

# О МОДЕЛЯХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ШТОЛЬНЯМИ И МАТЕРИАЛОВ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ПОЛОСТЯМИ

О. В. Евдокимова<sup>1</sup>, А. Г. Федоренко<sup>1</sup>, В. А. Бабешко<sup>1,2</sup>, Г. Н. Уафа<sup>1</sup>,  
А. В. Плужник<sup>2</sup>, С. Б. Уафа<sup>2</sup>, Т. А. Хафуз<sup>1</sup>, В. В. Лозовой<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Южный научный центр РАН, 630090, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup> Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар

УДК 539.3

Развиваются методы оценки прочностных свойств объектов типа подземных сооружений, в частности, шахт, содержащих параллельные штольни, перегородки между которыми формируются материалом пластов. Подобные блочные конструкции из металлов, содержащие полости, облегчающие вес изделия, применяются в отраслях машиностроения, частности, в авиастроении, для лопаток двигателей. Обычно исследования выполняются для отдельно взятого крепления, а затем найденные параметры принимаются для всех остальных объектов. В то же время множественность таких объектов может приводить к возникновению еще одного фактора нарушения прочности, связанного с возможностью локализации напряженно-деформированного состояния в одной из зон сооружения, приводящей к превышению запланированных параметров прочности. В настоящей работе граничная задача сводится к функциональному уравнению Гильберта-Винера, которое позволит, при его решении получать приближенные значения, описывающие влияние множественности полостей на прочностные свойства блочной структуры.

**Ключевые слова:** напряжения, штольни, деформации, пластины Кирхгофа, блочные элементы, граничные задачи.

## 1 Постановка задачи

В проблеме прочности горных выработок имеется комплекс мер и способов упреждения горных ударов [1]. Они направлены, прежде всего, на снижение имеющихся больших вертикальных напряжений в зоне предстоящего отбора горной породы и достигается введением соответствующих креплений. В работах [2,3] развит подход, позволяющий исследовать влияние удаленных факторов, которые для деформируемых сред обладают дальнедействием, издали локализуя напряженно-деформируемое состояние в зоне штолен, если их количество и размеры увеличиваются. В указанных работах рассматривалось влияние на состояние штолен, нагрузок на пластовые перегородки, лишь вертикальных напряжений, в предположении, малости касательных напряжений в зонах контакта перегородок с верхним и нижним основаниями пород.

Объектом исследования является совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной  $H_1$  и пласта толщины  $h$ , моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобные и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина  $h$  пласта много меньше  $H_1$  что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых. Расположим систему координат  $ox_1x_2x_3$  таким образом, что плоскость  $ox_1x_2$  совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось  $ox_3$  направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси  $ox_1$ , перпендикулярно оси  $ox_2$ , расположено  $N$  протяженных, параллельных между собой штольней, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна  $b_{2n+1} - b_{2n}$ ,

---

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ), (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379), (15-08-01377), (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216), (17-08-00323).

$n = 1, 2, \dots, N$ , где  $(b_{2n}, b_{2n+1})$  — координаты на оси  $ox_2$  штольни с номером  $2n$ . Пласт сверху накрыт верхним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями  $t(x_1, x_2)$  и перемещениями  $u_{32}(x_1, x_2)$  верхней границы основания задается соотношением  $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} v t(x_1, x_2)$ ,  $\varepsilon_6^{-1} v > 0$ . Здесь  $v$  — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами  $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$  шириной,  $b_{2n} - b_{2n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $b_1 = -\infty$ ,  $b_{2N} = \infty$  являются опорами, имеющими номера  $2n - 1$ . Допускается, что верхний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей, с плотностью материала  $\rho$  вертикально воздействует сверху на пласт напряжением  $q_0 = \rho g H_1$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

## 2 Определяющие уравнения

Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b), \quad D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом  $b$  которому в будущем будет приданы текущие номера. Опоры занимают области  $\Omega_b$  с границами  $\partial \Omega_b$ , при вертикальных статических воздействиях напряжением  $g_{3b}$  сверху и  $t_{3b}$  снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат:  $M_b$  и  $Q_b$  — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат  $x_1 o x_2$ ;  $h_b$  — толщины пластин,  $H_1$  — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1, 2].  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [3–5]

$$\begin{aligned} u_{31}(x_1, x_2) &= K_{31} g = \varepsilon_6^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] d\xi_1 d\xi_2, \\ k_{31}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ G(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $g(\xi, \eta)$  — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, то есть контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор. Функция  $K(\alpha_1, \alpha_2)$ , называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одному из комплексных переменных  $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$  при фиксированном вещественном втором переменном являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается  $t(\xi_1, \xi_2)$ , вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях есть  $u_{32}(x_1, x_2)$ .

### 3 Метод исследования

В основе решения граничной задачи лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–5]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой опоры можно представить в виде [1, 2]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь  $\omega_b$  — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = \lambda, r.$$

Интеграл вычисляется по границе опоры в направлении против часовой стрелки. Для прямолинейной границы внешняя форма принимает выражение

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ - \left[ i\alpha_1 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} - (\alpha_2^2 + \nu_b \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2 [\alpha_2^2 + (2 - \nu_b) \alpha_1^2] u_{3b} \right] \right\} dx_1,$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи, с учетом принятых обозначений, можем представить, отдельно для каждой стороны опоры  $\lambda$  и  $r$ , где  $\lambda$  — левая сторона опоры, а  $r$  — правая. Пусть пластина занимает область  $\Omega_n (|x_1| \leq \infty, b_{2n-1} \leq x_2 \leq b_{2n})$ . Тогда для правой стороны имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2-} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r - (\alpha_{2-}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53b} S_3(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_{r1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i [3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i [3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53} S'_3(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0.$$

На левой стороны пластины псевдодифференциальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2+} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2+}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r - (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} S_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_\lambda)\alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_{r 1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \varepsilon_{53} S'_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}$$

Введем следующую систему обозначений, основываясь на (4) и (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\lambda &= \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\}, \\ \mathbf{F}_1 g &= \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g, \\ y_{1\lambda} &= D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda, \quad y_{1r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r, \\ z_{1\lambda} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda, \quad z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r, \\ \mathbf{K}_\lambda &= \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\}, \quad k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_\lambda - g_\lambda) = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \\ k_{2\lambda} &= \varepsilon_{53\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \quad k_{1r} = \varepsilon_{53r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_\lambda - g_\lambda) = \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}), \quad k_{2r} = \varepsilon_{53r} S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}). \end{aligned}$$

Будем считать, что боковые границы опор штольней свободны от напряжений, то есть  $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r = 0$ . Тогда, введя обозначения,

$$\mathbf{Z}_{\lambda r} = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, z_{1r}, z_{2r}\}, \quad \mathbf{K}_{\lambda r} = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}, k_{1r}, k_{2r}\},$$

с учетом направлений дифференцирования получим для каждой опоры систему уравнений для решения псевдодифференциальных уравнений для левой стороны вида

$$\begin{aligned} (-1 + \nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2+} [(1 - \nu_\lambda)\alpha_1^2] z_{2\lambda} - \{(-1 + \nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+} [(1 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r}\} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} = -k_{1\lambda}, \\ 2\alpha_{2+} z_{1\lambda} + i[(1 + \nu_\lambda)\alpha_1^2] z_{2\lambda} - \{2\alpha_{2+} z_{1r} + i[(1 + \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r}\} e^{i\alpha_{2+} b_{2n}} = -k_{2\lambda}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично для правой стороны.

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0, \quad \mathbf{A}_r \mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda &= \begin{bmatrix} a_{11\lambda} & a_{12\lambda} \\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\lambda = \begin{bmatrix} b_{11\lambda} & b_{12\lambda} \\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} a_{11r} & a_{12r} \\ a_{21r} & a_{22r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} b_{11r} & b_{12r} \\ b_{21r} & b_{22r} \end{bmatrix}. \\ a_{11\lambda} &= -i\alpha_{2-}, \quad a_{12\lambda} = 1, \quad a_{21\lambda} = -i, \\ a_{22\lambda} &= 0, \quad b_{11\lambda} = (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2), \quad b_{12\lambda} = -i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda)\alpha_1^2], \\ b_{21\lambda} &= 2\alpha_{2-}, \quad b_{22\lambda} = -i[3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda)\alpha_1^2], \\ a_{11r} &= -i\alpha_{2+}, \quad a_{12r} = 1, \quad a_{21r} = -i, \\ a_{22r} &= 0, \quad b_{11r} = (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2), \quad b_{12r} = -i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2], \\ b_{21r} &= 2\alpha_{2+}, \quad b_{22r} = -i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Решив эти псевдодифференциальные уравнения для избранной граничной задачи и внося найденные неизвестные во внешние формы. Преобразование Фурье решения для пластин можно представить для левой полуплоскости,  $b = \lambda$ , и для правой,  $b = r$ , в однотипном виде в локальных системах координат

$$U_{3b} = [R_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle.$$

Дальнейшее использование этого представления для сопряжения с подложкой детально описано в [1, 2]. В результате получается система интегральных уравнений для исследования и решения разрабатывается поход, который позволит строить приближенные решения граничной задачи, не прибегая к уравнениям, построенным в [1, 2], основано на сведении проблемы к краевой задаче Римана для нескольких пар функций.

Внеся решения этой системы в псевдодифференциальные уравнения, получим полный набор граничных условий на каждой границе. После этого они вносятся в правые части функциональных уравнений (3). В результате соотношения для опор могут быть представлены в следующем виде

$$U_{2n-1} = -R^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[ \int_{\partial\Omega_n} \omega_{2n-1} + \varepsilon_{53} \mathbf{F}_2(t_{2n-1} - g_{2n-1}) \right].$$

Приняв теперь во внимание, что число опор равно  $N + 1$  с обозначениями сторон опор  $\lambda = 2n - 1$ ,  $r = 2n$ , получим, в результате сопряжения блочных элементов опор с верхним и нижним слоями, следующую систему уравнений

$$U_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_6^{-1} K_{31} \left( \sum_{n=1}^N G_{2n-1} - G_0 \right), \quad U_{32}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_6^{-1} v \sum_{n=1}^N T_{2n-1}.$$

Здесь  $U_{32}(\alpha_1, \alpha_2)$  — перемещения нижнего основания по закону постели Винклера [2]. Можно также использовать другую модель основания, принятую в [1].

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} U_{2n-1} &= -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left\langle \int_{\partial\Omega_{\lambda 2n-1}} \omega_{\lambda 2n-1} - \int_{\partial\Omega_{r 2n-1}} \omega_{r 2n-1} + \varepsilon_{53} S_{312n-1}(\alpha_1, \alpha_2) \right\rangle, \\ \omega_{\lambda 2n-1} &= e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n-1}} \left\{ - \left[ (\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2) \frac{\partial u_{\lambda 2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2 [\alpha_2^2 + (2 - \nu)\alpha_1^2] u_{\lambda 2n-1} \right] \right\} dx_1, \\ \omega_{r 2n-1} &= e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n}} \left\{ - \left[ (\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2) \frac{\partial u_{r 2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2 [\alpha_2^2 + (2 - \nu_b)\alpha_1^2] u_{r 2n-1} \right] \right\} dx_1, \\ \langle \alpha, x \rangle &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \end{aligned}$$

В результате ряда преобразований, приходим к следующему функциональному уравнению, описывающему поведение отдельно выбранной опоры.

$$\begin{aligned} [\varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}(1 + v^{-1} K_{31})] G_{2n-1} &= \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \langle [Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}}] + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53} v^{-1}) G_0 \rangle. \end{aligned}$$

Значение  $t_{2n-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} T_{2n-1}$  находится из соотношения

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = v^{-1} \mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31} (G_0 - G_{2n-1})$$

Здесь  $\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}$  — проектор на область  $\Omega_{2n-1}$ . Последнее соотношение можно приближенно представить в виде  $t_{2n-1}(x_1, x_2) = v^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31} (G_0 - G_{2n-1})$ . Это оправдано тем, что в статических задачах правая часть последнего выражения экспоненциально убывает при удалении от зоны контакта.

Для сведения функционального уравнения к системе интегральных уравнений, введем следующие обозначения

$$[\varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}(1 + v^{-1} K_{31})] = K(\alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \langle [Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}}] + \\ + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53} v^{-1}) G_0 \rangle = f_{2n-1}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Omega_{2n}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \langle [Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}}] + \\ + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53} v^{-1}) G_0 \rangle = \phi_{2n}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{2n-1} = & -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \langle (A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1})e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + \\
& + (A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n})e^{i\alpha_2 b_{2n}} + \varepsilon_{53}(T_{2n-1} - G_{2n-1}) \rangle, \\
(A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1}) = & Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n}) = Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned}$$

## 4 Сведение к функциональному уравнению

Приняв во внимание наличие  $N$  опор, функциональное уравнение граничной задачи можно записать в виде функционального уравнения

$$\begin{aligned}
K(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^N G_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) - \sum_{n=2}^{N-1} \Phi_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{n=1}^N F_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
F_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{n=1}^N F_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned}$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
G_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n-1}} &= G_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) \quad G_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n}} = G_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2), \\
\Phi_{2n}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n}} &= \Phi_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2), \quad \Phi_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n+1}} = \Phi_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2), \\
G_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) &= G_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n}-b_{2n-1})}, \quad \Phi_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n+1}-b_{2n})}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
K(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^N G_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} - \sum_{n=1}^{N-1} \Phi_{2n}^+(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}} &= e^{i\alpha_2 b_{2N-1}} F_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
F_0(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{n=1}^N F_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\alpha_1, \alpha_2)G_{2N-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) + K(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^{N-1} G_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})} - \\
- \sum_{n=2}^{N-1} \Phi_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})} &= F_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

В результате получаем выражения

$$\begin{aligned}
G_{2N-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) &= - \sum_{n=1}^{N-1} G_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N-1}-b_{2n})} + \\
&+ K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=2}^{N-1} \Phi_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N-1}-b_{2n+1})} + K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)F(\alpha_1, \alpha_2), \\
G_{2n-1}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= X_{2n-1}^\pm(\alpha_1, \alpha_2), \quad \Phi_{2n}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = X_{2n}^\pm(\alpha_1, \alpha_2), \\
X_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) &= X_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n}-b_{2n-1})}, \quad X_{2n}^+(\alpha_1, \alpha_2) = X_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n+1}-b_{2n})}, \\
X_{2N-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) &= - \sum_{n=1}^{N-1} X_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})} + \\
&+ K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=2}^{N-1} X_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})} + K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)F_0(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned}$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)F_0(\alpha_1, \alpha_2).$$

Введем обозначения векторов

$$\mathbf{X}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \{X_n^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)\}.$$

Тогда получаем матричные функциональные уравнения Гильберта - Винера [6].

$$\mathbf{X}^{+}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{X}^{-}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2), \quad m, n = 1, 2, \dots, 2N,$$

$$\mathbf{D} = \|d_{mn}\|, \quad d_{mn} = 0, \quad m \neq n, \quad m \neq 2N,$$

$$d_{Ns} = \begin{cases} -e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})}, & s = 2n - 1; \\ K^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})}, & s = 2n. \end{cases}$$

Это уравнение будет объектом последующих исследований и разработки метода его приближенного решения.

## Список литературы

- [1] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К проблеме мониторинга напряженности зон параллельных штольней // МТТ 2016. № 5. С. 6–14.
- [2] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2016, т. 9, № 4 С. 412–419.
- [3] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [4] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости М.: Наука, 1974. 456 с.
- [5] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [6] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.

*Евдокимова Ольга Владимировна — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН;  
e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*

*Федоренко Алексей Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН;  
e-mail: afedorenko@mail.ru;*

*Бабешко Владимир Андреевич — академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заместитель председателя Южного научного центра РАН, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;  
e-mail: babeshko41@mail.ru;*

*Уафа Галина Николаевна, инженер-исследователь Южного научного центра РАН;  
e-mail: uafa70@mail.ru;*

*Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;  
e-mail: infocenter@kubsu.ru;*

*Уафа Самир Баширович — инженер Кубанского государственного университета;  
e-mail: uafa70@mail.ru;*

*Хафуз Татьяна Александровна, стажер-исследователь Южного научного центра РАН;  
e-mail: tasya16.92@mail.ru;*

*Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН;  
e-mail: niva\_kgu@mail.ru;*

*Дата поступления — 10 мая 2017 г.*