

ЧИСЛЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

А. М. Медвяцкая¹, В. А. Огородников^{1,2},

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.245

В докладе рассматривается приближенный алгоритм моделирования периодически коррелированных случайных процессов на основе специальной модификации нерандомизированного спектрального представления стационарного случайного процесса непрерывного аргумента. Модификация этого представления состоит в том, что вместо спектральной плотности для стационарного процесса использовалось семейство спектральных плотностей, определяемое периодически меняющимся временным параметром. Показано, что случайный процесс построенный с помощью спектрального представления, в котором случайные амплитуды являются стационарным векторным случайным процессом с последующим суммированием по компонентам вектора является периодически коррелированным процессом. Численно показано, что учёт перекрёстных корреляций существенно увеличивает точность воспроизведения корреляционной структуры периодически коррелированного процесса. **Ключевые слова:** периодически коррелированный случайный процесс, векторный стационарный процесс, спектральное представление.

Введение

Работа посвящена вопросам, связанным с использованием различных типов моделей периодически коррелированных процессов для моделирования реальных временных рядов. Рассматривается два типа моделей периодически коррелированных процессов. Первая основана на представлении периодически коррелированного процесса дискретного аргумента в виде векторного стационарного процесса с заданной матричной корреляционной функцией [1], [5], вторая на одном специальном спектральном представлении периодически коррелированного процесса [4]. Каждая из этих моделей имеет ряд своих преимуществ и недостатков. Например, первая модель удобна для моделирования длинных гауссовских последовательностей с постоянным шагом по времени, вторая является в общем случае приближенной гауссовской, но позволяет строить процессы как в равноотстоящих, так и не равноотстоящих точках по времени.

В работе используются данные наблюдений приземной температуры воздуха за месяц май для сроков наблюдений 6, 12, 18, 24 час. за период 1938–1984 гг. на метеорологической станции “Свердловск”. Представим эти данные в виде векторных рядов:

$$\vec{\xi}_1^{*l}, \vec{\xi}_2^{*l}, \dots, \vec{\xi}_t^{*l}, \dots, \vec{\xi}_M^{*l},$$

где $\vec{\xi}_t^{*l} = (\xi_{1t}^{*l}, \dots, \xi_{pt}^{*l})^T$, $t = 1, \dots, M$, $l = 1, \dots, Y$, $p = 1, \dots, P$, $P = 4$. Здесь P — число сроков наблюдений, $M = 31$ — число дней в месяце, $Y = 48$ — число лет наблюдений.

В приближении векторного стационарного процесса для оценки матричной корреляционной функции

диагонали. Здесь $\vec{B}^T[k] = (B_1^T[k], B_2^T[k], \dots, B_k^T[k])$ — матричные коэффициенты регрессии являются решением системы уравнений:

$$\tilde{R}_{(k)} \vec{B}[k] = \vec{R}_k, \quad \tilde{R}_{(k)} = J_{(k)} R_{(k)} J_{(k)}$$

и определяются с использованием специального рекурсивного алгоритма [6]. Для моделирования векторных последовательностей большой длины могут быть использованы векторные модели авторегрессии фиксированного порядка K , обеспечивающие совпадение корреляционной функции периодически коррелированного процесса в первых KP точках [5], [6]. В качестве матричной корреляционной функции (4) используется выборочная матричная корреляционная функция вида (1) для случая смещенной оценки.

В качестве второй модели рассматривается нерандомизированная спектральная модель случайного процесса в виде:

$$\eta_n(t) = \sum_{i=1}^n p_i^{1/2}(t) (\zeta_i \sin(\lambda_i t) + \xi_i \cos(\lambda_i t)), \quad (7)$$

где ζ_i и ξ_i — независимые стандартные нормальные величины,

$$p_i(t) = \int_{\Lambda_i} S(\lambda, t) d\lambda, \quad (8)$$

спектральные плотности $S(\lambda, t) = S(\lambda, t + P)$ являются периодическими функциями от времени t , а Λ_i разбиение спектрального пространства, $\lambda_i \in \Lambda_i$.

В силу использования приближения периодически коррелированного процесса (или векторного стационарного процесса) в матричной ковариационной функции:

$$c_{pq}(k), \quad k = 0, \dots, M-1, \quad p, q = 1, \dots, P \quad (9)$$

последовательность элементов $c_{pp}(k)$, $k = 0, \dots, M-1$, $p = 1, \dots, P$ образуют ковариационные функции стационарных процессов. На Рис.1 приведены графики соответствующих выборочных корреляционных функций $r_{qq}^*(k)$, а в таблице 1 соответствующие дисперсии.

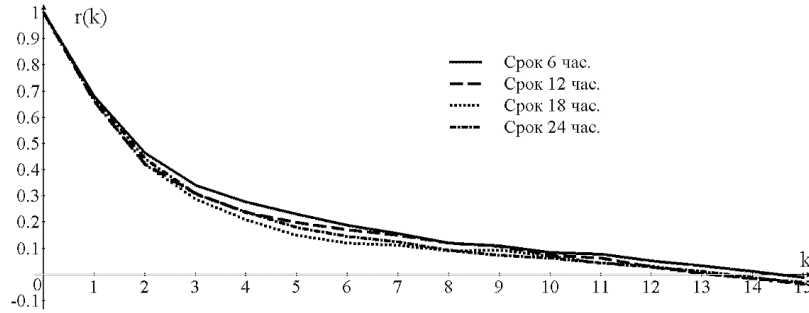


Рис. 1: Выборочные корреляционные функции $r_{qq}^*(k)$ значений ряда ξ_t^{*l} в последовательных точках, соответствующих срокам наблюдений 06, 12, 18 24 час.

Таблица 1: Дисперсии процесса в стандартные сроки наблюдения

p	1 (06 час)	2 (12 час)	3 (18 час)	4 (24 час)
дисперсия	32.345	29.471	50.297	47.532

В данной работе выборочные корреляционные функции, представленные на Рис. 1, аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов корреляционными функциями непрерывного аргумента вида:

$$r_q(k) = a_{1q} \exp(-\gamma_{1q} |k|) \cos(\beta_{1q} k) + a_{2q} \exp(-\gamma_{2q} |k|) + a_{3q} \exp(-\gamma_{3q} |k|) \cos(\beta_{3q} k), \quad (10)$$

$$a_{1q} + a_{2q} + a_{3q} = 1, \quad q = 1, \dots, 4.$$

Соответствующие спектральные плотности имеют вид:

$$s_q(\lambda) = a_{1q} \frac{\gamma_{1q}}{\pi} \frac{\gamma_{1q}^2 + \beta_{1q}^2 + \lambda^2}{(\gamma_{1q}^2 + \beta_{1q}^2 + \lambda^2)^2 - 4\beta_{1q}^2 \lambda^2} + a_{2q} \frac{\gamma_{2q}}{\pi(\gamma_{2q}^2 + \lambda^2)} + a_{2q} \frac{\gamma_{3q}}{\pi} \frac{\gamma_{3q}^2 + \beta_{3q}^2 + \lambda^2}{(\gamma_{3q}^2 + \beta_{3q}^2 + \lambda^2)^2 - 4\beta_{3q}^2 \lambda^2}. \quad (11)$$

Значения коэффициентов приведены в таблице 2.

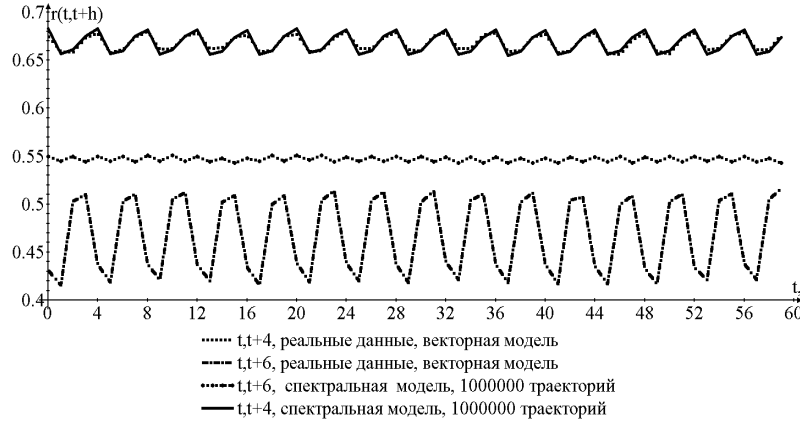


Рис. 2: Корреляции процессов (6) и (7) как функций от времени при сдвигах $h = 4, h = 6$.

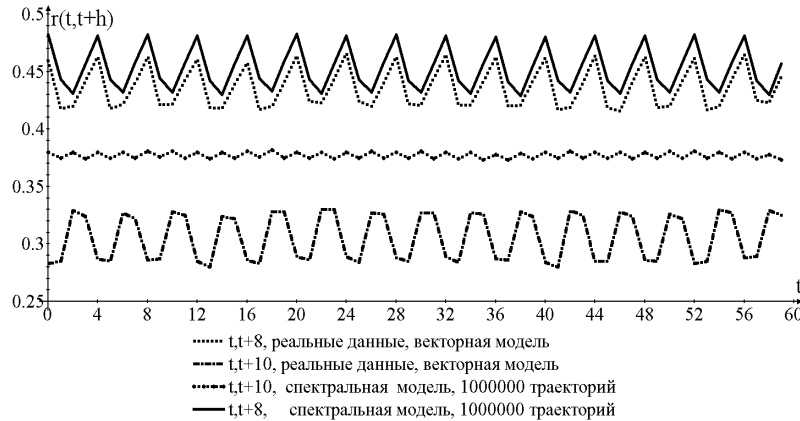


Рис. 3: Корреляции процессов (6) и (7) как функций от времени при сдвигах $h = 8, h = 10$.

На рисунках 2,3,4 приведены корреляции процесса (6) и (7) как функции от времени при различных сдвигах k . Ковариации являются периодическими функциями от времени. Результаты получены путем моделирования траекторий процессов (6) и (7) и оценкой соответствующих корреляций. При моделировании использовалось 1 000 000 модельных траекторий процесса (7). Отметим, что модель (6) позволяет строить периодически коррелированный процесс с учетом всех корреляций, полученных с помощью оценки (1), поэтому модельные корреляции совпадают с выборочными с точностью до статистической погрешности оценки по модельным траекториям процесса. В модели (7) итоговые погрешности определяются погрешностями аппроксимации корреляционных функций $r_q^*(k)$ функциями $r_q(k)$. Перекрестные корреляции в модели (6) определяются с точностью до статистической погрешности оценивания по модельным траекториям, а по модели (7) они определяются соотношением [4]:

$$R_n(t, t+h) = \sum_{i=1}^n p_i^{1/2}(t) p_i^{1/2}(t+h) \cos(\lambda_i(h)). \quad (12)$$

Поэтому отличие результатов по этим двум моделям, как видно из рисунков весьма существенное.

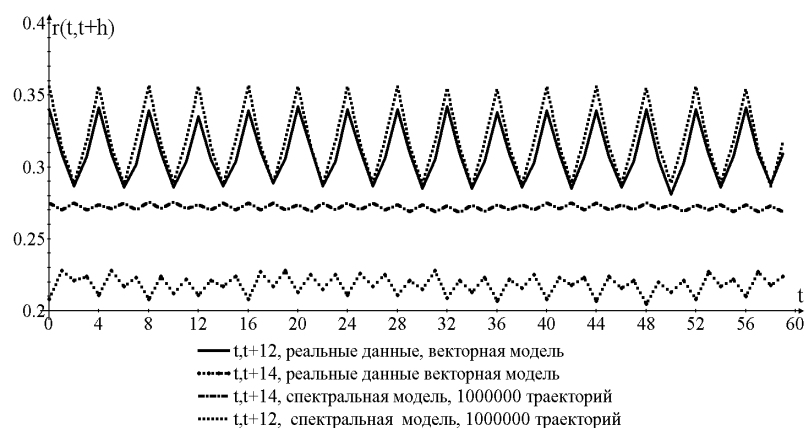


Рис. 4: Корреляции процессов (6) и (7) как функций от времени при сдвигах $h = 12, h = 14$.

Таблица 2: Значения коэффициентов α_{iq}, β_{iq} .

$q \setminus$ коэфф.	a_{1q}	γ_{1q}	β_{1q}	a_{2q}	γ_{2q}	a_{3q}	γ_{3q}	β_{3q}
1 (6h)	0,7	0,54	0,001	0,2	0,078	0,1	0,2	0,001
2 (12h)	0,7	0,53	0,01	0,2	0,07	0,1	0,6	0,4
3 (18h)	0,7	0,5	0,2	0,2	0,1	0,1	0,5	0,4
4 (24h)	0,7	0,5	0,02	0,2	0,1	0,1	0,4	0,4

Заключение

Расчеты показали, что временные ряды температуры являются периодически коррелированными процессами. Однако модель (7) для их описания плохо подходит, потому что модельные корреляции не согласуются с соответствующими корреляциями, полученными по данным наблюдений, приведенными на Рис. 2. Как отмечалось, это объясняется тем, что в модели (7) перекрестные корреляции не являются входными параметрами модели, а качество их воспроизведения зависит от того, как согласуются корреляции (12) с реальными корреляциями. Поэтому для реалистичного описания временных рядов приземной температуры воздуха целесообразно использовать модель (3)–(6). Модель (7) может оказаться полезной при моделировании таких временных рядов, для которых корреляционная структура хорошо описывается классом корреляционных функций процесса (7).

Список литературы

- [1] Боков В.Н., Лопатухин Л.И., Микулинская С.М., Рожков В.А., Румянцева С.А. О межгодовой изменчивости волнения // В кн. Проблемы исследования и математического моделирования ветрового волнения. — СПб: Гидрометеиздат, 1995. С. 446–454.
- [2] Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. — Л.: Гидрометеиздат, 1987. 320с.
- [3] Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М: Мир, 1990
- [4] Медвяцкая А.М., Огородников В.А. Спектральная модель одного класса периодически коррелированных процессов. // Тезисы доклада международная конференция “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015” ИВМиМГ СО РАН с. 39
- [5] Derenok K.V., Ogorodnikov V.A. Numerical simulation of significant long-term decreases in air temperature // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling, 2008, Vol. 23, No 3. P. 223–277.

- [6] Ogorodnikov V.A. and Prigarin S.M. Numerical modeling of random processes and fields: algorithms and applications // VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.

*Алиса Максимовна Медвяцкая — аспирант Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: medvyatskaya@mail.ru;*

*Василий Александрович Огородников — д.ф.-м.н., главн. науч. сотр. Института вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: ova@osmf.sscs.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.