

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ПО СФЕРАМ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СОТОВЫХ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

С. А. Гусев^{1,2}, В. Н. Николаев³

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск*

³ *Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С. А. Чаплыгина, 630051, Новосибирск*

УДК 519.676

В работе предложен метод статистического моделирования для определения теплового состояния теплозащитной панели сотового типа. Рассматриваемый процесс переноса тепла в неоднородной среде описывается третьей краевой задачей для уравнения теплопроводности. При этом коэффициенты температуропроводности материалов, из которых состоит панель, являются постоянными величинами, а процесс передачи тепла осуществляется только посредством теплопроводности. Поэтому в вероятностном представлении решения краевой задачи соответствующий случайный процесс представляет собой винеровский процесс без сноса в подобластях, в которых среда однородна. В работе предлагается для моделирования винеровского процесса внутри ячеек сотовой панели на некотором заданном удалении от каркаса использовать метод случайного блуждания по движущимся сферам, а для расчетов по каркасу панели и в его окрестности — метод Эйлера. Такой подход дает значительное ускорение счета по сравнению с использованием для моделирования траекторий только одного метода Эйлера.

Ключевые слова: сотовая теплозащитная панель, краевая задача, вероятностное представление решения, винеровский процесс, бесселевский процесс, случайное блуждание по движущимся сферам.

1 Постановка задачи

Одним из перспективных направлений в конструировании теплозащитных покрытий в технике является применение сотовых теплозащитных панелей. Сотовая теплозащитная панель (рис. 1) представляет собой конструкцию, состоящую из параллельно расположенных пластин из углепластика, между которыми заключен тонкий каркас тоже из углепластика в виде пчелиных сот, заполненных некоторым веществом с низкой теплопроводностью.

В работе [1] для расчета теплопереноса в таких панелях предложено использовать метод стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) на основе вероятностного представления решения уравнения теплопроводности. При этом делалось сглаживание разрывных коэффициентов уравнения теплопроводности на основе интегрального усреднения, а численное решение СДУ осуществлялось методом Эйлера. В данной работе предлагается использовать метод блуждания по движущимся сферам [2] для расчета траекторий трехмерного винеровского процесса в точках ячеек панели, находящихся на некотором расстоянии от каркаса, а в остальной части панели методом Эйлера.

В качестве области изменения пространственных переменных x_1, x_2, x_3 в работе принимается прямоугольный параллелепипед $G = (-l_1, l_1) \times (-l_2, l_2) \times (0, l_3)$. При этом G есть объединение двух непересекающихся подмножеств: $G = G_1 \cup G_2$, где G_1 — подобласть, соответствующая каркасу и пластинам, ограничивающим

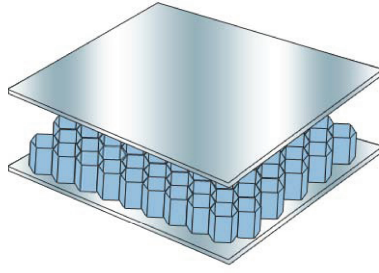


Рис.1: Сотовая панель

панель, а G_2 есть объединение под областей, соответствующих ячейкам, содержащим теплоизоляционный материал. Каждая ячейка представляет собой внутренность правильной шестиугольной призмы, боковая поверхность которой параллельна оси x_3 . Предполагается, что рассматриваемый процесс теплопередачи происходит на отрезке времени $[0, T]$.

В работе рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности, которая описывает теплоперенос в сотовой панели, в которой с двух сторон происходит конвективный теплообмен, а остальные четыре стороны теплоизолированы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \text{ где } b(x) = \begin{cases} b_1, & x \in G_1 \\ b_2, & x \in G_2 \end{cases}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-l_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-l_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = 0, \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \alpha_1(t)(u - \psi_1(t)), \quad (5)$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l} = \alpha_2(t)(u - \psi_2(t)). \quad (6)$$

В (1)–(6) использованы следующие обозначения: φ — начальное распределение температуры в панели; λ — коэффициент теплопроводности углепластика; b_1, b_2 — коэффициенты теплопроводности углепластика и воздуха, соответственно; α_1, α_2 — коэффициенты теплообмена между панелью и внешней средой; ψ_1, ψ_2 — температура внешней среды у нижней и верхней сторон панели, соответственно.

2 Переход к задаче со сглаженными коэффициентами

Поскольку теплозащитная панель состоит из двух материалов с различными теплофизическими свойствами, то в задаче (1)–(6) мы имеем уравнение теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности. Достаточно полное математическое исследование краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами дано в книге [3]. Там же приведены условия существования и единственности обобщенного решения (Теорема 5.1, Глава III) в пространстве функций $V_2^{1,0}(Q_T)$ ($Q_T \equiv G \times (0, T)$) с нормой

$$|u|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(G)} + \left(\int_{Q_T} u_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

обладающих свойством

$$\int_0^{T-h} \int_G h^{-1} (u(x, t+h) - u(x, t))^2 dx dt \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Как утверждается в [3] (Теорема 4.5, Гл. III), обобщенное решение краевой задачи с разрывными коэффициентами в параболическом уравнении в норме пространства $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ устойчиво относительно вариаций коэффициентов. Из этой теоремы применительно к задаче (1)–(6) следует, что, если при $m \rightarrow \infty$ равномерно ограниченная последовательность $b^{(m)}$ сходится почти всюду к b , тогда обобщенные решения задач с коэффициентами $b^{(m)}$ сходятся сильно в норме $\mathbf{V}_2^{1,0}(Q_T)$ к обобщенному решению задачи (1)–(6).

Таким образом, при достаточно больших значениях m приближенное решение $u^{(m)}$ задачи (1)–(6) с разрывным коэффициентом температуропроводности можно получить, если решать задачу, в которой в уравнении (1) этот коэффициент заменить на его гладкую аппроксимацию $b^{(m)}$. В качестве такой замены можно, например, рассматривать его сглаживание в окрестности поверхностей разрыва с помощью интегрального усреднения с бесконечно дифференцируемым финитным ядром [4]

$$b^{(m)}(x) = \int_{|x-y| < \rho_m} \omega_{\rho_m}(|x-y|) b(y) dy = \frac{1}{\rho_m^3} \int_{|x-y| < \rho_m} \omega_1\left(\frac{|x-y|}{\rho_m}\right) b(y) dy. \quad (7)$$

При этом $\omega_1(|\xi|) = 0$ при $|\xi| \geq 1$; $\int_{|\xi| \leq 1} \omega_1(|\xi|) d\xi = 1$. В (7) предполагается, что $\rho_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Функции

$b^{(m)}$ имеют все производные любого порядка [4]. Поскольку функция $b \in L_q(G)$ ($q > 0$), то для любой подобласти $G' \subset G$, отстоящей от границы ∂G на расстоянии не меньшем ρ_m , усреднение $b^{(m)}$ сходится к b в $L_q(G')$

$$\|b^{(m)} - b\|_{q,G'} \leq \sup_{|v| \leq \rho_m} \left(\int_{G'} |b(x-v) - b(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Таким образом, аппроксимации $b^{(m)}$ сходятся к b в норме пространства $\mathbf{L}_q(G)$. Известно также, что сходимость в $\mathbf{L}_q(G)$ влечет сходимость по мере, а, из сходящейся последовательности функций по мере можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду [5]. При этом в [5] дан конструктивный метод построения такой подпоследовательности. В связи со сказанным, далее будем считать, что такая подпоследовательность выбрана и это есть последовательность $\{b^{(m)}\}$.

В результате замены в (1)–(4) коэффициента температуропроводности функцией $b^{(m)}$, приходим к следующей краевой задаче

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} = b^{(m)}(x) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial b^{(m)}}{\partial x_i} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_i}, \quad (9)$$

$$u^{(m)}(x, 0) = \varphi(x), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-l_1} = 0, \quad \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=-l_2} = 0, \quad \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2} = 0, \quad (12)$$

$$\lambda \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \alpha_1(t)(u^{(m)} - \psi_1(t)), \quad (13)$$

$$-\lambda \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=l} = \alpha_2(t)(u^{(m)} - \psi_2(t)). \quad (14)$$

Далее, в работе будут использоваться обозначения: ∂G — граница области G ; $\chi(A)$ — индикаторная функция множества A ; $Q_T = G \times [0, T]$.

Будем предполагать, что заданные в граничных условиях функции α_1 , α_2 , ψ_1 , ψ_2 такие, что для некоторого $0 < \alpha < 1$ существует решение задачи (9)–(14) в пространстве Гельдера $H^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(Q_T)$ (Теорема 5.3, Глава IV). В [6] доказано, что при выполнении условий существования и единственности решений задач (1)–(6) и (9)–(14) для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число m_ε такое, что при $m > m_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\operatorname{vrai} \max_{Q_T} |u^{(m)} - u| < \varepsilon.$$

Следовательно, выбирая радиус усреднения достаточно малым, можно с любой заданной точностью приблизить решение $u^{(m)}$ к u .

3 Решение на основе вероятностного представления

Для решений краевых задач для параболических уравнений с граничными условиями второго и третьего рода известны вероятностные представления [7], [8]. Чтобы получить вероятностное представление решения задачи (9)–(14), введем систему СДУ

$$X_r = x + \int_{T-t}^r \sigma_v \chi(G)(X_v) dW_v^{(3)} + \int_{T-t}^r \mathbf{a} \chi(G)(X_v) dv + \int_{T-t}^r n(X_v) \chi(\partial G)(X_v) dK_v, \quad (15)$$

$$Y_r = 1 + \int_{T-t}^r \alpha_1(v) Y_v \chi(X_3(v) = 0) dK_v + \int_{T-t}^r \alpha_2(v) Y_v \chi(X_3(v) = l_3) dK_v, \quad (16)$$

$$Z_r = \int_{T-t}^r \alpha_1(v) \psi_1(v) Y_v \chi(X_3(v) = 0) dK_v + \int_{T-t}^r \alpha_2(v) \psi_2(v) Y_v \chi(X_3(v) = l_3) dK_v, \quad (17)$$

$$K_r = \int_{T-t}^r \chi_{\partial G}(X_v) dK_v, \quad (18)$$

где $x \in G$ — начальная точка для X ; $W^{(3)}$ — трехмерный винеровский процесс; $\sigma_v = \sqrt{2b^{(m)}(X_v)}$; $\mathbf{a} = \left(\frac{\partial b^{(m)}}{\partial x_i} \right)_{i=1,2,3}$; $n(P)$ — внутренняя нормаль в точке $P \in \partial G$; K_v — локальное время пребывания процесса X на границе, т.е. скалярный возрастающий процесс, который растет только когда $K_v \in \partial G$. Вероятностным представлением решения задачи (9)–(14) является математическое ожидание функционала от решения системы СДУ (15)–(18)

$$u(x, t) = E_{x, T-t}(\varphi(X_T) Y_T + Z_T), \quad (19)$$

где $E_{x, T-t}$ — математическое ожидание относительно вероятностной меры $P_{x, T-t}$, соответствующей случайному процессу, стартующему в момент времени $T - t$ из точки x , т.е. $X_{T-t} = x$.

Приближенные значения $u^{(m)}(x, t)$ можно получить методом Монте-Карло путем статистического моделирования траекторий системы СДУ (15)–(18). Для этой цели в работах [1], [6] предлагалось использовать метод Эйлера. Моделирование траекторий методом Эйлера для СДУ (15)–(18) осуществляется по следующей схеме

$$X_{i+1}^\Delta = x_i + \sqrt{h} \sigma_i \xi_i + h \mathbf{a}_i, \quad (20)$$

$$x_{i+1} = X_{i+1}^\Delta + (\Delta_{i+1} K) n_i \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}}(X_{i+1}^\Delta), \quad (21)$$

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + (\alpha_1)_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K + (\alpha_2)_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K \right), \quad (22)$$

$$z_{i+1} = z_i + y_i (\alpha_1)_i (\psi_1)_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K + y_i (\alpha_1)_i (\psi_1)_i \chi_{\partial G}(x_i) \Delta_{i+1} K, \quad (23)$$

$$k_{i+1} = k_i + \Delta_{i+1} K, \quad (24)$$

где $i, i + 1$ — номера узлов сетки; ξ_i — вектор трех независимых $N(0, 1)$ случайных величин; $\Delta_{i+1} K = d(X_{i+1}^\Delta)$ — расстояние от X_{i+1}^Δ до ∂G в случае выхода X_{i+1}^Δ из области.

4 Применение методов Эйлера и случайного блуждания по движущимся сферам

Поскольку в работе предполагается, что теплофизические свойства материалов, из которых состоит сотовая панель, являются постоянными величинами, то движение случайного процесса X в однородной среде, соответствующей каркасу или ячейке, с точностью до постоянного множителя совпадает с движением винеровского процесса. Известно, что точка первого выхода из шара винеровского процесса, начинающего движение из центра этого шара, имеет на границе этого шара равномерное распределение. При этом эта точка не зависит от времени первого выхода на границу.

В связи с этим предлагается для ускорения моделирования траекторий СДУ (15)–(18) при их прохождении внутри ячейки использовать случайное блуждание по сферам, а движение по каркасу моделировать с

помощью метода Эйлера с малым шагом. В работе [9] для решения стационарного диффузионного уравнения, был предложен алгоритм, в котором реализована комбинация блуждания по сферам в области и метода Эйлера вблизи границы.

При решении нестационарных задач методом блуждания по сферам требуется каждый раз моделировать не только точку первого выхода из шара, но и время первого выхода. Для моделирования времени первого выхода из шара радиуса R в работе используется определение времени первого достижения уровня R бesselевским процессом, который является решением СДУ [10]

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_r^{-1} dr + W_t. \quad (25)$$

Одномерный случайный процесс (25) получается в результате применения формулы Ито к евклидовой норме трехмерного винеровского процесса, начинающего движение из точки $x \in G$. При этом выполняется равенство $S_0 = \|x\|$.

Время первого выхода трехмерного винеровского процесса из шара радиуса R и время первого достижения случайным процессом уровня R имеют одинаковое распределение. Известны явные формулы для плотности времени первого достижения бesselевским процессом заданного уровня для начальных точек $S_0 = 0$ и $S_0 > 0$ [2]. Но они представляются в виде рядов, содержащих функции Бесселя первого рода и их положительные нули, и поэтому численно-статистическое моделирование по ним крайне затруднительно. С другой стороны, вместо заданного уровня, который требуется достичь, можно подобрать некоторые кривые, зависящие от t , такие, что получаются достаточно простые и удобные для моделирования формулы для плотности времени первого достижения бesselевским процессом этих кривых.

Каждая такая кривая определяется задаваемой положительной сигма-конечной мерой G . Определим функцию

$$r(t, x) \equiv q(t, 0, x) - \frac{1}{a} \int_0^\infty q(t, y, x) G(dy), \quad (26)$$

где $q(t, y, x)$ — плотность вероятности перехода бesselевского процесса, a — числовой параметр. Из свойства плотности q следует, что функции q и r удовлетворяют параболическому уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} v \right). \quad (27)$$

Пусть функция $g(t)$ такая, что на кривой $x = g(t)$ выполняется равенство $r(t, x) = 0$. Тогда эту кривую можно рассматривать в качестве граничного условия к уравнению (27). Причем, с учетом того, что бesselевский процесс стартует из заданной точки, решение полученной краевой задачи определяется единственным образом. Обозначим τ_g время достижения бesselевским процессом этой подвижной границы, т.е. $\tau_g = \inf\{t > 0, S_t = g(t)\}$.

Можно показать [2], что плотность времени достижения границы $x = g(t) = 0$ удовлетворяет уравнению

$$p_g(t) = -\frac{d}{dt} \left(\int_0^{g(t)} r(t, x) dx \right). \quad (28)$$

Если положить $G(dy) = y^2 dy$, то $g(t)$ и $p_g(t)$ определяются по формулам [2]:

$$g(t) = \left(2t \ln \left(\frac{a}{\Gamma(\frac{3}{2}) t^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_g(t) = \frac{g^3(t)}{2at}. \quad (29)$$

В этом случае получается простая формула для моделирования τ_g

$$\tau_g = \left(\frac{a}{\Gamma(\frac{3}{2}) \sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} e^{-H}, \quad (30)$$

где H — гамма распределенная случайная величина с параметрами $\frac{5}{2}, \frac{2}{3}$.

В ходе вычислений, после того как получено значение τ_g , радиус сферы для определения очередной точки положения случайного процесса определяется по первой формуле в (29). Выбор параметра a дает возможность определить радиусы моделируемых шаров так, чтобы они не выходили за границы текущей ячейки и чтобы они не были слишком малы. В случае, если расстояние до границы ячейки менее некоторой заданной величины ε , то производятся вычисления, соответствующие шагу метода Эйлера.

Были проведены расчеты температуры в сотовой панели с использованием реальных данных физического эксперимента. Результаты расчетов показали, что применение метода блуждания по движущимся сферам в сочетании с методом Эйлера для сотовой панели с такими физическими характеристиками, какие были в эксперименте, дает примерно стократное увеличение скорости счета по сравнению с использованием только одного метода Эйлера.

Заключение

В работе предложен численно-статистический метод для оценки теплового состояния теплозащитных конструкций сотового типа. Данный метод основан на вероятностном представлении краевой задачи для параболического уравнения и комбинированном применении методов Эйлера и случайного блуждания по движущимся сферам. Получено значительное ускорение счета по сравнению с моделированием траекторий только одним методом Эйлера.

Список литературы

- [1] Gusev S.A., Nikolaev V.N. Calculation of heat transfer in heterogeneous structures such as honeycomb by using numerical solution of stochastic differential equations // Advanced Materials Research. 2014. V. 1016, P. 758–763.
- [2] Deaconu M., Herrmann S. Hitting time for the Bessel processes - walk on moving spheres algorithm (WOMS) // The Annals of Applied Probability 2013, Vol. 23, No. 6, P.2259–2289.
- [3] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
- [4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, Изд. 3-е, 1988.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [6] Гусев С.А. Применение СДУ к оценке решения уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск.— 2015.— Т.18, №2.— С. 147–161.
- [7] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982.
- [8] Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений.— М. Наука, 1985.
- [9] Бурмистров А.В., Михайлов Г.А. Вычисление производных от решения стационарного диффузионного уравнения методом Монте-Карло // ЖВМ и МФ.— 2003 , Т.43, №10, С. 1517–1529.
- [10] Revuz, D. Yor, M. Continuous Martingales and Brownian Motion. 3ed., Springer 1999.

*Сергей Анатольевич Гусев — д.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; доцент Новосибирского государственного технического университета;
e-mail: sag@osmf.sgcc.ru;*

*Владимир Николаевич Николаев — д.т.н., главный научный сотрудник Сибирского научно-исследовательского института авиации имени С. А. Чаплыгина;
e-mail: nikola50@mail.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.