

# СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. В. Глазунов<sup>1,2</sup>, Е. В. Мортиков<sup>2,1</sup>, В. Н. Лыкосов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики РАН, 119991, Москва*

<sup>2</sup> *Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В. Ломоносова, 119234, Москва*

УДК 551.511.61

Представлены вычислительные технологии расчета турбулентных течений в пограничных слоях атмосферы и океана, основанные на двух подходах: прямом численном моделировании и вихреразрешающем моделировании. Модели разработаны в Институте вычислительной математики РАН и Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ имени М.В. Ломоносова, основаны на оригинальных методах численного решения уравнений гидродинамики и на новых подходах к построению “подсеточных” замыканий. Они имеют эффективную параллельную реализацию, позволяющую использовать гетерогенную архитектуру современных суперкомпьютеров. Демонстрируются результаты по решению ряда задач, иллюстрирующих применение разработанных моделей и направленных на уточнение существующих и на построение перспективных параметризаций турбулентных процессов в моделях крупномасштабной циркуляции атмосферы и океана. **Ключевые слова:** Турбулентность в атмосфере, прямое численное моделирование, DNS, вихреразрешающее моделирование, LES, лагранжев перенос частиц, параллельные вычисления.

## Введение

Подходы к численному моделированию турбулентности обычно обобщают в три группы, различающиеся по степени детализации вихрей, описываемых явным образом: 1) DNS-модели (прямое численное моделирование — решение дискретного аналога дифференциальных уравнений Навье–Стокса); 2) LES-модели (вихреразрешающее моделирование — относительно крупные вихри воспроизводятся явно, а влияние мелкомасштабной турбулентности учитывается параметрически); 3) RANS-модели (модели, основанные на Рейнольдсовском осреднении всей вихревой динамики).

Современные суперкомпьютеры позволяют интегрировать гидродинамические модели с количеством узлов сетки, достигающим величины  $10^9$ – $10^{11}$ . Это дает возможность при помощи DNS-моделей рассчитывать простые турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса (см., например, [8]). Однако, упомянутые расчеты требуют огромного количества вычислительных ресурсов и могут использоваться только как дополнительный инструмент для изучения турбулентности в пограничных слоях атмосферы и океана.

Геофизические задачи по расчету турбулентности в областях сложной формы имеют свою специфику, связанную с меньшими требованиями к детализации геометрии объектов, но с повышенными требованиями к корректному учету влияния стратификации и эффектов вращения Земли. Кроме того, эти задачи характеризуются необходимостью получения обобщающих статистических закономерностей, что требует продолжительных и массовых расчетов. Предпочтительными оказываются LES-модели, обладающие меньшей точностью воспроизведения турбулентной динамики, но позволяющие параметрически учитывать свойства подстилающей поверхности, включающие в себя описание процессов конденсации и испарения влаги и модели радиационных притоков тепла.

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-05-03911 и 16-05-01094; разработка численных моделей и расчеты переноса лагранжевых частиц (раздел 2.1)) и Российского научного фонда (номер гранта 17-17-01210; новые расчеты турбулентности при больших числах Ричардсона (раздел 1.1) и моделирование движения льда в стратифицированной жидкости (раздел 1.2)).

DNS- и LES- модели используются для совместных расчетов эйлеровой динамики течения и траекторий лагранжевых частиц (см., например, [10] и обзор современной литературы по данной теме в этой статье). Отдельную задачу требующую модификации лагранжевых подсеточных моделей составляет перенос тяжелых частиц, обладающих инерцией и взаимодействующих с турбулентным течением.

В Институте вычислительной математики РАН и Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ имени М.В. Ломоносова разработаны следующие численные модели:

1. DNS-модель [5, 6]. Преимуществами данной модели являются: эффективная реализация на современных вычислительных системах, включающая возможность расчетов с применением GPU; использование метода погруженной границы для моделирования обтекания объектов на регулярных сетках; возможность моделирования стратифицированных турбулентных течений и течений в непериодической расчетной области.
2. LES-модель ИВМ РАН [1]. В данной модели используется смешанное локализованное динамическое замыкание для «подсеточной/подфильтровой» турбулентности и численная схема высокого порядка точности. Такое сочетание схемы и замыкания повышает эффективное пространственное разрешение модели и позволяет достоверно воспроизводить статистики мелкомасштабной турбулентности при различных режимах стратификации в АПС (см. [1, 2, 3]). Модель содержит блок расчета траекторий лагранжевых частиц [13]. Ниже приводится краткое описание этих моделей и демонстрируются примеры их применения для исследования свойств геофизической турбулентности.

## 1 Прямое численное моделирование

В DNS модели рассматривается полная система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, которая дополняется уравнениями переноса скалярных величин (температуры, солености). Уравнение движения в безразмерном виде представляются следующим образом:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i^e, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора скорости,  $p$  — давление,  $F_i^e$  представляет собой сумму внешних сил (например, силы Кориолиса и силы плавучести).

Численный метод решения системы уравнений (1) основан на использовании консервативных конечно-разностных схем 2-го и 4-го порядка точности для пространственной дискретизации на прямоугольных сетках. Для повышения локального разрешения допускается измельчение шага сетки вдоль каждой из координат. Для аппроксимации по времени используется явная схема Адамса–Башфорта 2-го порядка. При численном решении уравнения Пуассона применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов и геометрический многосеточный метод с V циклом в качестве предобуславливателя. Метод погруженной границы [4] для задания граничных условий на криволинейных и подвижных границах не требует покрытия области криволинейными сетками или введения координатных преобразований и позволяет рассматривать задачи в областях со сложной геометрией при дискретизации уравнений на ортогональных сетках простой структуры. Программная реализация модели основана на трехмерной пространственной декомпозиции области и использовании функций библиотек MPI-OpenMP для распараллеливания вычислений и организации обменов. Допускается выполнение расчетов на графических процессорах с помощью технологии CUDA [5]. Сочетание численных методов и эффективность их программной реализации позволяет моделировать течения при больших числах Рейнольдса.

### 1.1 Моделирование течения Куэтта при устойчивой стратификации

Параметризации турбулентных процессов в устойчиво стратифицированных пограничных слоях атмосферы и океана, как правило, подразумевают наличие критического градиентного числа Ричардсона  $Ri_g$ , при котором турбулентность и перемешивание подавляются, что согласуется с оценками в рамках линейной теории устойчивости Майлса. Вместе с тем, данные натурных измерений, лабораторные исследования и результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что турбулентность может поддерживаться в сдвиговых течениях даже в условиях сильной стратификации [15]. Режим “слабой” сверхкритической турбулентности характеризуется линейной зависимостью турбулентного числа Прандтля  $Pr_\tau$  от  $Ri_g$ . Механизмы подавления или поддержания турбулентности при сильно устойчивой стратификации могут быть изучены при помощи DNS-моделирования.

Были проведены расчеты турбулентного устойчиво-стратифицированного течения Куэтта с числами Рейнольдса  $Re = U_0 H / \nu$ , лежащими в диапазоне от  $Re = 5.2 \times 10^3$  до  $Re = 10^5$  (здесь:  $U_0$  - разность скоростей между стенками,  $H$  - высота канала). Наиболее подробная сетка состояла из  $\sim 200$  млн. ячеек, а в расчетах было задействовано до 2048 процессорных ядер суперкомпьютеров МСЦ РАН и СКЦ МГУ. Балковое число Ричардсона  $Ri = g \frac{T_2 - T_1}{T_1} \frac{H}{U_0^2}$ , где  $T_1, T_2$  — температура на нижней и верхней стенках канала, последовательно увеличивалось вплоть до ламинаризации потока по достижении некоторого  $Ri = Ri_c(Re)$ . В расчетах были получены реализации турбулентного режима при сильной устойчивости (при  $Ri_g(z = H/2) \sim 0.2$ ). Такую турбулентность удалось воспроизвести за счет увеличения поперечного размера расчетной области. При этом, течение характеризуется выраженной перемежаемостью (см. рис. 1, на котором видны турбулентные и ламинарные подобласти). Структура течения связана с формированием вторичных циркуляций (см. рис. 1б, где они изображены схематически на фоне средней поперечной компоненты скорости). Поперечный размер этих циркуляций увеличивается с усилением устойчивости. Представленные вычисления показывают, что турбулентность может поддерживаться при больших значениях числа  $Ri$ , чем это считалось ранее (см. DNS-расчеты [9], в которых при маленьком размере вычислительной области блокируется формирование вторичных вихрей и, как следствие, не происходит последующего перехода к перемежаемому режиму). На рисунке 1(в,г) приведена зависимость  $Ri_g$  и  $Pr_\tau$  от балкового числа Ричардсона при числе

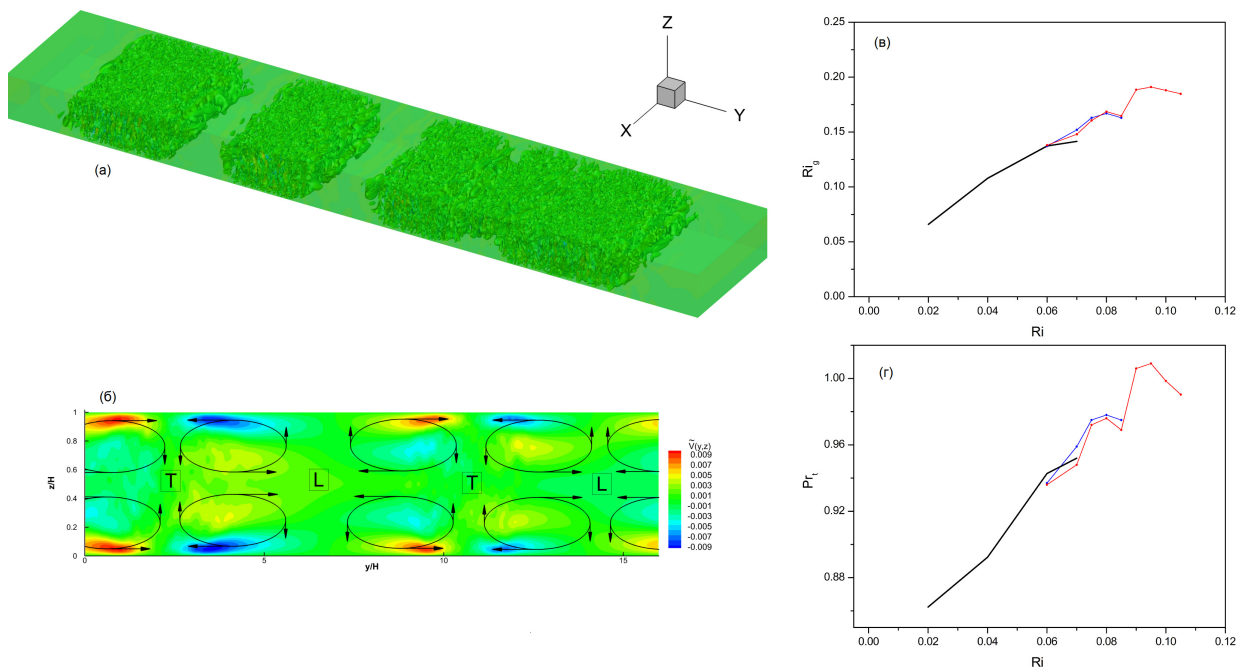


Рис. 1: (а) изоповерхности мгновенной вертикальной компоненты скорости; (б) осредненная поперечная компонента скорости  $\bar{v}(y, z)$ :  $L$  — область ламинарного течения,  $T$  — область турбулентного течения; (в, г) зависимость  $Ri_g$  и  $Pr_\tau$  от балкового числа Ричардсона при  $Re = 2 \times 10^4$  и последовательном увеличении поперечного размера области.

Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^4$ . Увеличение размера области и, как следствие, явное воспроизведение крупномасштабных вторичных циркуляций, позволяет поддерживать турбулентность даже при относительно малых числах Рейнольдса.

## 1.2 Моделирование движения льда в стратифицированной жидкости

В районах интенсивного торошения льда в Арктике пространственная частота подводных ледяных килей, имеющих глубину 5–10 метров, может достигать значений до 10–15 килей на километр. Эти кили создают существенное сопротивление дрейфу льда, что необходимо учитывать при построении крупномасштабных численных моделей циркуляции океана в полярных регионах. Ряд параметризаций сопротивления формы торосов (например, [14]) учитывает влияние следа, формируемого килем, расположенным вверх по течению. Однако, в таких параметризациях среда считается однородной и влияние волновых процессов на

сопротивление льда не учитывается. В работе [6] проведено прямое численное моделирование движения одиночного ледяного кия в однородной и стратифицированной жидкости. Установлена общая форма зависимости силы сопротивления от числа Фруда  $Fr$ , содержащая выраженные точки максимума и минимума. Показано, что стратификация существенно влияет, как на силу сопротивления, так и на структуру течения вблизи препятствия. Максимум силы сопротивления при движении кия связан с генерацией стационарного (относительно торося) волнового возмущения, подавляющего отрыв потока.

В настоящей работе рассматривается движение группы ледяных киев в однородной и стратифицированной жидкости при последовательном увеличении расстояния между торосями. Показано, что в стратифицированной и однородной жидкостях эффекты затенения потока близлежащими ледяными киями существенно отличаются между собой. В частности, значимые изменения в структуре потока и величине силы сопротивления наблюдаются при условиях по числу Фруда ( $Fr \sim 0.6$ ), соответствующих локальному максимуму силы сопротивления в экспериментах для одиночного торося. На временах  $T \sim L/U_0$  (где  $U_0$  — скорость движения льда,  $L$  — расстояние между киями) для торося, вниз по течению от которых расположено препятствие в виде следующего ледяного кия, образование турбулентной струи блокируется, а волновое возмущение подавляется. Данный эффект приводит к резкому уменьшению силы сопротивления до значений сопоставимых с силой сопротивления в однородной жидкости. Таким образом, структура турбулентного потока в перемешанном слое подо льдом, волновые возмущения и величина силы сопротивления формы могут в значительной степени определяться пространственным распределением ледяных торося.

## 2 Вихреразрешающее моделирование и лагранжев перенос частиц

Уравнения LES-модели являются результатом применения пространственного фильтра  $F_{\Delta}(u_i) \equiv \bar{u}_i$  к системе уравнений Навье–Стокса (1), дополненной уравнениями переноса скалярных величин (полей концентрации примесей, потенциальной температуры и влажности воздуха). Тензор “подсеточных/подфильтровых” напряжений  $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$  параметризован при помощи смешанной модели:

$$\tau_{ij}^{\text{mix}} = \tau_{ij}^{\text{smag}} + \tau_{ij}^{\text{ssm}} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j). \quad (2)$$

где  $\bar{S}_{ij}$  — тензор скоростей деформации, вычисленный по фильтрованному полю скорости,  $C_s$  — безразмерный коэффициент, зависящий от координат и определяемый динамически на каждом шаге по времени [1]. Процедура вычисления коэффициентов  $X(\vec{x}, t) = (C_s \bar{\Delta})^2$ , ответственных за диссипацию кинетической энергии, сводится к минимизации функционала  $\Psi(X) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\vec{x}) \varepsilon_{ij}(\vec{x}) d\vec{x}$ , где  $\Omega$  — расчетная область, а  $\varepsilon_{ij}$  — ошибка в переопределенной системе уравнений:

$$(\widehat{X M_{ij}^T}) - \alpha^2 X(M_{ij}^T) = L_{ij} - H_{ij} + \varepsilon_{ij}. \quad (3)$$

Здесь  $M_{ij}^T$ ,  $M_{ij}^T$ ,  $L_{ij}$  и  $H_{ij}$  тензоры, получаемые в результате подстановки смешанной модели (2) в тождество Германо [11]:  $T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j}$ , где  $T_{ij}$  — подсеточные/подфильтровые турбулентные напряжения для сглаженного поля скорости  $\widehat{\bar{u}}$ , полученного последовательным применением базового  $F_{\Delta}$  и тестового  $F_{\Delta}$  пространственных фильтров. Подробности численной реализации и описание метода поиска обобщенного решения системы (3) представлены в работах [1, 13]

Лагранжева скорость безынерционной частицы  $\vec{u}^p$  и координата частицы  $\vec{x}^p$  в LES-модели вычисляются по формулам:  $u_i^p = \bar{u}_i^{(p)} + u''_i^p$ ,  $dx_i^p = u_i^p dt$ , где  $\bar{u}_i^{(p)}$  — интерполяция фильтрованной скорости в позицию частицы. Мелкомасштабные флуктуации  $u''_i^p$  лагранжевой скорости параметризуются дополнительно, в частности, при помощи стохастических моделей. LES-модель ИВМ РАН содержит набор параметризаций подсеточной/подфильтровой лагранжевой динамики, включающий:

(i) стохастические модели первого порядка, основанные на решении обобщенного уравнения Ланжевена:

$$du''_i^p = a_i(\vec{x}^p, \vec{u}^p, t)dt + b_{ij}(\vec{x}^p, \vec{u}^p, t)\xi_i^p, \quad (4)$$

где  $\xi_i^p$  — дельта-коррелированный (обычно Гауссов) случайный шум с дисперсией  $dt$ , а  $a_i$  и  $b_{ij}$  — функции, зависящие от эйлеровых статистических характеристик турбулентности и лагранжевой скорости частиц;

(ii) стохастическую модель нулевого порядка, в которой на каждом шаге по времени задается случайное смещение частицы  $\vec{x}''$ , определяемое коэффициентом подсеточной диффузии  $K_s^{\text{subgr}}$ :

$$dx_i^p = \bar{u}_i^{(p)} dt + x''_i = \bar{u}_i^{(p)} dt + \frac{\partial K_s^{\text{subgr}(p)}}{\partial x_i} dt + \sqrt{2K_s^{\text{subgr}(p)}} \xi_i^p; \quad (5)$$

(iii) детерминистическую “подфильтровую” модель, использующую свойства LES-модели с явной фильтрацией, позволяющие реконструировать значительную часть мелкомасштабных пульсаций скорости, применяя оператор обратный базовому фильтру LES-модели  $F_{\Delta}^{-1}$ :

$$u_i^p = \left( F_{\Delta}^{-1} \bar{u}_i \right)^{(p)}, \quad F_{\Delta}^{-1} \approx F_n^{-1} = \sum_{k=0}^n (I - F_{\Delta})^k. \quad (6)$$

В работе [13] были протестированы различные подходы к построению “подфильтровых” моделей динамики трассеров и показано, что модель (6) во многих случаях достаточна для определения статистических характеристик лагранжева переноса на достаточно больших пространственных и временных масштабах. При этом не привлекаются стохастические модели, требующие значительных вычислительных затрат.

Лагранжев перенос тяжелых частиц осуществляется с учетом эффектов инерции и гравитационного оседания:

$$du_i^p = \left( \frac{3}{4} \frac{C_D}{d_p} \frac{\rho_f}{\rho_p} |\vec{u}^f - \vec{u}^p| (u_i^f - u_i^p) - \delta_{iz} g \right) dt, \quad u_i^f = \bar{u}_i^{(p)} + u''_i^{(p)}, \quad (7)$$

где коэффициент сопротивления  $C_D$  зависит от числа Рейнольдса  $Re_p = d_p |\vec{u}^f - \vec{u}^p| / \nu_f$ , определенного по диаметру частицы  $d_p$  и относительной скорости. Скорость жидкости в позиции частицы  $u_i^f$  включает в себя мелкомасштабные флуктуации  $u''_i^{(p)}$ , вычисленные с помощью стохастической модели (4). В модели предусмотрено обратное влияние частиц на турбулентность, для чего в уравнения движения добавляется сила  $F_f^p$ , пропорциональная по величине и противоположная по знаку силе сопротивления, действующей на частицу.

## 2.1 LES-расчеты атмосферной турбулентности и лагранжева переноса частиц

### а) Вычисление футпринтов (функций влияния) потоков скаляров

При интерпретации натурных пульсационных измерений турбулентного обмена теплом, влагой и газовыми примесями между атмосферой и подстилающей поверхностью возникает задача установления связи между поверхностным потоком  $F_s(x, y, z = 0)$  и турбулентным потоком  $F_s(x_M, y_M, z_M) = \langle s'w' \rangle$ , измеряемым на некотором удалении от земли. Это особенно актуально для измерений над неоднородными поверхностями. Данная задача формализуется при помощи введения функции “футпринта”  $f_s$ , такой что:

$$F_s(x_M, y_M, z_M) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(x, y, x_M, y_M, z_M) F_s(x, y, 0) dx dy.$$

LES-модели, содержащие блок переноса лагранжевых трассеров, позволяют определить функцию  $f_s$  без привлечения существенных упрощений и полуэмпирических гипотез. На рис. 2 представлены результаты моделирования турбулентного течения над неоднородным ландшафтом, имитирующим лесное озеро небольшого размера (см. [12]). Суммарное количество частиц в расчете достигает величины  $\sim 10^9$  (рис. 2а). Вычисления производятся на 256-ти узлах суперкомпьютера с распределенной памятью “Ломоносов”. Данного количества трассеров достаточно для оценки функции “футпринта”  $f_s$  (см. рис. 2г,д,е), что позволяет соотнести измеряемый поток с его значениями на выбранном участке поверхности “озера” и помогает правильно организовать дизайн натурных измерений и обработку их результатов.

### б) Перенос тяжелых частиц и исследование взаимодействия взвеси и турбулентности

Проведены расчеты турбулентного течения Пуазейля со взвешенными частицами. Получены результаты качественно согласующиеся с данными наблюдений и теоретическими представлениями о динамике взвеси в приземном слое. В частности, модель воспроизводит степенную зависимость концентрации взвеси от высоты [7]. Получены распределения частиц взвеси по размерам близкие к наблюдаемым гамма-распределениям. Обнаружено, что совместные эффекты инерции частиц и их гравитационного оседания приводят к формированию логнормальных распределений концентрации взвеси. Рассмотрены факторы, влияющие на возможность взвеси частиц воздействовать на турбулентность и приводить к изменению потока импульса на подстилающей поверхности за счет эффектов стратификации двухфазной жидкости и инерции трассеров.

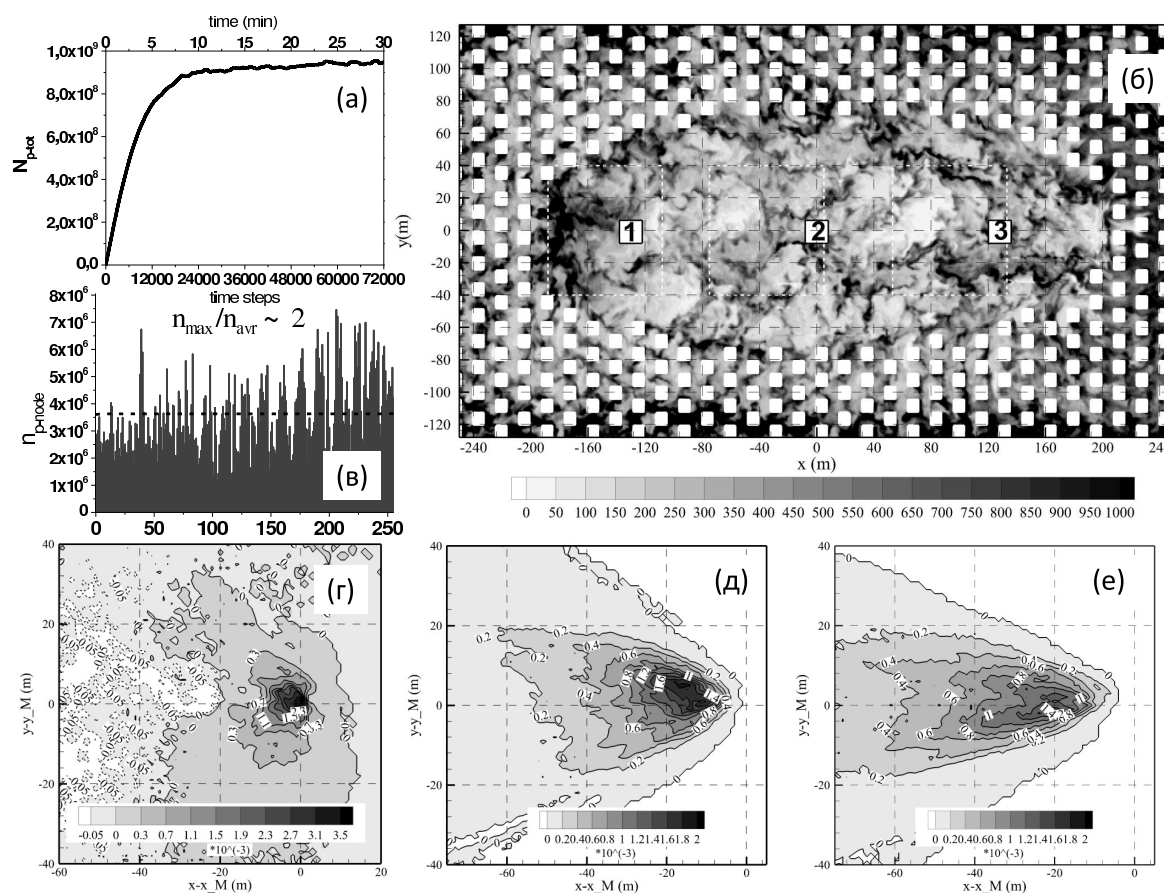


Рис. 2: (а) суммарное количество лагранжевых частиц в расчете  $N_{p-tot}$  в зависимости от времени интегрирования; (б) мгновенное количество частиц в каждой ячейке сетки модели (третий расчетный слой от поверхности); (в) распределение вычислительной нагрузки между процессорами,  $n_{p-node}$  — количество частиц в каждой области декомпозиции при параллельных вычислениях; (г,д,е) футпринты  $f_s(x-x_M, y-y_M, z_M)$  для трех точек измерений, помеченных на рис. 2б квадратиками с цифрами 1, 2 и 3 для высоты датчика  $z_M = 3$  м.

## Заключение

На основе прямого численного моделирования выполнено исследование структуры турбулентного течения Куэтта при сильно устойчивой стратификации. Показано, что перемежающаяся турбулентность может поддерживаться при числах Ричардсона, превышающих известные ранее оценки. Проведено исследование стратифицированного потока под тороженным льдом. Показано, что структура турбулентного потока в перемешанном слое подо льдом, волновые возмущения и величина волновой компоненты силы сопротивления в значительной степени определяются пространственным распределением ледяных торосов. Выполнено вихреразрешающее моделирование турбулентных течений в пограничном слое атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью совместно с лагранжевым расчетом переноса частиц. Построены оценки области влияния (функции «футпринта») поверхностного потока скаляра на пульсационные измерения, проводимые на удалении от поверхности Земли, в пограничном слое атмосферы. Проведены расчеты турбулентного переноса инерционных частиц, взаимодействующих с турбулентным потоком воздуха (природным аналогом является, в частности, снежная поземка).

## Список литературы

- [1] Глазунов А.В. Вихреразрешающее моделирование турбулентности с использованием смешанного динамического локализованного замыкания. Часть 1. Формулировка задачи, описание модели и диагности-

- ческие численные тесты. Часть 2. Численные эксперименты; моделирование турбулентности в канале с шероховатыми границами // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45. № 1.
- [2] Глазунов А.В. Численное моделирование устойчиво-стратифицированных турбулентных течений над поверхностью городского типа. Спектры и масштабы, параметризация профилей температуры и скорости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50, № 4. С. 406–419.
- [3] Глазунов А.В., Дымников В.П. Пространственные спектры и характерные горизонтальные масштабы флуктуаций температуры и скорости в конвективном пограничном слое атмосферы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49, № 1. С. 37–61.
- [4] Мортиков Е.В. Применение метода погруженной границы для решения системы уравнений Навье–Стокса в областях сложной конфигурации // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11, № 1. С. 32–42.
- [5] Мортиков Е.В. Применение графических процессоров для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной конфигурации метода погруженной границы // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, № 1. С. 177–191.
- [6] Мортиков Е.В. Численное моделирование движения ледяного кия в стратифицированной жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52, № 1. С. 120–128.
- [7] Barenblatt G. I., Golitsyn G. S. Local structure of mature dust storms // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31, N 7. P. 1917–1933.
- [8] Bernardini M., Pirozzoli S., Orlandi P. Velocity statistics in turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 4000$  // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. P. 171–191.
- [9] Deusebio E., Caulfield C.P., Taylor J.R. The intermittency boundary in stratified plane Couette flow // J. Fluid Mech. 2015. V. 781. P. 298–329.
- [10] Finn J. R., Li M., Apte S. V. Particle based modelling and simulation of natural sand dynamics in the wave bottom boundary layer // J. Fluid Mech. 2016. V. 796. P. 340–385.
- [11] Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // Phys. Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. V. 3, N 7. P. 1760–1765.
- [12] Glazunov A.V., Stepanenko V.M. Large-eddy simulation of stratified turbulent flows over heterogeneous landscapes // Izv., Atmos. Ocean. Phys. 2015. V. 51, N 4. P. 351–361.
- [13] Glazunov A., Rannik U., Stepanenko V., Lykosov V., Auvinen M., Vesala T., Mammarella I. Large-eddy simulation and stochastic modeling of Lagrangian particles for footprint determination in the stable boundary layer // Geosci. Model Dev. 2016. V. 9, N 9. P. 2925–2949.
- [14] Lu P., Li Z., Cheng B., Leppäranta M. A parameterization of the ice-ocean drag coefficient // J. Geophys. Res. 2011. V. 116, N C7, C07019.
- [15] Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleeorin N., Rogachevskii I., Esau I. A hierarchy of energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure models for stably-stratified geophysical flows // Boundary-Layer Meteorol. 2013. V. 146. P. 341–373.

Андрей Васильевич Глазунов — д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Института вычислительной математики РАН, вед. математик Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: and.glas@gmail.com;

Евгений Валерьевич Мортиков — к.ф.-м.н., науч.сотр. Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: evgeny.mortikov@gmail.com;

Василий Николаевич Лыкосов — член-корреспондент РАН, д.ф.м.н., гл. науч.сотр. Института вычислительной математики РАН, зав. лабораторией Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ имени М.В. Ломоносова; e-mail: lykoss@yandex.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.