

# ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

Н. С. Новиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 517.968

В работе рассматривается коэффициентная обратная задача для системы динамических уравнений теории упругости, в предположении, что искомые коэффициенты (параметры Ламе и плотность среды) изменяются только с глубиной, что соответствует горизонтально-слоистым моделям сред. Для решения этой задачи используется метод Гельфанда — Левитана — Крейна во временной области, что позволяет свести задачу к решению нескольких семейств линейных интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** обратные задачи, интегральные уравнения.

## Введение

Предметом рассмотрения данной работы является коэффициентная обратная задача для системы динамических уравнений теории упругости. В общем случае задачи подобного рода заключаются в определении плотности и модулей упругости, являющихся коэффициентами системы дифференциальных уравнений нестационарной линейной теории упругости, если известна дополнительная информация о решении такой системы. В рассматриваемом здесь изотропном случае модули упругости выражаются через параметры Ламе, и задача, тем самым, заключается в определении этих двух параметров и плотности среды. Различные постановки обратных задач динамической теории упругости рассматривались в работах А.С. Благовещенского, В.Г. Романова, Ю.Е. Аниконова и других авторов [17, 20–22, 24]. Поскольку эта система уравнений соответствует моделированию распространения в среде упругих волн, а коэффициенты этих уравнений (параметры Ламе и плотность среды) связаны со свойствами среды и на практике являются неизвестными, то разработка методов решения подобных задач представляет большой интерес.

В настоящее время существуют различные методы решения подобных задач, хотя наиболее популярна ситуация, когда соответствующая математическая модель строится на уравнении акустики. К числу распространённых алгоритмов можно отнести кинематические методы, лучевую сейсмическую томографию, методы, основанные на линеаризации задачи. Подробный обзор этих алгоритмов можно найти, например, в работе [4]. Отдельно стоит отметить метод полного обращения волновых полей [1, 3] (full waveform inversion), один из наиболее популярных на сегодняшний день подходов.

Данная работа посвящена методу И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна. Одной из основных его особенностей является тот факт, что метод не требует многократного прямого моделирования. Эти характеристики позволяют рассматривать метод Гельфанда — Левитана как инструмент для разработки средств первичной обработки сейсмических наблюдений и получения первого приближения для искомых параметров. С различными результатами, связанными с методом, а также с кратким обзором других алгоритмов, относящихся к классу прямых методов, можно ознакомиться в работах [6, 9–13]. Различные варианты численных алгоритмов можно найти в [5, 7, 8, 14]. Что касается использования подхода Гельфанда-Левитана-Крейна для решения задач сейсмики и теории упругости, то необходимо отметить работы А.С. Алексеева, М.Н. Бородаевой, В.Г. Яхно, В.С. Белоносова. [2, 15, 16, 18, 19, 23].

# 1 Постановка задачи

Рассмотрим полупространство  $z \geq 0$  декартовой системы координат  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , заполненное упругой средой. В случае изотропной среды общая система динамических уравнений теории упругости, описывающая распространение упругих волн в среде, выглядит следующим образом [15]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U} + \text{grad} \lambda \text{div} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^3 \text{grad} \mu \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \text{grad} U_{x_i} \right) \mathbf{e}_i; \quad (1)$$

Данная система описывает распространение сейсмических волн в пространстве, заполненном упругой средой. Здесь  $\mathbf{e}_i$  — орт соответствующей координатной оси  $x_i$ ,  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ,  $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)^T$  — вектор смещения точек среды. Упругие свойства среды заданы параметрами Ламе  $\lambda, \mu$ , а также плотностью среды  $\rho$ . Отметим, что зачастую в задачах сейсмологии вместо параметров Ламе рассматриваются скорости распространения продольных и поперечных волн:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что параметры среды меняются только при изменении глубины:  $\lambda = \lambda(z), \mu = \mu(z), \rho = \rho(z)$ . В этом случае система (1) сводится к следующей системе уравнений:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left( \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \mu \left( \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}; \quad (5)$$

Далее, будем предполагать, что среда находится в состоянии покоя до момента приложения нагрузки:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (6)$$

Для определения параметров среды на границе  $z = 0$  с помощью взрывов или ударных воздействий реализуют следующие граничные условия:

$$\sigma_z|_{z=0} = \lambda_0 \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2\mu_0 \frac{\partial U_z}{\partial z} = g_1(x, y, t); \quad (7)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu_0 \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = g_2(x, y, t); \quad (8)$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = \mu_0 \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = g_3(x, y, t); \quad (9)$$

Здесь предполагается, что значения параметров среды  $\lambda_0, \mu_0, \rho_0 = \lambda, \mu, \rho|_{z=0}$  на поверхности являются известными. Приложенная нагрузка вызывает в среде волновой процесс, который регистрируется расположенными на поверхности  $z = 0$  приёмниками:

$$U_x(x, y, 0, t) = f_1(x, y, t); \quad U_y(x, y, 0, t) = f_2(x, y, t); \quad U_z(x, y, 0, t) = f_3(x, y, t) \quad (10)$$

Таким образом, одномерная обратная задача сейсмологии заключается в определении параметров  $\lambda(z), \mu(z)$  (что эквивалентно определению скоростей продольных и поперечных волн  $v_p(z), v_s(z)$ ) и плотности  $\rho$  среды с помощью одного или нескольких экспериментов, описываемых соотношениями (4)–(10).

## 2 Определение скорости поперечных волн и плотности среды

Предположим теперь, что поверхностный момент сил, приложенных к границе  $z = 0$  удовлетворяет после перехода к цилиндрической системе координат  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctg(\frac{y}{x})$  следующим условиям:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \tau_{\theta z} = a(t)b(r).$$

В таком случае, как показано А.С. Алексеевым [16], в среде возникают волны типа SH, вектор смещений  $\mathbf{U}(r, z, \theta, t)$  которых состоит только из компоненты  $U_\theta$  соответствующей координате  $\theta$ , при этом  $U_\theta = U_\theta(r, z, t)$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} + \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\mu(z)} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \quad (11)$$

а также следующим начальным и краевым соотношениям:

$$U_\theta|_{t < 0} \equiv 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} a(t)b(r). \quad (13)$$

В дальнейшем будем считать, что значение компоненты  $U_\theta(r, z, t)$  при  $z = 0$  есть некоторая известная функция  $\hat{f}(r, t)$ . Кроме того, выберем функции  $a(t), b(r)$  следующим образом:

$$a(t) = \delta(t), \quad b(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k^2 J_1(kr) dk = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\delta(r)}{r} \right].$$

Имеет место соотношение:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty b(r) r^2 dr = 1,$$

в силу чего условие (13) соответствует поверхностному моменту вращения интенсивности  $\delta(t)$ . Далее, положим

$$U_\theta(r, z, t) = \int_0^\infty U(z, t; k) J_1(kr) k^2 dk, \quad (14)$$

При этом в силу формул обращения преобразования Ханкеля

$$U(z, t; k) = \int_0^\infty U_\theta(r, z, t) J_1(kr) \frac{r}{k} dk, \quad (15)$$

Используя преобразование Ханкеля, обратная задача для системы (11)–(13) сводится к следующему однопараметрическому семейству задач относительно функций  $U(z, t; k)$ :

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} - k^2 U; \quad (16)$$

$$U(z, t; k)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \delta(t); \quad (18)$$

$$U(z, t; k)|_{z=0} = f_k(t). \quad (19)$$

Здесь, как и раньше,  $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  — скорость поперечных волн. Перейдём теперь от переменной  $z$  к переменной  $x$ , используя преобразование годографа:

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{v_s(\xi)}$$

В переменных  $x, t$  задача (16)–(19) может быть переписана следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \frac{\partial U}{\partial x} - k^2 v_s^2 U; \quad (20)$$

$$U(x, t; k)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \delta(t); \quad (22)$$

$$U(x, t; k)|_{x=0} = f_k(t). \quad (23)$$

Здесь  $\sigma(x) = \sqrt{\mu\rho}$ . При  $k = 0$  уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \frac{\partial U}{\partial x}$$

Тем самым система (20)–(23) сводится к обратной задаче для уравнения акустики. Используя метод Гельфанда — Левитана — Крейна для решения задачи (20)–(23), можно свести задачу к уравнению М.Г. Крейна [11, 12]:

$$-2f_0(+0)V(x, t) - \int_{-x}^x V(x, s)f_0'(t-s)ds = 1, t \in (-x, x) \quad (24)$$

Уравнение (24) при каждом фиксированном значении параметра  $x$  является линейным интегральным уравнением второго рода. Решив это семейство уравнений и вычислив функцию  $V(x, t)$ , можно восстановить  $\sigma(x)$  может быть вычислена по формуле:

$$\sigma(x) = \frac{V(0, 0)}{2V^2(x, x)}.$$

Будем теперь считать, что функция  $\sigma(x)$  является известной. Зафиксируем  $k \neq 0$  и сделаем ещё одну замену, перейдя от функции  $U(x, t; k)$  к функции  $V$ , связанной с  $U$  следующим равенством:

$$U(x, t; k) = V(x, t; k) \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)} \frac{4\pi\sigma_0}{v_s(0)}}.$$

Введём теперь функцию

$$q(x; k) = k^2 v_s^2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2. \quad (25)$$

Тогда функция  $V(x, t; k)$  удовлетворяет следующей системе соотношений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x; k)U; \quad (26)$$

$$U(x, t; k)|_{t < 0} \equiv 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = \delta(t); \quad (28)$$

$$U(x, t; k)|_{x=0} = \hat{f}_k(t). \quad (29)$$

Как показано в работе В.Г. Романова [25], решение обратной задачи (26)–(29) эквивалентно решению уравнения Гельфанда — Левитана:

$$\tilde{w}_k(x, t) + \int_{-x}^x \hat{f}_k'(t-\tau) \tilde{w}_k(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [\hat{f}_k'(t-x) + \hat{f}_k'(t+x)], \quad x > 0, t \in (-x, x). \quad (30)$$

При этом решение  $\tilde{w}(x, t)$  связано с  $q(x)$  следующим соотношением:

$$q(x; k) = 4 \frac{d}{dx} w_k(x, x-0)$$

Если функции  $q(x)$  и  $\sigma(x)$  известны, то соотношение (25) позволяет восстановить скорость поперечных волн в координатах годографа  $v_s(x)$ . Далее, знание функций  $\sigma(x) = \sqrt{\mu\rho}$  и  $v_s(x) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  позволяет вычислить плотность среды  $\rho(x)$ . Кроме того, используя значения скорости поперечных волн, можно обратить преобразование годографа и перейти от переменной  $x$  к исходной переменной  $z$ :

$$z = \int_0^x v_s(\xi) d\xi$$

### 3 Определение скорости продольных волн.

Будем теперь считать, что после использования результатов раздела 2 нам известны значения функций  $v_s(z), \rho(z)$  (что равносильно знанию  $\mu(z), \rho(z)$  — двух из трёх параметров Ламе), то для получения полной информации о строении среды необходимо вычислить последний неизвестный параметр Ламе  $\lambda(z)$ , или скорость распространения продольных волн  $v_p(z)$ . Для этого А.С. Алексеевым был предложен эксперимент, основанный на воздействии на среду источника вида нормальной сосредоточенной силы интенсивности  $\delta(t)$  [16] (отметим, что аналогичный метод был также предложен А.С. Благовещенским в [24]):

$$\sigma_z|_{z=0} = \lambda_0 \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + 2\mu_0 \frac{\partial U_z}{\partial z} = \delta(x)\delta(y)\delta(t); \quad (31)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \mu_0 \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = 0; \quad (32)$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = \mu_0 \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = 0; \quad (33)$$

В этом случае, как показано в [16], система уравнений теории упругости (1) сводится, с учетом симметрии среды и источника колебаний, к следующему уравнению:

$$\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial(\ln(\lambda + 2\mu))}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (34)$$

Здесь функция  $W(x, t)$  связана с компонентами вектора смещений следующим образом:

$$W(x, t) = \iint U_z(x, y, z, t) dx dy$$

При этом остальные моменты остальных компонент вектора смещений равны нулю в силу симметричности задачи:

$$U(x, t) = \iint U_x(x, y, z, t) dx dy = 0, \quad V(x, t) = \iint U_y(x, y, z, t) dx dy = 0.$$

При этом граничное условие (31) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial W}{\partial z}|_{z=0} = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \delta(t) \quad (35)$$

Начальные данные имеют вид

$$W|_{t=0} = \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (36)$$

Данные обратной задачи получены в результате измерения на поверхности  $z = 0$  компонент смещения и могут быть переписаны в следующем виде:

$$W(0, t) = \iint U_z(x, y, 0, t) dx dy = G(t) \quad (37)$$

Соотношения (34)–(37) образуют обратную задачу, целью которой является восстановление скорости продольных волн

$$v_p(x) = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Для решения этой задачи применим, также, как и в случае определения скорости поперечных волн, преобразование годографа и перейдем к переменной

$$y = \int_0^z \frac{d\xi}{v_p(\xi)} \quad (38)$$

Задача после данной замены принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial \ln \sigma_p(y)}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y}; \\ W|_{t < 0} &\equiv 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0} &= \frac{1}{\sigma_{0p}} \delta(t), \\ W|_{y=0} &= G(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь неизвестной является функция  $\sigma_p(y) = \rho(y)v_p(y)$ . Формулировка задачи (39) с точностью до умножения на постоянную совпадает с обратной задачей (20)–(23), что позволяет аналогичным образом свести её к решению семейства интегральных уравнений М.Г. Крейна:

$$-2f_0(+0)V_p(x, t) - \int_{-x}^x V_p(x, s)G'(t-s)ds = 1, t \in (-x, x) \quad (40)$$

Функция  $\sigma_p(y)$  при этом вычисляется на основе соотношения, аналогичного (2).

Далее, вычислив значения функции  $\sigma_p(y)$ , можно, в предположении, что значения плотности среды известны, восстановить скорость продольных волн  $v_p(z)$  в исходных переменных. Для этого нужно воспользоваться следующим соотношением, вытекающим из (38):

$$\frac{dy}{\sigma_p(y)} = \rho(z)dz \quad (41)$$

Тем самым описанная методика позволяет получить всю информацию об упругом строении среды в одномерном случае.

## Заключение

В работе предложен алгоритм решения одномерной обратной задачи теории упругости на основе метода Гелфанда — Левитана — Крейна во временной области. Переопределённость постановки позволяет свести исходную нелинейную обратную задачу сводится к решению линейных интегральных уравнений (24), (30), (40). В отличие от аналогичных подходов в частотной области, предложенный метод отражает локальную зависимость параметров среды от данных обратной задачи. Результаты численных расчётов на основе предложенного алгоритма будут опубликованы позднее.

## Список литературы

- [1] Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Cambridge University Pr.; 2005.
- [2] Belonosov V.S., Skazka V.V. The inverse dynamic problem of seismic sounding low-frequency regularization. Applied Mathematics Letters, 21(1), pp. 95-100, 2008
- [3] Fichtner A. Full seismic waveform modelling and inversion. Springer Science & Business Media; 2010
- [4] Аникиев Д. В. и др. Методы обращения сейсмических волновых полей // Seismic Technology. — 2014. — Т. 11. — №. 1. — С. 38–58.

- [5] Kabanikhin, S.I., Novikov, N.S., Oseledets, I.V., Shishlenin, M.A. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // (2015) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23 (6), pp. 687–700.
- [6] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Two-dimensional analogs of the equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko // (2015) *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 3 (2), pp. 70–99.
- [7] Kabanikhin, S.I., Sabelfeld, K.K., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A. Numerical solution of the multidimensional Gelfand-Levitan equation // (2015) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23 (5), pp. 439–450.
- [8] Kabanikhin, S.I., Sabelfeld, K.K., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods. // (2015) *Monte Carlo Methods and Applications*, 21 (3), pp. 189–203.
- [9] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation // (2011) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 18 (9), pp. 979–995.
- [10] Kabanikhin, S., Shishlenin, M. Quasi-solution in inverse coefficient problems // (2008) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 16 (7), pp. 705–713.
- [11] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem // (2004) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 12 (2), pp. 125–144.
- [12] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Comparative analysis of boundary control and Gel'fand-Levitan methods of solving inverse acoustic problem // (2003) *Inverse Problems in Engineering Mechanics IV*, pp. 503–512.
- [13] Kabanikhin, S.I., Scherzer, O., Shishlenin, M.A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // (2003) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 11 (1), pp. 87–109.
- [14] Н.С. Новиков, Сравнительный анализ численных методов решения двумерного аналога уравнения Гельфанда — Левитана // *Сибирские электронные математические известия, Труды 5-й международной молодёжной научной школы — конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"* с. 132–144, 2014
- [15] Алексеев А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // *Изв. АН СССР. Сер. геофизика*, 11–12 (1962), с. 65–72
- [16] Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии // *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных*, 1967, стр. 9–84, Москва.
- [17] Яхно В.Г. Линеаризованная обратная задача Лэмба // *Доклады АН СССР*, 276(2), стр. 314–318, 1984
- [18] Яхно В.Г., Одномерные обратные динамические задачи для анизотропных упругих сред // *ВЦ СО АН СССР*, 1985, Новосибирск.
- [19] Бородаева Н.М. О численном решении одномерной динамической задачи сейсмологии // *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных*, 1967, с. 85–91, Москва.
- [20] Романов В.Г. Обратная задача Лэмба в линейном приближении // *Численные методы в сейсмических исследованиях*, 1983, с. 170–192, Новосибирск.
- [21] Аниконов Ю.Е., Москвитин В.Н. Об одной задаче для системы динамических уравнений теории упругости // *Доклады АН СССР*, 253(5), стр. 1086–1087, 1980.
- [22] Волкова Е.А. Об одной одномерной обратной задаче для системы уравнений теории упругости анизотропных сред // *Препринт №330*, Новосибирск, 1981.
- [23] Белоносова А.В., Белоносов В.С. Прямые и обратные задачи акустического зондирования дна водоемов // *Сибирские электронные математические известия*, Т. 10, с. 10–15, 2013.
- [24] Благовещенский А.С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // *Проблемы мат. физики*, Т. 1, с. 68–81, 1966.

- [25] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва, Наука, 1984.

*Никита Сергеевич Новиков — м.н.с. Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;  
e-mail: novikov-1989@yandex.ru.*

*Дата поступления — 1 сентября 2017 г.*