подпространств, при этом нет необходимости вычислять собственные значения по отдельности ([4]–[7]). Поэтому применение данного метода в задачах гидродинамической устойчивости позволит исследовать только интересные с точки зрения физики неустойчивые собственные значения без нахождения всего спектра.

Одним из наиболее эффективных инструментов визуализации расположения спектра матрицы A являются одномерные спектральные портреты. Они представляют собой графики функций $f(s) = \|H_{\gamma(s)}(A)\|$, где $\gamma(s)$ — заданное однопараметрическое семейство кривых, а $H_{\gamma(s)}(A)$ — критерий дихотомии спектра A относительно кривой $\gamma(s)$. Причем $\|H_{\gamma(s)}(A)\|$ обращается в бесконечность тогда и только тогда, когда точки спектра матрицы A находятся на кривой $\gamma(s)$. Заметим, что для визуального анализа более удобны графики $\log_{10} f(s)$, которые изображены в примерах ниже.

Большая норма является особенностью матриц, полученных дискретизацией дифференциальных операторов. Вычисление матричной экспоненты (первый этап алгоритма дихотомии мнимой осью) для таких матриц невозможно, так как вызывает переполнение. Если же матрицу предварительно нормировать, то наименьшие собственные значения, представляющие особый интерес, как бы "прижимаются" к границе между полуплоскостями, и результат метода дихотомии оказывается ложно-отрицательным. Что касается матриц, полученных при дискретизации дифференциального оператора, описывающего пограничный слой Блазиуса, то они нелинейно зависят от собственных значений исходных дифференциальных операторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00791_а).

В данной работе рассмотрены пути решения этих проблем. Во-первых, описана модификация алгоритма дихотомии мнимой осью, позволяющая осуществлять дихотомию спектра матриц с большой нормой. Во-вторых, описан метод дихотомии спектра линейного матричного пучка гиперболой. В-третьих, предложен способ, позволяющий свести задачу об устойчивости пограничного слоя Блазиуса к дихотомии относительно гиперболы спектра линейного матричного пучка. Приведены примеры.

1 Плоско-параллельное течение Пуазейля

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим плоско-параллельное течение вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1), причем без потери общности для удобства положим расстояние между пластинами $2h = 2$, т.е. $h = 1$. Для того, чтобы постро-

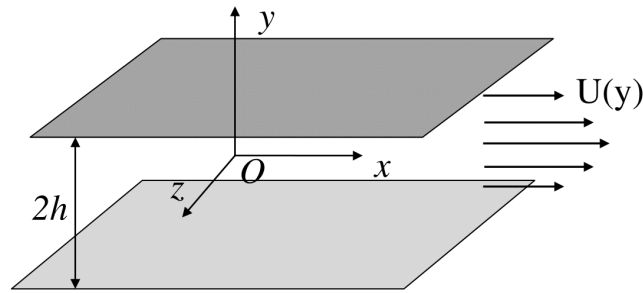


Рис. 1: Схема плоско-параллельного течения .

ить матричный пучок, чьи спектральные характеристики отражают устойчивость течения, будем следовать [1]-[3]. Скорость $\vec{U}(\vec{r})$ и давление $P(\vec{r})$ установившегося течения, а также результат их возмущения $\vec{U}_1(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}) + \vec{u}(\vec{r}, t)$ и $P_1(\vec{r}) = P(\vec{r}) + p(\vec{r}, t)$ удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса. Разность двух этих систем после отбрасывания квадратичных членов представляет собой линейную систему для возмущений установившегося течения. Она должна быть дополнена условиями на плоскостях ограничивающих течение, а именно условиями прилипания и непротекания. Для изучения условий роста возмущений рассматриваются частные решения вида

$$\{u, v, w, p\} = \{\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)\} e^{i[(\alpha x + \beta z) - \omega t]}, \quad (1)$$

где $\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), \hat{p}(y)$ — комплексные амплитуды возмущений потока, α и β — комплексные волновые числа, ω — комплексная круговая частота. Очевидно, что частное решение растет, если $\text{Im } \omega > 0$ или $\text{Im } \alpha < 0$ или $\text{Im } \beta < 0$. При подстановке решений (1) в описанную выше линейную систему уравнений получается, в частности, уравнение Орра — Зоммерфельда

$$\left\{ i(\alpha U - \omega) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \right\} \hat{v} = 0, \quad (2)$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $Re = UL/\nu$ — число Рейнольдса, U, L — характерные скорость и длина рассматриваемого течения, ν — кинематический коэффициент вязкости среды. Профиль установившегося течения как правило принимается квадратичным $U(y) = 1 - y^2$ (течение Пуазейля). Условия прилипания и непротекания влекут за собой краевые условия для \hat{v} :

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \quad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0.$$

1.2 Дискретизация задачи

Дискретизация дифференциальных операторов с учетом краевых условий приводит к дискретному уравнению Орра — Зоммерфельда

$$\{(D_N^2 - k^2 I_N)^2 - iRe[\text{diag}(\alpha U - \omega)(D_N^2 - k^2 I_N) - \text{diag}(\alpha U'')]\} \hat{v} = 0,$$

которое равносильно алгебраической задаче на собственные значения $(A_1 - \tilde{\omega}B_1)\hat{v} = 0$, где $\tilde{\omega} = \omega_i - i\omega_r$,

$$A_1 = \frac{1}{Re}(D_N^2 - k^2I)^2 - i\alpha \text{diag}U(D_N^2 - k^2I) - 2i\alpha I, \quad B_1 = (D_N^2 - k^2I) \quad (3)$$

или

$$(\tilde{A} - \tilde{\omega}I)\hat{v} = 0, \quad \text{где } \tilde{A} = B_1^{-1}A_1, \quad \tilde{\omega} = \omega_i - i\omega_r. \quad (4)$$

Чтобы определить, устойчиво течение Пуазейля или нет, необходимо узнать, есть ли в правой полуплоскости собственные значения матрицы \tilde{A} .

1.3 Дихотомия спектра матриц с большой нормой мнимой осью

Дихотомия спектра матрицы A мнимой осью сводится к дихотомии спектра единичной окружностью с помощью экспоненциального преобразования $B = e^{\tau A}$ (см. [4], [5], [7]), где нормировочный множитель τ выбирается так, чтобы гарантировать вычислимость матричной экспоненты, например, $\tau = (2\|A\|)^{-1}$.

Если норма матрицы A — велика, то вычисление матрицы e^A , может оказаться невозможным, так как значения элементов будут выходить за границы машинной арифметики. В то же время переход к нормированной матрице τA , $\tau \approx 1/2\|A\|$ приводит к тому, что ее спектр как бы прижимается к мнимой оси, соответственно спектр матричной экспоненты $e^{\tau A}$ становится практически неотделим от единичной окружности. В итоге может быть получено слишком большое значение критерия дихотомии даже в том случае, если спектр исходной матрицы находился на существенном расстоянии от мнимой оси. Таким образом, для матриц с большой нормой вычисление экспоненты невозможно, а вычисление критерия дихотомии для нормированной матрицы дает ложный результат.

Чтобы разрешить эту ситуацию, необходимо использовать модификацию метода дихотомии матричного спектра мнимой осью для матриц с большой нормой.

Дихотомия спектра матриц с большой нормой мнимой осью Задана матрица A , $\|A\| \gg 1$.

1. Выбрать k из условия $2^k \approx 2\|A\|$.
2. Присвоить $A_{-k} = e^{\tau A}$, где $\tau = 2^{-k}$, $B_{-k} = I$.
3. Применить k раз ортогональные исключения к матричному пучку $A_{-k} - \lambda B_{-k}$:

$$\begin{pmatrix} -B_j & A_j & 0 \\ A_j & 0 & -B_j \end{pmatrix} = Q_j \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{j+1} & -B_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Результат — матричный пучок $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$.

4. Применить дихотомии спектра единичной окружностью к пучку $\tilde{A}_0 - \lambda \tilde{B}_0$ ([4]–[7]).

1.4 Численный пример

Положим $Re = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$ и изобразим линейный одномерный спектральный портрет матрицы \tilde{A} (4) или, что то же самое, пучка (3), а именно график критерия дихотомии $\log_{10} \|H(\tilde{A} - \omega_i I)\|$. На рис. 2 видно, что часть собственных значений пучка (3) находится в правой полуплоскости, что означает, что течение Пуазейля неустойчиво. Так как в действительности в правой полуплоскости находится только одно собственное значение матрицы \tilde{A} , то метод дихотомии позволяет вычислить собственную функцию для этого значения (рис. 2, справа). Полученные результаты полностью соответствуют известному факту, что плоско-параллельное течение Пуазейля теряет устойчивость при $Re = 5772.22$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$.

2 Дихотомии матричного спектра относительно кривых второго порядка

В данном разделе на примере задачи об устойчивости пограничного слоя будет показано, что для решения подобных задачи возможности метода дихотомии матричного спектра должны быть распространены на кривые второго порядка. Затем мы опишем способ сведения задачи дихотомии относительно гиперболы к дихотомии относительно мнимой оси и продемонстрируем этот подход на модельном примере.

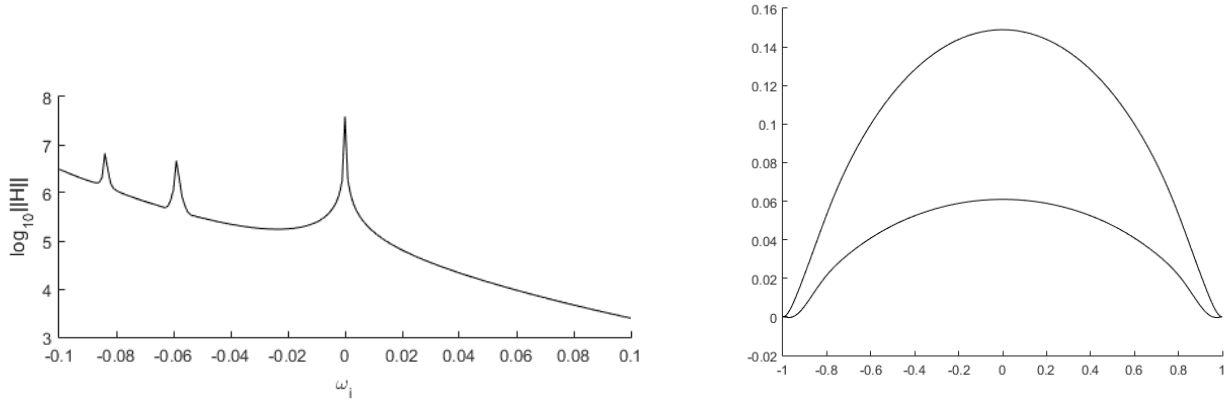


Рис. 2: Линейный спектральный портрет дискретизированного оператора Орра—Зоммерфельда при $Re = 5900$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$, $N = 50$ (слева); вещественная и мнимая части собственной функции, соответствующей неустойчивому собственному значению (справа)

2.1 Спектральная задача для уравнения Орра—Зоммерфельда в случае течения Блазиуса

Рассматривается задача устойчивости пограничного слоя на бесконечной пластине (течение Блазиуса). Так же как в предыдущем пункте, исследование устойчивости течения Блазиуса сводится к исследованию спектра оператора Орра—Зоммерфельда. На пластине ставятся однородные условия прилипания и непротекания:

$$\varphi|_{y=0} = \frac{d\varphi}{dy}|_{y=0} = 0. \quad (5)$$

Отличия от плоскопараллельного течения заключаются в профиле основного течения и граничном условии на бесконечности. В свободном потоке, вдали от стенки ставится условие ограниченности возмущений:

$$|\varphi|_{y \rightarrow \infty} < \infty,$$

которое равносильно равенству

$$\varphi|_{y \rightarrow \infty} = C_1 e^{-ky} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 + iRe(\alpha - \omega)y}}, \quad (6)$$

следующему из вида уравнения Орра—Зоммерфельда при $y \rightarrow \infty$.

Профиль основного течения $U = U(y) = \frac{df(y)}{dy}$ определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения для функции тока $f(y)$ (течение Блазиуса):

$$2 \frac{d^3 f}{dy^3} + f \frac{d^2 f}{dy^2} = 0,$$

$$f(0) = \frac{df}{dy}(0) = 0, \quad \frac{df}{dy}(y \rightarrow \infty) = 1.$$

Устойчивость исследуется в предположении вещественности волнового числа k^2 (α и β заданы). Задачей является определение комплексной частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$ (временная устойчивость).

2.2 Сведение к дихотомии спектра линейного матричного пучка относительно гиперболы

Дискретизация уравнения (2) и условий (5), (6) сводит задачу к исследованию расположения относительно мнимой оси параметра ω такого, что

$$(\tilde{A}(\omega) - \omega I)\varphi = 0, \quad (7)$$

причем зависимость $\tilde{A}(\omega)$ нелинейная.

Однако замена

$$\sigma = \sqrt{k^2 + iRe(\alpha - \omega)}.$$

превращает задачу (7) в спектральную задачу для квадратичного матричного пучка $P + \sigma R + \sigma^2 S$ относительно гипербола $\text{Im}\sigma\text{Re}\sigma = \text{Re}\alpha/2$. Увеличение размеров, позволяет свести задачу к вопросу о расположении собственных значений линейного матричного пучка относительно гипербола. Действительно, если σ — собственное значение пучка $P + \sigma R + \sigma^2 S$ и v — соответствующий ему собственный вектор, то σ также собственное значение пучка

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -P & -R \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

с собственным вектором $(v, \sigma v)^T$.

2.3 Метод дихотомии спектра линейного матричного пучка относительно гипербола

Нам дан линейный матричный пучок $(A - \sigma B)$, дихотомия которого проводится относительно гипербола γ , заданной формулой

$$\text{Re}\sigma\text{Im}\sigma = c. \quad (8)$$

Введем параметризацию γ : $\xi = i\text{Im}\sigma$, $\sigma = \frac{ic}{\xi} + \xi$. При такой замене гипербола γ переходит в мнимую ось, а матричный пучок приобретает вид:

$$A - \sigma B = A - \frac{ic}{\xi}B + \xi B.$$

Очевидно, что у пучка $A - \sigma B$ отсутствуют собственные значения на γ тогда и только тогда, когда у пучка $A - \frac{ic}{\xi}B + \xi B$ нет точек спектра на мнимой оси. Так как ξ при конечных значениях $\sigma \in \gamma$ не обращается в ноль, то, не теряя общности, вместо пучка $A - \frac{ic}{\xi}B + \xi B$ можно рассматривать квадратичный пучок

$$\xi(A - \frac{ic}{\xi}B + \xi B) = \xi^2 B + \xi A - icB$$

и исследовать дихотомию его спектра мнимой осью.

Уже использованный ранее прием удвоения размерности (см. предыдущий раздел) позволяет свести задачу к стандартному случаю дихотомии мнимой осью спектра линейного пучка

$$\tilde{A}(c) - \xi \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ icB & -A \end{bmatrix} - \xi \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Теперь к такой задаче мы можем применить метод дихотомии матричного спектра мнимой осью, то есть вычислить матричного интеграла

$$H(c) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{A}^*(c) + i\xi \tilde{B}^*)^{-1} C (\tilde{A}(c) - i\xi \tilde{B})^{-1} d\xi. \quad (10)$$

Если $\|H(c)\| < \infty$, то на мнимой оси отсутствуют собственные значения пучка (9), а значит у пучка $(A - \sigma B)$ нет собственных значений на гиперболе (8).

Алгоритм

Дано: матричный пучок $(A - \sigma B)$, гипербола с параметром c .

1. Формируем дополнительные линейные матрицы для A и B соответственно

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ icB & -A \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Результат — линейный матричный пучок $\tilde{A} - \xi \tilde{B}$.

2. Применение метод дихотомии матричного спектра мнимой осью для матриц с большой нормой к пучку $\tilde{A} - \xi \tilde{B}$.

2.4 Численный пример дихотомии гиперболой

Рассмотрим матричный пучок $A - \sigma B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

и семейство гипербола $\operatorname{Re} \sigma \operatorname{Im} \sigma = c$, $0 < c < 75$ и изобразим одномерный гиперболический спектральный портрет пучка $A - \sigma B$. Максимумы функции $f(c) = \log_{10} \|H(c)\|$, где $H(c)$ — критерий дихотомии (10), приходятся на $c_1 = 3$, $c_2 = 36$, $c_3 = 56$ (см. рис. 3 слева). Это означает, что на гиперболах $\operatorname{Re} \sigma \operatorname{Im} \sigma = c_i$, $i = 1, 2, 3$, есть собственные значения пучка (11), что проиллюстрировано на рис. 3 справа.

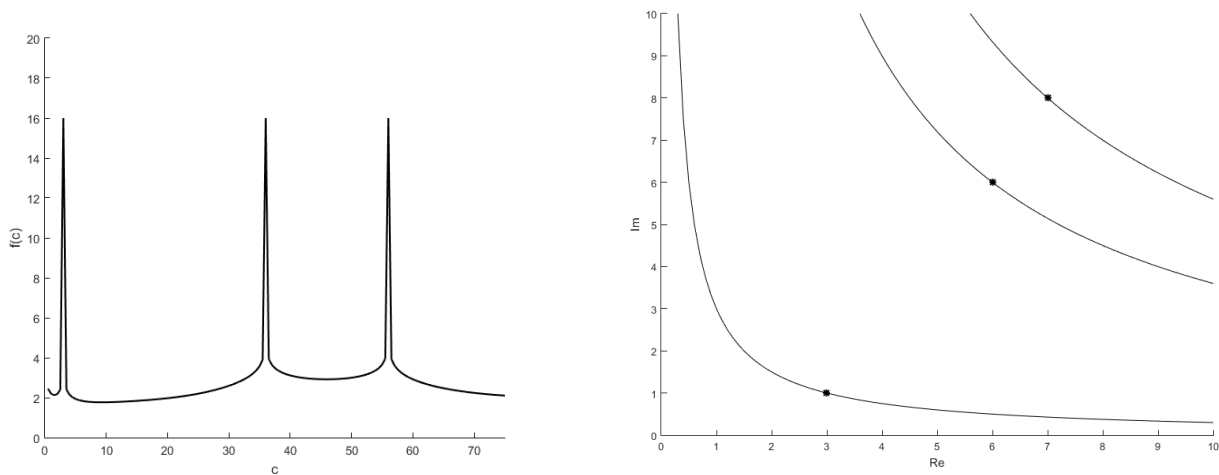


Рис. 3: Одномерный спектральный гиперболический портрет пучка (11) (слева); собственные значения $3 + i$, $6 + 6i$ и $7 + 8i$ пучка, и гиперболы $\operatorname{Re} \sigma \operatorname{Im} \sigma = c_i$, $c_1 = 3$, $c_2 = 36$, $c_3 = 56$ (справа).

Заключение

Как видно из представленных примеров, вычислительные методы дихотомии матричного спектра и построения одномерных спектральных портретов представляют эффективный инструмент для изучения несимметричных спектральных задач. Однако для использования в задачах об устойчивости течений, требуется их дополнительная модификация и развитие.

Список литературы

- [1] Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" Институт компьютерных исследований, 2006.
- [2] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [3] Алгазин С.Д., Соловьев Г.Х. О спектральной задаче для оператора Орра — Зоммерфельда // Изв. Тульского государственного университета, Естественные науки. 2015. Вып. 4. С. 5–13.
- [4] Годунов С.К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.

- [5] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука Сибирское отделение, 1991.
- [6] Бибердорф Э.А. Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сиб. журн. инд. мат. 2000. Т. 3, No. 1. С. 16–32.
- [7] Godunov S.K., Sadkane M. Some new algorithms for the spectral dichotomy methods // Linear Algebra Appl. 2003. Vol. 358. P. 173–194.

Марина Александровна Блинова — студентка Новосибирского государственного университета; e-mail: blin_mary@mail.ru;

Нэли Иннокентьевна Попова — науч. сотр. Института ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН; e-mail: N.I.Popova@inp.nsk.su

Элина Арнольдовна Бибердорф — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН; доцент Новосибирского государственного университета; e-mail: biberdorf@ngs.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.