

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ, ПОЛУЧАЕМЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

П. А. Домников

Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск

УДК 519.63

Рассматриваются подходы к моделированию магнитотеллурических полей в трехмерных средах с использованием скалярного и узлового метода конечных элементов и методы решения конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих при использовании данных подходов. Проводится сравнение прямых и итерационных методов решения СЛАУ с комплексно-симметричными и несимметричными матрицами. Предлагаются подходы к симметризации конечноэлементных матриц. Исследуется применение различных предобусловливателей.

Ключевые слова: итерационные методы, магнитотеллурическое зондирование, метод конечных элементов.

Введение

Технология магнитотеллурических зондирований (МТЗ) является лидирующей в области региональных электроразведочных исследований. Важные области ее применения — изучение перспектив нефтегазоносности осадочных бассейнов и оценка сейсмической опасности регионов [1]. Необходимость развития математического аппарата, позволяющего рассчитывать поля МТЗ в реальных (сложных) средах, постоянно растет [4]. При этом вычислительная эффективность методов расчета магнитотеллурических полей играет определяющую роль для их использования при выполнении практических исследований: проектировании электроразведочных работ и интерпретации данных. В данной работе трехмерные магнитотеллурические поля моделируются с использованием метода конечных элементов (МКЭ) со скалярными базисными функциями в вариационной постановке для двух потенциалов. Применяются различные подходы для сокращения времени решения конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1 Математические модели

В случае применения узлового МКЭ система дифференциальных уравнений для вычисления трех-мерного поля (влияния 3D-неоднородностей) будет иметь вид

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A}^a + i\omega \sigma \vec{A}^a + \sigma \nabla V^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n, \\ -\nabla \cdot (\sigma \nabla V^a) - i\omega \nabla \cdot (\sigma \vec{A}^a) = -\nabla \cdot ((\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n), \end{cases} \quad (1)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, $\sigma^n = \sigma^n(z)$ — удельная электрическая проводимость горизонтально-слоистой среды, $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота, ν — частота поля, i — мнимая единица. В данном случае $\vec{B}^a = \nabla \times \vec{A}^a$, $\vec{E}^a = -i\omega \vec{A}^a - \text{grad} V^a$. При этом потенциалы \vec{A}^a и V^a аппроксимируются узловыми

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук (номер гранта МК-4858.2016.5).

базисными функциями (для вектор-потенциала \vec{A}^a имеются ввиду три его компоненты). Запишем эквивалентную вариационную формулировку в форме Галеркина для системы уравнений (1). При этом учтем, что первое уравнение в системе (1) фактически является системой из трех скалярных уравнений. Скалярно умножим каждое уравнение на пробную функцию ϕ и проинтегрируем по расчетной области и применим теорему Грина (интегрирования по частям) и учтем, что ϕ равна нулю на границе расчетной области. Таким образом, вариационная постановка для системы уравнений (1) будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla A_x^a \cdot \nabla \phi \, d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma A_x^a \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial x} \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) E_x^n \phi \, d\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla A_y^a \cdot \nabla \phi \, d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma A_y^a \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial y} \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) E_y^n \phi \, d\Omega, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla A_z^a \cdot \nabla \phi \, d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma A_z^a \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial V^a}{\partial z} \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) E_z^n \phi \, d\Omega, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma}{\mu_0 \omega} \nabla V^a \cdot \nabla \phi \, d\Omega + i \int_{\Omega} \sigma (A_x^a, A_y^a, A_z^a) \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{(\sigma - \sigma^n)}{\omega} \vec{E}^n \cdot \nabla \phi \, d\Omega. \quad (5)$$

2 Структура конечноэлементных СЛАУ

Конечноэлементная аппроксимация системы вариационных уравнений (2–5) на конечномерном функциональном пространстве финитных функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in H_h^1(\Omega)$, где n — число узлов в конечноэлементной сетке, приводит к разреженной конечноэлементной СЛАУ

$$Aq = f, \quad (6)$$

где A — несимметричная вещественная матрица размера $8n \times 8n$, f — вектор правой части, q — вектор неизвестных, состоящий из весов базисных функций φ_i в представлении искомых функций $\vec{A}^a = (A_x^a, A_y^a, A_z^a)$ и V^a в виде разложения по базисным функциям φ_i :

$$\text{Re } \vec{A}^a = (\text{Re } A_x^a, \text{Re } A_y^a, \text{Re } A_z^a) = \left(\sum_{i=1}^n q_i^{\text{Re } A_x} \varphi_i, \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Re } A_y} \varphi_i, \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Re } A_z} \varphi_i \right), \quad (7)$$

$$\text{Im } \vec{A}^a = (\text{Im } A_x^a, \text{Im } A_y^a, \text{Im } A_z^a) = \left(\sum_{i=1}^n q_i^{\text{Im } A_x} \varphi_i, \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Im } A_y} \varphi_i, \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Im } A_z} \varphi_i \right), \quad (8)$$

$$\text{Re } V^a = \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Re } V} \varphi_i, \quad \text{Im } V^a = \sum_{i=1}^n q_i^{\text{Im } V} \varphi_i. \quad (9)$$

Если неизвестные пронумерованы в следующем порядке:

$$q = (q_1^{\text{Re } A_x}, q_1^{\text{Im } A_x}, q_1^{\text{Re } A_y}, q_1^{\text{Im } A_y}, q_1^{\text{Re } A_z}, q_1^{\text{Im } A_z}, q_1^{\text{Re } V}, q_1^{\text{Im } V}, \dots, q_n^{\text{Re } A_x}, q_n^{\text{Im } A_x}, q_n^{\text{Re } A_y}, q_n^{\text{Im } A_y}, q_n^{\text{Re } A_z}, q_n^{\text{Im } A_z}, q_n^{\text{Re } V}, q_n^{\text{Im } V})^T, \quad (10)$$

то матрица СЛАУ (6) будет состоять из блоков вида

$$A_{8 \times 8}^{jk} = \begin{pmatrix} b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^x & 0 \\ c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^x \\ 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & d_{jk}^y & 0 \\ 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & d_{jk}^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & 0 & d_{jk}^z \\ 0 & -d_{kj}^x & 0 & -d_{kj}^y & 0 & -d_{kj}^z & g_{jk} & 0 \\ d_{kj}^x & 0 & d_{kj}^y & 0 & d_{kj}^z & 0 & 0 & g_{jk} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

При этом вектор неизвестных будет состоять из блок-векторов вида

$$q^k = (q_k^{\text{Re } A_x}, q_k^{\text{Im } A_x}, q_k^{\text{Re } A_y}, q_k^{\text{Im } A_y}, q_k^{\text{Re } A_z}, q_k^{\text{Im } A_z}, q_k^{\text{Re } V}, q_k^{\text{Im } V})^T.$$

Форма записи конечноэлементной матрицы с блоками вида (11) применялась в работе [2]. Данная форма записи приводит к СЛАУ с вещественной несимметричной матрицей, и для решения полученной СЛАУ можно применять итерационные методы решения СЛАУ такие как GMRES и BCG [3]. В работе [4] было показано, что GMRES затрачивает меньше времени, чем BCG для решения СЛАУ данного вида, поэтому в данной работе для решения СЛАУ с матрицами, имеющими блочную структуру (11) мы будем применять GMRES.

Блок вида (11) также можно интерпретировать как несимметричную матрицу размера 4×4 , состоящую из комплексных чисел, используя матричное представление комплексных чисел: комплексное число $a + ib$ соответствует матрице вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Матрицу конечноэлементной СЛАУ можно привести к комплексно-симметричному виду, если вектор неизвестных будет состоять из блок-векторов следующего вида $q'^k = (q_k^{\text{Re } A_x}, q_k^{\text{Im } A_x}, q_k^{\text{Re } A_y}, q_k^{\text{Im } A_y}, q_k^{\text{Re } A_z}, q_k^{\text{Im } A_z}, 0.5(q_k^{\text{Re } V} + q_k^{\text{Im } V}), 0.5(q_k^{\text{Re } V} - q_k^{\text{Im } V}))^T$. Тогда матрица СЛАУ будет состоять из блок-элементов вида

$$A'_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^x & -d_{jk}^x \\ c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^x & d_{jk}^x \\ 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & d_{jk}^y & -d_{jk}^y \\ 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & d_{jk}^y & d_{jk}^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & d_{jk}^z & -d_{jk}^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & d_{jk}^z & d_{jk}^z \\ d_{kj}^x & -d_{kj}^x & d_{kj}^y & -d_{kj}^y & d_{kj}^z & -d_{kj}^z & 2g_{jk} & 0 \\ d_{kj}^x & d_{kj}^x & d_{kj}^y & d_{kj}^y & d_{kj}^z & d_{kj}^z & 0 & 2g_{jk} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Также можно использовать другой способ для получения комплексно-симметричной структуры блоков СЛАУ, если представить блок-вектор неизвестных в виде

$q''^k = (q_k^{\text{Re } A_x}, q_k^{\text{Im } A_x}, q_k^{\text{Re } A_y}, q_k^{\text{Im } A_y}, q_k^{\text{Re } A_z}, q_k^{\text{Im } A_z}, q_k^{\text{Im } V}, -q_k^{\text{Re } V})^T$. Тогда блок-элементы матрицы СЛАУ примут вид

$$A''_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{jk}^x \\ c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{jk}^x & 0 \\ 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & 0 & 0 & 0 & -d_{jk}^y \\ 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & 0 & 0 & d_{jk}^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{jk} & -c_{jk} & 0 & -d_{jk}^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{jk} & b_{jk} & d_{jk}^z & 0 \\ 0 & -d_{kj}^x & 0 & -d_{kj}^y & 0 & -d_{kj}^z & 0 & -g_{jk} \\ d_{kj}^x & 0 & d_{kj}^y & 0 & d_{kj}^z & 0 & g_{jk} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Элементы блоков определяются соотношениями

$$\begin{aligned} b_{jk} &= \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k \, d\Omega, \quad c_{jk} = \omega \int_{\Omega} \sigma \varphi_j \varphi_k \, d\Omega, \quad d_{jk}^x = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \varphi_j \, d\Omega, \\ d_{jk}^y &= \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \varphi_j \, d\Omega, \quad d_{jk}^z = \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \varphi_j \, d\Omega, \quad g_{jk} = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \sigma \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k \, d\Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

СЛАУ с блоками вида (12) будем называть симметричной СЛАУ типа I, а СЛАУ с блоками вида (13) будем называть симметричной СЛАУ типа II. Существенным различием между структурой блоков (12) и (13) является разная заполненность ненулевыми элементами, а также наличие элемента с нулевой вещественной частью на диагонали блока вида (13). Для решения СЛАУ в комплексно-симметричном представлении будем использовать метод COCR [5].

Для предобуславливания матриц СЛАУ как в несимметричной, так и в симметричной формах использовалась главная диагональ матриц, состоящая из комплексных чисел.

Для векторного МКЭ используется векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{A}^a + i\omega\sigma \vec{A}^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n, \quad (15)$$

для которого эквивалентная вариационная постановка принимает вид

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{A}^a \cdot \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma \vec{A}^a \cdot \vec{\Psi} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) \vec{E}^n \cdot \vec{\Psi} d\Omega, \quad (16)$$

где вещественная и мнимая части решения \vec{A}^a и вещественная пробная функция $\vec{\Psi}$ принадлежат пространству $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$. Получаемая конечноэлементная СЛАУ является комплексно-симметричной. Для ее решения используется метод COCR со следующим предобуславливателем: $M^{-1} = D^{-1} + G^T D_{G^T A G}^{-1} G$, где D — это главная диагональ исходной матрицы A , G — это матрица дискретного градиента, а $D_{G^T A G}$ — это главная диагональ матрицы $G^T A G$.

3 Результаты

Для проведения вычислительных экспериментов была выбрана следующая геоэлектрическая модель, содержащая горизонтальные слои со следующими толщинами и удельными сопротивлениями: $h_1 = 120$ м, $h_2 = 680$ м, $h_3 = 25000$ м, $h_4 = 15000$ м, $h_5 = 230000$ м, $h_6 = \infty$, $\rho_1 = 120 \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_2 = 50 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_3 = 900 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_4 = 120 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_5 = 700 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $\rho_6 = 100 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. В данную горизонтально-слоистую среду помещены 2 объекта в форме прямоугольных параллелепипедов. Первый объект имеет удельное сопротивление $1.5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ и имеет протяженность по X от 25000 м до 67000 м, по Y от -40000 м до 50000 м, по Z от -9000 м до -5000 м. Второй объект имеет удельное сопротивление $4 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ и имеет протяженность по X от -25000 м до 4000 м, по Y от -10000 м до 0 м, по Z от -800 м до -300 м. В расчетной области была построена конечноэлементная сетка из несогласованных прямоугольных параллелепипедов, содержащая 12601 узел. Фрагмент сечения сетки показан на рис. 1.

Проводимость слоев горизонтально-слоистой среды была получена в результате 1D-инверсии на одном из участков Восточно-Сибирской платформы. В данной геоэлектрической модели первый объект является целевым и расположен на большой глубине, а второй расположен сбоку на меньшей глубине и является помехой при поиске местоположения и глубины первого объекта. В этом случае задачу поиска целевого объекта нельзя корректно решить с использованием методов 1D- и 2D-моделирования, поэтому используется полноценное 3D-моделирование.

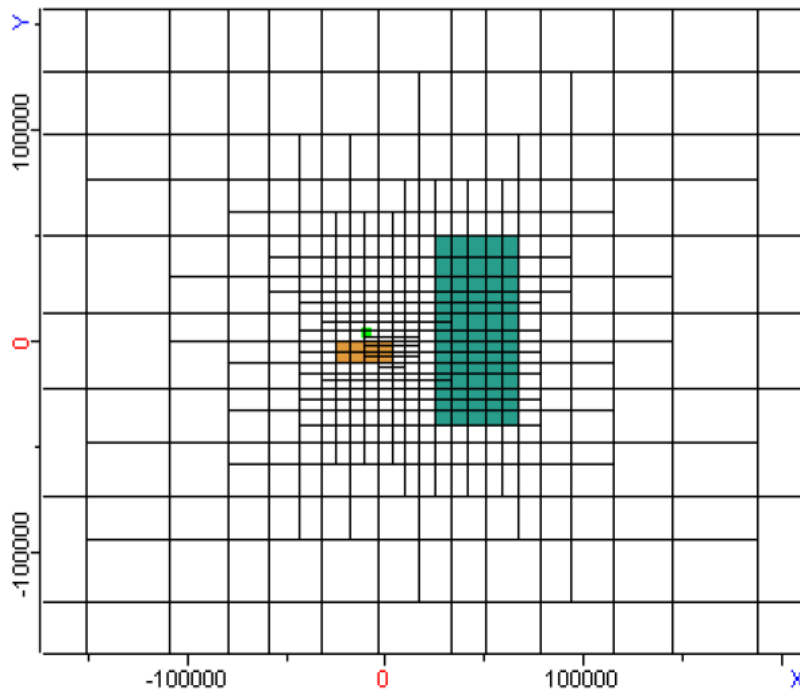


Рис. 1: Результаты моделирования

Матрицы конечноэлементных СЛАУ хранились в разреженном блочном строчно-столбцовом формате [2] в следующих массивах:

gg — массив вещественных чисел, содержащий блок-элементы нижнего треугольника матрицы, перечисленные в строчном порядке;

di — массив вещественных чисел, содержащий все ненулевые элементы диагональных блоков матрицы;

ig — целочисленный массив, содержащий адреса хранения блок-строк матрицы в массиве *gg*;

jj — целочисленный массив, содержащий номера блок-столбцов, соответствующих блок-элементам в массиве *gg*;

idi — целочисленный массив, содержащий адреса хранения диагональных блоков в массиве *di*;

ijg — целочисленный массив, содержащий адреса хранения внедиагональных блоков в массиве *gg*.

В каждом блоке только 26 ненулевых элементов, причем для хранения данного блока в памяти компьютера требуется хранить только 9 его ненулевых элементов (значения некоторых элементов совпадают, некоторые из них одинаковые по модулю и отличаются только знаком). Причем для хранения диагональных блоков достаточно хранить 6 его ненулевых элементов. Если блок соответствует узлу сетки, находящемуся в среде с нулевой проводимостью, то для хранения блока достаточно одной ячейки памяти. Все сказанное относится как к блокам вида (11), так и к блокам вида (12) и (13), которые содержат одинаковые элементы, отличающиеся лишь расположением, что учитывается на уровне подпрограммы матрично-векторного умножения. СЛАУ, полученная в данной работе, содержала 6602648 ненулевых элементов (при симметризации типа II), что при использовании разреженного блочного строчно-столбцового формата потребовало 869848 ячеек памяти.

В таблице 1 приведено время решения СЛАУ и число итераций при использовании узлового МКЭ в различных постановках и векторного МКЭ. При использовании GMRES и несимметричной постановки удается решить СЛАУ за приемлемое время на низких и высоких частотах, а в среднем диапазоне частот от 0.0488281 Гц до 0.78125 Гц время решения СЛАУ резко возрастает. При использовании же симметричных постановок мы имеем время решения на низких частотах порядка 20 с и наблюдаем увеличение времени решения СЛАУ с увеличением частоты поля. Причем при использовании симметризации типа I наблюдается резкое увеличение вычислительных затрат начиная с частоты 0.78125 Гц. В векторном МКЭ наблюдается обратная зависимость времени решения СЛАУ от увеличения частоты поля.

Таблица 1: Число итераций N и время t решения конечноэлементных СЛАУ

ν , Гц	GMRES		COCR, СЛАУ типа I		COCR, СЛАУ типа II		COCR, ВМКЭ	
	N	t	N	t	N	t	N	t
0.00038147	1950	57 с	838	24 с	861	22 с	1377	2мин 10с
0.00076294	2450	1 мин 12 с	863	25 с	860	22 с	1395	2мин 15с
0.00152588	3850	1 мин 53 с	969	28 с	939	24 с	1460	3мин 2с
0.00305176	8300	4 мин 3 с	1099	32 с	1090	27 с	1430	3мин 4с
0.00610352	14800	7 мин 12 с	1924	56 с	1705	43 с	1349	2мин 24с
0.012207	23150	11 мин 17 с	2612	1 мин 16 с	2054	52 с	1306	2мин 2с
0.0244141	33850	16 мин 29 с	4077	1 мин 59 с	2456	1 мин 2 с	1022	1мин 35с
0.0488281	>50000	>25 мин	6854	3 мин 20 с	2899	1 мин 13 с	848	1мин 19с
0.0976563	>50000	>25 мин	9530	4 мин 38 с	3315	1 мин 23 с	710	1мин 6с
0.195313	>50000	>25 мин	17876	8 мин 41 с	4751	1 мин 59 с	568	1мин 7с
0.390625	>50000	>25 мин	34968	17 мин 0 с	6612	2 мин 46 с	490	1мин 2с
0.78125	>50000	>25 мин	>50000	>25 мин	8710	3 мин 39 с	381	0мин 49с
1.5625	49450	24 мин 5 с	>50000	>25 мин	11372	4 мин 46 с	283	0мин 37с
3.125	17150	8 мин 21 с	>50000	>25 мин	11751	4 мин 56 с	218	0мин 28с
6.25	14250	6 мин 56 с	>50000	>25 мин	11705	4 мин 54 с	208	0мин 26с
12.5	100	0 мин 3 с	>50000	>25 мин	9180	3 мин 51 с	162	0мин 21с
25	650	0 мин 19 с	>50000	>25 мин	7942	3 мин 20 с	153	0мин 20с
50	1950	0 мин 57 с	>50000	>25 мин	6635	2 мин 47 с	148	0мин 19с
100	20650	10 мин 3 с	>50000	>25 мин	5338	2 мин 14 с	165	0мин 21с
250	9050	4 мин 24 с	>50000	>25 мин	5217	2 мин 11 с	165	0мин 21с

Заключение

Результаты вычислительных экспериментов показали, что оба предложенных способа симметризации матриц конечноэлементных СЛАУ позволили получить ускорение при решении СЛАУ, получаемых при низких частотах магнитотеллурического поля. Симметризация типа I привела к существенному замедлению решения СЛАУ, соответствующих частоте поля 0.390625 Гц и выше. При использовании узлового МКЭ наиболее оптимальным выбором является использование комплексно-симметричной формы II-го типа — использование матриц СЛАУ с блоками вида (12). Однако применение векторного МКЭ показывает, в целом, лучшие результаты, особенно при моделировании на высоких частотах из рассмотренного диапазона.

Список литературы

- [1] Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009, 680 с.
- [2] Рояк М.Э., С.Х. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович. Конечноэлементное моделирование трехмерных гармонических электромагнитных полей в задачах аэроэлектроразведки кимберлитовых трубок // Сибирский журнал индустриальной математики, 1998. — Т.1.— №2. — С.154–168.
- [3] Saad Y., Iterative methods for sparse linear systems - 2nd ed. - SIAM, Philadelphia, — 2003, 528 p.
- [4] П.А. Домников, С.В. Киреева, И.Е. Аврунева. О методах решения конечноэлементных СЛАУ при 3D-моделировании низкочастотных магнитотеллурических полей // Актуальные проблемы электронного приборостроения. АПЭП-2010.: материалы X международной конференции, Новосибирск, 22–24 сентября, 2010. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. — Том 6. — С. 118–123.
- [5] Sogabe T., S.-L. Zhang. A COCR method for solving complex symmetric linear systems // Journal of Computational and Applied Mathematics, 199(2007), pp. 297–303.

*Петр Александрович Домников — к.т.н., доцент кафедры Прикладной математики Новосибирского государственного технического университета;
e-mail: p_domnikov@mail.ru.
Дата поступления — 31 мая 2017 г.*