

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОЙ RQ-СИСТЕМЫ $M|M|1$ В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ НА ОРБИТЕ

А. А. Назаров, А. А. Анисимова

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Томск*

УДК 519.872

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-система) с простейшим входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания на каждой фазе. Первая фаза содержит только один обслуживающий прибор, все заявки, застающие прибор занятым, покидают систему. Вторая фаза содержит обслуживающий прибор и орбиту, куда переходят заявки, не получившие обслуживания. Находясь на орбите, заявки через экспоненциально распределенные промежутки времени делают попытки вновь обратиться за обслуживанием. Методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите найдено распределение числа заявок на орбите и проведено сравнение с результатами имитационной модели.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, RQ-система, орбита, асимптотический анализ.

## Введение

Системы массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-системы (Retrial queueing system) [1], представляют собой математические модели телекоммуникационных систем: компьютерных и телефонных сетей, систем передачи данных, радио, телевидения, мобильной связи и других. Модели таких систем подходят под определение систем массового обслуживания (СМО) [6]: они предназначены для удовлетворения массовых запросов на выполнение каких-либо услуг. Однако в отличие от классических систем массового обслуживания, для телекоммуникационных систем характерна ситуация, при которой заявка, заставшая обслуживающий прибор занятым, не встает в очередь, а уходит на орбиту, откуда через некоторые промежутки времени предпринимает попытки вновь обратиться за обслуживанием.

Одним из вариантов СМО являются многофазные системы, состоящие из нескольких СМО, которые последовательно обрабатывают поступающие заявки. В частности, двухфазные RQ-системы были впервые рассмотрены С.М. Krishna и Y.H. Lee [3]. Также их анализом занимались В. Krishnakumar [4], G. Choudhury [2] и другие. В данной работе исследуется система  $M|M|1$  с двумя фазами, в которой вторая фаза является RQ-системой.

## 1 Описание модели

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший входящий поток интенсивности  $\lambda$ . По прибытию в систему заявка поступает на первую фазу, которая содержит только один обслуживающий прибор. Все заявки, застающие прибор занятым, покидают систему. После обслуживания на первой фазе заявка поступает на вторую фазу, которая содержит обслуживающий прибор и орбиту, куда переходят заявки, не получившие обслуживания. Продолжительность обслуживания на обеих фазах имеет экспоненциальное распределение с параметрами  $\gamma$  и  $\mu$  соответственно. На орбите заявки осуществляют случайную задержку, имеющую экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ , после которой делают попытки вновь обратиться за обслуживанием. После завершения обслуживания на второй фазе заявка покидает систему. Модель данной системы представлена на рис. 1.

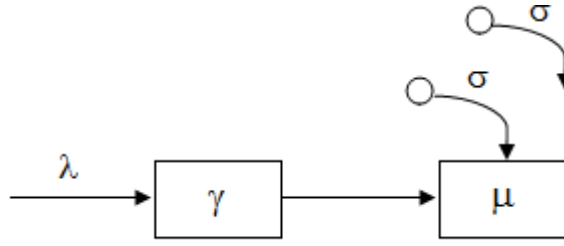


Рис. 1: Модель двухфазной RQ-системы

Обозначим через  $\{i(t)\}$  число заявок в ИПВ в момент времени  $t$ . Процесс  $\{i(t)\}$  не является марковским, поэтому введем дополнительную переменную:

$$\{k(t)\} = \begin{cases} 0, & \text{если оба прибора свободны,} \\ 1, & \text{если прибор на 2-й фазе занят,} \\ 2, & \text{если прибор на 1-й фазе занят,} \\ 3, & \text{если оба прибора заняты.} \end{cases}$$

Пусть  $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i, t)$  — вероятность того, что в системе в момент времени  $t$  на орбите содержится  $i$  заявок, в то время как приборы на обеих фазах находятся в состоянии  $k$ . Будем рассматривать систему в стационарном режиме, при котором  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(i, t) = P_k(i)$ .

Процесс  $\{i(t), k(t)\}$  является марковским, следовательно, для распределения вероятностей  $P_k(i)$  можно составить систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma)P_0(i) + \mu P_1(i) = 0, \\ -(\lambda + \mu)P_1(i) + \gamma P_2(i) + \gamma P_3(i-1) + (i+1)\sigma P_0(i+1) = 0, \\ -(\gamma + i\sigma)P_2(i) + \mu P_3(i) + \lambda P_0(i) = 0, \\ -(\gamma + \mu)P_3(i) + (i+1)\sigma P_2(i+1) + \lambda P_1(i) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) перейдем к частичным характеристическим функциям:  $H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i)$ , где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Система уравнений (1) для характеристических функций переписывается в виде:

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + j\sigma \frac{dH_0(u)}{du} + \mu H_1(u) = 0, \\ -(\lambda + \mu)H_1(u) + \gamma H_2(u) + \gamma e^{ju} H_3(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{dH_0(u)}{du} = 0, \\ -\gamma H_2(u) + j\sigma \frac{dH_2(u)}{du} + \mu H_3(u) + \lambda H_0(u) = 0, \\ -(\gamma + \mu)H_3(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{dH_2(u)}{du} + \lambda H_1(u) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа [?] в условии большой задержки заявок на орбите, при котором  $\sigma \rightarrow 0$ .

## 2 Асимптотический анализ

В соответствии с условием большой задержки в ИПВ выполним в системе (2) замены:

$$\sigma = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k(u) = F_k(w, \varepsilon), \quad (3)$$

получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1(w, \varepsilon) = 0, \\ -(\lambda + \mu)F_1(w, \varepsilon) + \gamma F_2(w, \varepsilon) + \gamma e^{j\varepsilon w} F_3(w, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ -\gamma F_2(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu F_3(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) = 0, \\ -(\gamma + \mu)F_3(w, \varepsilon) - j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} + \lambda F_1(w, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть существует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \varepsilon) = F_k(w)$ . Запишем функцию  $F_k(w)$  в виде:

$$F_k(w) = R_k \Phi(w). \quad (5)$$

Тогда после предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и деления уравнений системы на  $\Phi(w)$  система (4) перепишется в виде:

$$\begin{cases} -\lambda R_0 + jR_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \mu R_1 = 0, \\ -(\lambda + \mu)R_1 + \gamma R_2 + \gamma R_3 - jR_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = 0, \\ -\gamma R_2 + jR_2 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \mu R_3 + \lambda R_0 = 0, \\ -(\gamma + \mu)R_3 - jR_2 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + \lambda R_1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из системы 6 следует, что  $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$  не зависит от  $w$ , поэтому можно записать функцию  $\Phi(w)$  в виде:

$$\Phi(w) = e^{jxw}, \quad (7)$$

откуда  $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = jx$ . Тогда после сокращения системы (6) на  $\Phi(w)$  получим:

$$\begin{cases} -(\lambda + x)R_0 + \mu R_1 = 0, \\ xR_0 - (\lambda + \mu)R_1 + \gamma R_2 + \gamma R_3 = 0, \\ \lambda R_0 - (\gamma + x)R_2 + \mu R_3 = 0, \\ \lambda R_1 + xR_2 - (\gamma + \mu)R_3 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом условия нормировки  $R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 1$ , перепишем систему (8) в матричном виде:

$$\begin{cases} RQ(x) = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $R = (R_0 \ R_1 \ R_2 \ R_3)$ ,  $E$  — единичный вектор-столбец, а матрица  $Q(x)$  представима в виде:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -(\lambda + x) & x & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & 0 & \lambda \\ 0 & \gamma & -(\gamma + x) & x \\ 0 & \gamma & \mu & -(\gamma + \mu) \end{pmatrix}$$

Введя обозначения  $M(x) = \text{augment}(Q(x), E)$ ,  $v = \text{augment}(E^T 0, 1)$ , перепишем систему (9) в виде:

$$RM(x) = v,$$

откуда уравнение для стационарного распределения значений цепи Маркова  $\{k(t)\}$  имеет вид:

$$R = (vM(x)^T) (M(x)M(x)^T)^{-1}.$$

Здесь  $R = R(x)$ . Для нахождения значения параметра  $x$  просуммируем уравнения системы (4) и после сокращений получим:

$$\gamma(e^{j\varepsilon w} - 1)F_3(w, \varepsilon) - j(e^{-j\varepsilon w} - 1)\frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} - j(e^{-j\varepsilon w} - 1)\frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \quad (10)$$

Учитывая, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{\pm j\varepsilon w} - 1) = \pm jw$ , поделим уравнение (10) на  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . После подстановки выражений (5) и (7) и сокращений получим:

$$\gamma R_3(x) - xR_0(x) - xR_2(x) = 0. \quad (11)$$

Решение  $x$  этого уравнения обозначим  $x = \kappa_1$ . В силу замены (3) и равенства (5) можно записать

$$H_k(u) = F_k(w, \varepsilon) \approx R_k \exp \left\{ \frac{j}{\varepsilon} \kappa_1 u \right\}.$$

Отсюда характеристическая функция  $Me^{ju i}$  процесса  $\{i(t)\}$  имеет вид:

$$Me^{ju i} = \sum_k H_k(u) \approx \exp \left\{ \frac{j}{\sigma} \kappa_1 u \right\}.$$

Для более детально исследования характеристической функции рассмотрим асимптотику второго порядка. Для этого решение  $H_k(u)$  системы (2) будем искать в виде:

$$H_k(u) = \exp \left\{ \frac{j}{\sigma} \kappa_1 u \right\} H_k^{(2)}(u). \quad (12)$$

После подстановки (12) в систему (2) получим:

$$\begin{cases} -\lambda H_0^{(2)}(u) + j\sigma \left( \frac{j}{\sigma} \kappa_1 H_0^{(2)}(u) + \frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} \right) + \mu H_1^{(2)}(u) = 0, \\ -(\lambda + \mu) H_1^{(2)}(u) + \gamma H_2^{(2)}(u) + \gamma e^{ju} H_3^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju} \left( \frac{j}{\sigma} \kappa_1 H_0^{(2)}(u) + \frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} \right) = 0, \\ -\gamma H_2^{(2)}(u) + j\sigma \left( \frac{j}{\sigma} \kappa_1 H_2^{(2)}(u) + \frac{dH_2^{(2)}(u)}{du} \right) + \mu H_3^{(2)}(u) + \lambda H_0^{(2)}(u) = 0, \\ -(\mu + \gamma) H_3^{(2)}(u) - j\sigma e^{-ju} \left( \frac{j}{\sigma} \kappa_1 H_2^{(2)}(u) + \frac{dH_2^{(2)}(u)}{du} \right) + \lambda H_1^{(2)}(u) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$\sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_k^{(2)}(u) = F_k^{(2)}(w, \varepsilon). \quad (14)$$

После подстановки (14) в (13) получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_0^{(2)}(w, \varepsilon) - \kappa_1 F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{dF_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{dw} + \mu F_1^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \\ -(\lambda + \mu) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma e^{j\varepsilon w} F_3^{(2)}(w, \varepsilon) + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{dF_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{dw} = 0, \\ -\gamma F_2^{(2)}(w, \varepsilon) - \kappa_1 F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{dF_2^{(2)}(w, \varepsilon)}{dw} + \mu F_3^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda F_0^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \\ -(\mu + \gamma) F_3^{(2)}(w, \varepsilon) + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w} F_2^{(2)}(w, \varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{dF_2^{(2)}(w, \varepsilon)}{dw} + \lambda F_1^{(2)}(w, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

В системе (15) выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим:

$$\begin{cases} -\lambda F_0^{(2)}(w) - \kappa_1 F_0^{(2)}(w) + \mu F_1^{(2)}(w) = 0, \\ -(\lambda + \mu) F_1^{(2)}(w) + \gamma F_2^{(2)}(w) + \gamma F_3^{(2)}(w) + \kappa_1 F_0^{(2)}(w) = 0, \\ -\gamma F_2^{(2)}(w) - \kappa_1 F_2^{(2)}(w) + \mu F_3^{(2)}(w) + \lambda F_0^{(2)}(w) = 0, \\ -(\mu + \gamma) F_3^{(2)}(w) + \kappa_1 F_2^{(2)}(w) + \lambda F_1^{(2)}(w) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

После подстановки разложений (5) и (7) в (16) получим систему:

$$\begin{cases} -(\lambda + \kappa_1) R_0 + \mu R_1 = 0, \\ \kappa_1 R_0 - (\lambda + \mu) R_1 + \gamma R_2 + \gamma R_3 = 0, \\ \lambda R_0 - (\gamma + \kappa_1) R_2 + \mu R_3 = 0, \\ \lambda R_1 + \kappa_1 R_2 - (\gamma + \mu) R_3 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) совпадает с системой (8), полученной при рассмотрении первой асимптотики.

Запишем функцию  $F_k^{(2)}(w)$  в виде разложения:

$$F_k^{(2)}(w) = \Phi(w) \{R_k + j\varepsilon f_k\} + O(\varepsilon^2). \quad (18)$$

Тогда после подстановки разложения (18) система (15) примет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \Phi(w) (R_0 + j\varepsilon w f_0) - \kappa_1 \Phi(w) (R_0 + j\varepsilon w f_0) + j\varepsilon \left( \frac{d\Phi(w)}{dw} (R_0 + j\varepsilon w f_0) + \right. \\ \left. + j\varepsilon f_0 \Phi(w) \right) + \mu \Phi(w) (R_1 + j\varepsilon w f_1) = O(\varepsilon^2), \\ -(\lambda + \mu) \Phi(w) (R_1 + j\varepsilon w f_1) + \gamma \Phi(w) (R_2 + j\varepsilon w f_2) + \gamma e^{j\varepsilon w} \Phi(w) (R_3 + j\varepsilon w f_3) + \\ + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w} \Phi(w) (R_0 + j\varepsilon w f_0) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \left( \frac{d\Phi(w)}{dw} (R_0 + j\varepsilon w f_0) + j\varepsilon f_0 \Phi(w) \right) = O(\varepsilon^2), \\ -\gamma \Phi(w) (R_2 + j\varepsilon w f_2) - \kappa_1 \Phi(w) (R_2 + j\varepsilon w f_2) + j\varepsilon \left( \frac{d\Phi(w)}{dw} (R_2 + j\varepsilon w f_2) + \right. \\ \left. + j\varepsilon f_2 \Phi(w) \right) + \mu \Phi(w) (R_3 + j\varepsilon w f_3) + \lambda \Phi(w) (R_0 + j\varepsilon w f_0) = O(\varepsilon^2), \\ -(\mu + \gamma) \Phi(w) (R_3 + j\varepsilon w f_3) + \kappa_1 e^{-j\varepsilon w} \Phi(w) (R_2 + j\varepsilon w f_2) + \\ - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \left( \frac{d\Phi(w)}{dw} (R_2 + j\varepsilon w f_2) + j\varepsilon f_2 \Phi(w) \right) + \lambda \Phi(w) (R_1 + j\varepsilon w f_1) = O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

В полученной системе выполним предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , учитывая, что  $e^{\pm j\varepsilon w} = 1 \pm j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$ . Поделив уравнения получившейся системы на  $jw\Phi(w)$  и учитывая систему (17) получим:

$$\begin{cases} -\lambda f_0 - \kappa_1 f_0 + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} R_0 + \mu f_1 = 0, \\ -(\lambda + \mu) f_1 + \gamma f_2 + \gamma f_3 + \gamma R_3 + \kappa_1 f_0 - \kappa_1 R_0 - j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} R_0 = 0, \\ -\gamma f_2 - \kappa_1 f_2 + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} R_2 + \mu f_3 + \lambda f_0 = 0, \\ -(\mu + \gamma) f_3 + \kappa_1 f_2 - \kappa_1 R_2 - j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} R_2 + \lambda f_1 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Суммируя уравнения системы (19), получим:

$$\gamma R_3 - \rho \kappa_1 R_0 - \rho \kappa_1 R_2 = 0. \quad (20)$$

Из системы (19) следует, что  $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$  не зависит от  $w$ , поэтому:

$$\Phi(w) = e^{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2}, \quad (21)$$

откуда  $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_2$ .

Подставив разложение (21) в систему (19), получим систему уравнений для функций  $f_k$ :

$$\begin{cases} -(\lambda + \kappa_1) f_0 + \mu f_1 = \kappa_2 R_0, \\ \kappa_1 f_0 - (\lambda + \mu) f_1 + \gamma f_2 + \gamma f_3 = \kappa_1 R_0 - \kappa_2 R_0 - \gamma R_3, \\ \lambda f_0 - (\gamma + \kappa_1) f_2 + \mu f_3 = \kappa_2 R_2, \\ \lambda f_1 + \kappa_1 f_2 - (\mu + \gamma) f_3 = \kappa_1 R_2 - \kappa_2 R_2. \end{cases} \quad (22)$$

Решение системы (22) можно записать в виде:

$$f = C \cdot R + g, \quad (23)$$

где  $g$  — частное решение неоднородной системы, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию.

Просуммируем уравнения системы (15):

$$\begin{aligned} \kappa_1 (e^{-j\varepsilon w} - 1) F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \kappa_1 (e^{-j\varepsilon w} - 1) F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma (e^{j\varepsilon w} - 1) F_3^{(2)}(w, \varepsilon) + \\ -j\varepsilon (e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} - j\varepsilon (e^{-j\varepsilon w} - 1) \frac{\partial F_2^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив в уравнение (24) разложение  $e^{\pm j\varepsilon w} = 1 \pm j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$  и разложения (16) и (18), получим:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left( -j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) (R_0 + j\varepsilon w f_0) + \kappa_1 \left( -j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) (R_2 + j\varepsilon w f_2) + \\ + \gamma \left( j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) (R_3 + j\varepsilon w f_3) - j\varepsilon \left( -j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) (j^2 \kappa_2 w (R_0 + j\varepsilon w f_0) + \\ + j\varepsilon f_0) - j\varepsilon \left( -j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right) (j^2 \kappa_2 w (R_2 + j\varepsilon w f_2) + j\varepsilon f_2 \Phi(w)) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Поделив систему (25) на  $(j\varepsilon w)^2$  и учтя условие (20) получим уравнение для нахождения  $\kappa_2$ :

$$\frac{1}{2} \kappa_1 R_0 - \kappa_1 f_0 + \frac{1}{2} \kappa_1 R_2 - \kappa_1 f_2 + \frac{1}{2} \gamma R_3 + \gamma f_3 - \kappa_2 R_0 - \kappa_2 R_2 = 0.$$

Учитывая (23), можно записать:

$$-\kappa_1 (f_0 + f_2) + \gamma f_3 = C \{ -\kappa_1 (R_0 + R_2) + \gamma R_3 \} - \kappa_1 (g_0 + g_2) + \gamma g_3,$$

то есть для нахождения  $\kappa_2$  достаточно получить частное решение системы 22. Отсюда решение уравнения (25) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \kappa_2 = \left( \frac{\lambda + \kappa_1}{2} \right) \left( \frac{2\gamma \kappa_1 R_3 + 2\gamma^2 R_2 + 2\gamma^2 \kappa_1 R_3 - \gamma \kappa_1 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - \gamma \kappa_1 R_2 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - \gamma^2 R_3 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\kappa_1^2 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\gamma \kappa_1^2 R_2 (\kappa_1 + \gamma + \mu) -}{\gamma \kappa_1 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) + \kappa_1 R_0 (\lambda + \kappa_1) (\kappa_1 + \gamma + \mu) + \gamma \kappa_1 R_2 (\lambda + \kappa_1) (\kappa_1 + \gamma + \mu) - \kappa_1^2 R_0 (\lambda + \kappa_1) (\kappa_1 + \gamma + \mu) +} \right. \\ \left. \frac{-\gamma^2 R_3 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\kappa_1^2 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\gamma \kappa_1^2 R_2 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\kappa_1^3 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\gamma \kappa_1 R_3 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - 2\gamma \kappa_1^2 R_0}{+\kappa_1^3 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) - \kappa_1^2 R_0 (\kappa_1 + \gamma + \mu) + \gamma^2 R_2 (\lambda + \kappa_1) - \kappa_1 \gamma R_0 (\lambda + \kappa_1) + \gamma \kappa_1^2 R_0 - \gamma R_0 (\lambda + \kappa_1) (\kappa_1 + \gamma + \mu) - \gamma R_2 (\lambda + \kappa_1) (\kappa_1 + \gamma + \mu)} \right) \end{aligned}$$

Окончательно характеристическая функция числа заявок в ИПВ имеет вид:

$$H(u) = \exp \left\{ ju \frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_2}{\sigma} \right\}. \quad (26)$$

### 3 Сравнение с результатами имитационного моделирования

В данном разделе проводится сравнение полученных асимптотических семиинвариант первого порядка с результатами имитационного моделирования при  $\sigma \rightarrow 0$ . Моделирование проводилось при числе заявок во входящем потоке равным 1 миллиону.

В результате работы имитационной модели получим ряд распределения, следовательно, для сравнения с асимптотическими результатами необходимо дискретизировать полученное ранее распределение.

Функция (26) является характеристической функцией гауссовской случайной величины, следовательно, можно записать функцию распределения:

$$F(x) = N\left(x, \frac{\kappa_1}{\sigma}, \sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}\right) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi\kappa_2}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{\frac{-\sigma\left(t - \frac{\kappa_1}{\sigma}\right)^2}{2\kappa_2}\right\} dt.$$

Отсюда вероятности  $P\{i(t) = i\} = P(i)$  выражаются в виде:

$$P_{as}(i) = (F(i + 0, 5) - F(i - 0, 5)) (1 - F(-0, 5))^{-1}.$$

Для определения качества оценивания рассчитаем расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max_{0 \leq i \leq \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P_{im}(n) - P_{as}(n)) \right|.$$

В таблицах 1–3 представлены результаты сравнения асимптотических результатов с результатами имитационного моделирования при различных значениях параметров  $\lambda$  и  $\sigma$ .

Таблица 1: Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при  $\lambda = 0, 5$ ,  $\gamma = \mu = 1$

|          |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma$ | 0,1   | 0,05  | 0,03  | 0,01  | 0,005 |
| $\Delta$ | 0,104 | 0,067 | 0,041 | 0,017 | 0,015 |

Таблица 2: Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при  $\lambda = 0, 7$ ,  $\gamma = \mu = 1$

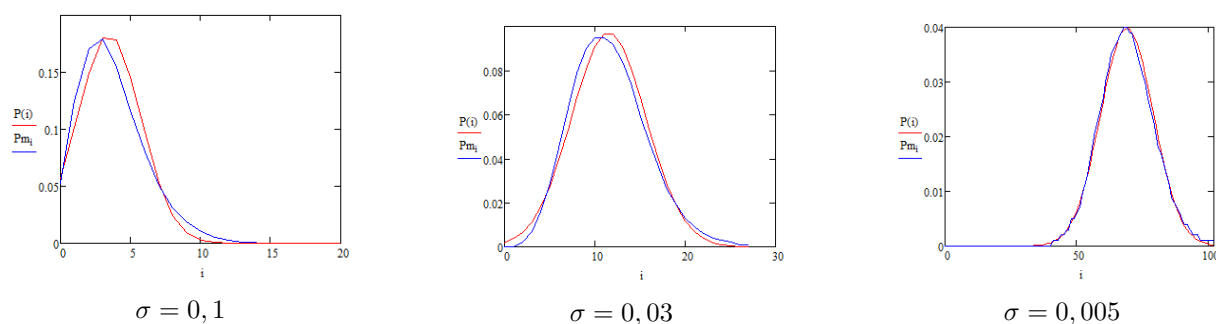
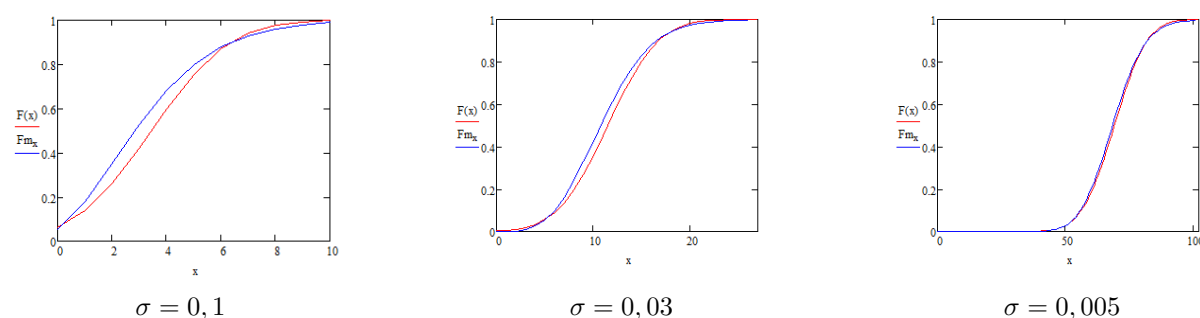
|          |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma$ | 0,1   | 0,05  | 0,03  | 0,01  | 0,005 |
| $\Delta$ | 0,067 | 0,032 | 0,022 | 0,021 | 0,015 |

Таблица 3: Сравнение асимптотических результатов и результатов имитационной модели при  $\lambda = 0, 9$ ,  $\gamma = \mu = 1$

|          |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma$ | 0,1   | 0,05  | 0,03  | 0,01  | 0,005 |
| $\Delta$ | 0,041 | 0,026 | 0,025 | 0,018 | 0,011 |

В приведенных выше примерах качество оценивания становится приемлемым (расстояние Колмогорова меньше 0,05) уже при  $\sigma = 0,01$ . Также можно отметить, что расстояние Колмогорова уменьшается при увеличении загрузки системы.

На рисунках 2 и 3 представлены графики распределений вероятности и функций распределения для распределений, полученных в результате асимптотического анализа и имитационного моделирования.

Рис. 2: Сравнение плотностей распределения для различных значений  $\sigma$ .Рис. 3: Сравнение функций распределения для различных значений  $\sigma$ .

## Заключение

В настоящей работе рассмотрена математическая модель двухфазной RQ-системы M|M|1 и с помощью метода асимптотического анализа получено асимптотическое распределение числа на орбите в условии большой задержки заявок на орбите, а также приведено сравнение полученных результатов с имитационной моделью.

## Список литературы

- [1] Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer. 2008, 267 p.
- [2] Choudhury, G. A single server queueing system with two-phases of service and vacations // QTQM. 2008. Vol. 5, P. 33–49.
- [3] Krishna C.M. and Lee Y.H. A study of two-phase service // Operations Research Letters. 1990, Vol. 9, P. 91–97.
- [4] Krishnakumar B. and Arivudainambi D. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of services and preemptive resume // Annals of Operations Research. 2002, Vol. 113. P. 61–79.
- [5] Nazarov A.A., Sudyko E.A. Method of asymptotic semiinvariants for studying a mathematical model of a random access network // Problems of information transmission. 2010, Vol. 46, № 1. P. 86–102.
- [6] Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. — 2-е изд., перераб. и доп. / Б. В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 336 с.

*Анатолий Андреевич Назаров — д.т.н., проф., зав.каф. теории вероятности и математической статистики Томского государственного университета;  
e-mail: nazarov.tsu@gmail.com;*

*Анна Александровна Анисимова — студентка Томского государственного университета;  
e-mail: siberienne94@yandex.ru.*

*Дата поступления — 30 мая 2017 г.*