

РАЗРАБОТКА РОБАСТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Екатеринбург

УДК 519.63

На множестве \bar{G} , где $G = (0 < x \leq d] \times (0 < t \leq T]$, рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим параметром ε при пространственной производной; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности боковой границы S^l появляется *пограничный слой* — узкая подобласть ширины $\mathcal{O}(\varepsilon)$, на которой решение задачи изменяется на конечную величину. Для такой задачи стандартная разностная схема на равномерной сетке не сходится ε -равномерно в равномерной норме; сходимости имеет место лишь при условии $h \ll \varepsilon$, где h — шаг сетки по x . Для исследуемой задачи строится робастная разностная схема на специальной сетке \bar{G}_h^s — кусочно-равномерной по x (сгущающейся в окрестности пограничного слоя) и равномерной по t , сходящаяся ε -равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} + N_0^{-1})$, где $N+1$ и N_0+1 — число узлов сеток по x и t соответственно. Приводятся результаты численных экспериментов, согласующиеся с теоретическими.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение переноса, пограничный слой, декомпозиция решения, стандартная разностная схема, равномерная сетка, робастная разностная схема, кусочно-равномерная сетка, равномерная норма, априорные оценки.

Введение

Моделирование процессов тепло-массообмена, когда скорость переноса субстанции становится достаточно малой, приводит к *сингулярно возмущенным задачам для уравнения переноса*. В настоящее время в школах Г.И. Марчука, А.А. Самарского, Н.Н. Калиткина разработан ряд подходов к построению высокоэффективных численных методов решения задач для регулярных уравнений переноса (см., например, [1], [2], [3] и библиогр. там). Численные методы для сингулярно возмущенных уравнений переноса ранее не рассматривались. В настоящей работе для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим параметром ε при пространственной производной, $\varepsilon \in (0, 1]$, на основе подходов из [4], [5], с использованием специальной кусочно-равномерной сетки, известной в литературе как сетка Шишкина [6], разрабатывается робастная разностная схема — схема, сходящаяся ε -равномерно в равномерной норме.

1 Постановка задачи. Цель работы

На множестве

$$\bar{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0, T], \quad D = (0, d], \quad (1)$$

где $S = S_0 \cup S^l$, S_0 и S^l — нижняя и боковая части границы S , $S_0 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq d, t = 0\}$, $S^l = \{(x, t) : x = 0, 0 < t \leq T\}$, причем, $d, T \sim \mathcal{O}(1)$, рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения переноса

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in G, \\ u(x, t) &= \varphi(x, t), & (x, t) \in S. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$L = \varepsilon b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x, t) + p(x, t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad (x, t) \in G,$$

функции $b(x, t)$, $c(x, t)$, $p(x, t)$, $f(x, t)$ предполагаются достаточно гладкими на \bar{G} , функция $\varphi(x, t)$, $(x, t) \in S$, достаточно гладкая на множествах S_0 и \bar{S}^l , непрерывна на S , причем,¹

$$b_0 \leq b(x, t) \leq b^0, \quad 0 \leq c(x, t) \leq c^0, \quad p_0 \leq p(x, t) \leq p^0, \quad (3)$$

$$|f(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \bar{G}; \quad |\varphi(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in S; \quad b_0, p_0 > 0;$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. Пусть данные задачи (2) на множестве $S^c = S_0 \cap \bar{S}^l$ — угловой точке, удовлетворяют *условиям согласования*, обеспечивающим гладкость решения на \bar{G} .

В решении задачи (2) при малых значениях параметра ε появляется *пограничный слой* в окрестности множества \bar{S}^l .

Задачи для сингулярно возмущенных уравнений переноса, а также численные методы их решения ранее не рассматривались.

Наша цель: для задачи (2) построить разностную схему, сходящуюся ε -равномерно в равномерной норме.

2 Стандартная схема на равномерной сетке

На множестве \bar{G} введем прямоугольную сетку

$$\bar{G}_h = \bar{\omega} \times \bar{\omega}_0. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ — произвольные, вообще говоря, неравномерные сетки на отрезках $[0, d]$ и $[0, T]$ соответственно. Пусть $h^i = x^{i+1} - x^i$, $x^i, x^{i+1} \in \bar{\omega}$, $h = \max_i h^i$, и $\tau^k = t^{k+1} - t^k$, $t^k, t^{k+1} \in \bar{\omega}_0$, $\tau = \max_k \tau^k$. Предполагаем выполненным условие $h \leq M N^{-1}$, $\tau \leq M N_0^{-1}$, где $N+1$ и N_0+1 — число узлов сеток $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (2) аппроксимируем *стандартной разностной схемой* [1], [2]

$$\begin{aligned} \Lambda z(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in G_h, \\ z(x, t) &= \varphi(x, t), & (x, t) \in S_h. \end{aligned} \quad (5a)$$

Здесь

$$\Lambda \equiv \varepsilon b(x, t) \delta_{\bar{x}} + c(x, t) + p(x, t) \delta_{\bar{t}}, \quad (x, t) \in G_h, \quad (5b)$$

$G_h = G \cap \bar{G}_h$, $S_h = S \cap \bar{G}_h$, $\delta_{\bar{x}} z(x, t)$ и $\delta_{\bar{t}} z(x, t)$ — первые разностные производные назад по x и t .

$$\delta_{\bar{x}} z(x^i, t^k) = [z(x^i, t^k) - z(x^{i-1}, t^k)]/h^{i-1}, \quad \delta_{\bar{t}} z(x^i, t^k) = [z(x^i, t^k) - z(x^i, t^{k-1})]/\tau^{k-1}. \quad (5c)$$

Схема (5) монотонна ε -равномерно (определение монотонности разностных схем см., например, в [2]). Для схемы (5) справедлив *сеточный принцип максимума*.

В случае сеток $\bar{G}_{h(4)}$ с учетом априорных оценок (17) и соотношения для сингулярной компоненты (18) получаем оценку

$$\|u - z\| \leq M [(\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x, t) \in \bar{G}_{h(4)}. \quad (6)$$

На сетках \bar{G}_h^u , равномерных по x и t ,

$$\bar{G}_h = \bar{G}_h^u \equiv \bar{\omega} \times \bar{\omega}_0, \quad (7)$$

имеем оценку, подобную (6)

$$\|u - z\| \leq M [(\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x, t) \in \bar{G}_{h(7)}^u, \quad (8)$$

где $M_{(6)}$, $M_{(8)} = \mathcal{O}(1)$.

¹ Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε . В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

Т е о р е м а 1. Пусть для данных начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2) выполняется условие (3), а для решения задачи справедливы оценки Теоремы 3 при $K = 2$. Тогда для решения разностных схем (5), (4) и (5), (7) справедливы оценки (6) и (8) соответственно.

З а м е ч а н и е 1. Схемы (5), (4) и (5), (7) сходятся при неухудшаемом условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N_0^{-1} = o(1). \quad (9)$$

В соответствии с условием (9), для сходимости стандартных разностных схем (5), (4) и (5), (7) требуется использовать сетки по x с числом узлов, удовлетворяющим условию $N \gg \varepsilon^{-1}$, т.е. неограниченно растущим при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, стандартные схемы (5), (4) и (5), (7), сходящиеся при фиксированных значениях параметра ε , не сходятся ε -равномерно. \square

3 Специальная схема, сходящаяся ε -равномерно

На множестве \overline{G} введем “специальную” сетку

$$\overline{G}_h = \overline{G}_h^s = \overline{\omega}^s \times \overline{\omega}_0. \quad (10a)$$

Здесь $\overline{\omega}^s$ — кусочно-равномерная сетка² по x и $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка по t . При построении $\overline{\omega}_{(10)}^s$ отрезок $[0, d]$ разобьем на две части $[0, \sigma]$ и $[\sigma, d]$, на каждой из которых строим равномерные сетки с одинаковым числом интервалов равным $2^{-1} N$; величину N считаем четной. Величину σ задаем зависящей от параметра ε

$$\sigma = \sigma(\varepsilon; d, T) = \min [M_1 \varepsilon T, 2^{-1} d], \quad M_1 = M_1(18). \quad (10b)$$

Таким образом, шаги сетки $\overline{\omega}_{(10)}^s$ определяются соотношениями

$$h_1 = 2\sigma N^{-1}, \quad x \in [0, \sigma]; \quad h_2 = 2(d - \sigma) N^{-1}, \quad x \in [\sigma, d]. \quad (10c)$$

При не слишком малых значениях параметра ε , а именно, при условии $\varepsilon \geq 2^{-1} M_1^{-1} T^{-1} d$, сетка $\overline{G}_{h(10)}$ становится равномерной.

Для решения разностной схемы (5), (10) с учетом априорных оценок (17) и соотношений для сингулярной компоненты (18) с использованием сеточного принципа максимума получаем оценку

$$\|u - z\| \leq M [N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x, t) \in \overline{G}_{h(10)}. \quad (11)$$

Таким образом, разностная схема (5), (10) — стандартная схема на кусочно-равномерной сетке, сходится ε -равномерно с первым порядком точности по x и t .

Т е о р е м а 2. Пусть для решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2) выполняются априорные оценки (17), а также условие (18) для сингулярной компоненты решения из Теоремы 4. Тогда решение разностной схемы (5), (10) сходится ε -равномерно с первым порядком точности по x и t с оценкой (11).

4 Априорные оценки решений и производных

Приведем априорные оценки решения задачи (2) и его компонент, используемые при построении разностных схем и обосновании ε -равномерной сходимости сеточного решения.

4.1 Принцип максимума

Для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2) справедлив принцип максимума, подобный принципу максимума для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения [4], [5].

Т е о р е м а 3. Пусть для данных начально-краевой задачи для уравнения переноса (2) выполняется условие $Lu(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in G$; $u(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in S$. Тогда для функции $u(x, t)$ справедлива оценка $u(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{G}$.

² Кусочно-равномерная сетка $\overline{\omega}^s$ известна в литературе по численным методам для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических задач как “Shishkin mesh”.

4.2 Стандартные априорные оценки

Приведем “стандартные априорные оценки” для решения сингулярно возмущенного уравнения переноса (2). При не слишком малых значениях ε эта задача подобна регулярной задаче, рассмотренной в [3].

Предполагаем, что производные $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, 0)$, $\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} \varphi(0, t)$ ограничены при $k, k_0 \leq 2$, причем, в угловой точке $(x, t) = (0, 0)$ выполняются условия согласования, обеспечивающие требуемую непрерывность решения на \bar{G} и его производных по x и t до второго порядка

$$u \in C^{k, k_0}(\bar{G}), \quad k + k_0 \leq 2. \quad (12)$$

Для решения задачи (2) получаем “стандартную оценку”

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x, t) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad (x, t) \in \bar{G}, \quad k + k_0 \leq 2. \quad (13)$$

4.3 Улучшенные априорные оценки

Вывод “улучшенных оценок” с учетом поведения решения в окрестности пограничного слоя подобен выводу оценок для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии в [4], [5].

Решение задачи (2) представим в виде *декомпозиции*³

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (x, t) \in \bar{G}, \quad (14)$$

где компоненты $U(x, t)$ и $V(x, t)$ — *регулярная и сингулярная компоненты* решения. Здесь $U(x, t) = U^e(x, t)$, $(x, t) \in \bar{G}$, есть сужение на \bar{G} функции $U^e(x, t)$, $(x, t) \in \bar{G}^e$, являющейся решением расширенной задачи

$$\begin{aligned} L^e U^e(x, t) &= f^e(x, t), \quad (x, t) \in G^e, \\ U^e(x, t) &= \varphi^e(x, t), \quad (x, t) \in S^e, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{G}^e = [-d^*, d] \times [0, T]$ — продолжение \bar{G} за боковую границу S^l , оператор L^e и функции $f^e(x, t)$ и $\varphi^e(x, t)$ — расширения оператора L на множество \bar{G}^e и функций $f(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ на множества \bar{G}^e и S^e соответственно с сохранением свойств данных задачи (2).

Сингулярная компонента $V(x, t)$ — решение задачи

$$L V(x, t) = 0, \quad (x, t) \in G, \quad (16)$$

$$V(x, t) = \varphi^l(x, t), \quad (x, t) \in S^l, \quad V(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_0,$$

где $\varphi^l(x, t) = \varphi(x, t) - U^e(x, t)$, $(x, t) \in S^l$.

Для компонент $U(x, t)$ и $V(x, t)$, $(x, t) \in \bar{G}$, справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U(x, t) \right| \leq M, \quad (17a)$$

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x, t) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad (x, t) \in \bar{G}, \quad k + k_0 \leq 2, \quad (17b)$$

причем,

$$V(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \bar{G} \quad \text{при } x \geq M_1 \varepsilon t, \quad (18)$$

где $M_1 \geq \max_{\bar{G}} [b(x, t) p^{-1}(x, t)]$.

Т е о р е м а 4. Пусть для данных начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2) выполняется условие $b, c, p, \in C^{k, k_0}(\bar{G})$, $f \in C^{k, k_0}(\bar{G})$, $\varphi(\cdot, 0) \in C^2(S_0)$, $\varphi(0, \cdot) \in C^2(\bar{S}^l)$, $k, k_0 \leq 2$, $k + k_0 \leq 2$. Тогда для решения $u(x, t)$ начально-краевой задачи и его компонент $U(x, t)$ и $V(x, t)$ из представления (14) справедливы оценки (17), где $k, k_0 \leq 2$, $k + k_0 \leq 2$; для сингулярной компоненты $V(x, t)$ справедливо соотношение (18).

³ Декомпозиция решения $u(x, t)$ в виде суммы (14) регулярной и сингулярной компонент известна в литературе по численным методам для сингулярно возмущенных эллиптических и параболических задач, как “Shishkin decomposition”.

5 Численное исследование модельной задачи

В этом разделе мы проведем численное исследование модельной начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

В качестве модельной задачи рассмотрим упрощенную начально-краевую задачу (2), (1) на множестве $\bar{G}_{(1)}$ при $d = T = 1$ для следующего сингулярно возмущенного уравнения переноса:

$$\begin{aligned} L u(x, t) \equiv \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) &= f(x, t), \quad (x, t) \in G, \\ u(x, t) &= \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S. \end{aligned} \quad (19a)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \varepsilon x - 2^{-1} t, \quad (x, t) \in G, \\ \varphi(x, t) &= \begin{cases} \varphi(0, t) = -2^{-2} t^2 + t^3, & x = 0, \quad 0 < t \leq 1 \\ \varphi(x, 0) = 2^{-1} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \quad t = 0 \end{cases}, \quad (x, t) \in S, \end{aligned} \quad (19b)$$

Решение модельной задачи (19) представим в виде декомпозиции

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (20)$$

в которой регулярная компонента $U(x, t)$ и сингулярная компонента $V(x, t)$ определяются соотношениями

$$U(x, t) = 2^{-1}(x^2 - 2^{-1}t^2), \quad (x, t) \in G; \quad (21)$$

$$V(x, t) = \begin{cases} -(\varepsilon^{-1} x - t)^3, & 0 \leq x < \varepsilon t \\ 0, & \varepsilon t \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (x, t) \in \bar{G}. \quad (22)$$

Таким образом, мы имеем явное точное решение $u(x, t)$ модельной задачи.

Модельную задачу (19) аппроксимируем на сетке $\bar{G}_h = \bar{G}_{h(4)}$ стандартной разностной схемой

$$(\varepsilon \delta_{\bar{x}} + \delta_{\bar{t}}) z(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G_h, \quad z(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S_h. \quad (23)$$

Нас интересуют ошибки аппроксимации решения $u(x, t) = u(x, t; \varepsilon)$ модельной задачи (19) сеточным решением $z(x, t) = z(x, t; \varepsilon, N = N_0)$ схемы (23) в двух случаях, когда:

(1) используется сетка $^4 \bar{G}_h = \bar{G}_{h(\tau)}^u \equiv \bar{\omega} \times \bar{\omega}_0$, где сетки $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ — равномерные по x и t ,

(2) используется специальная сетка $\bar{G}_h = \bar{G}_{h(10)}^s \equiv \bar{\omega}^s \times \bar{\omega}_0$, где $\bar{\omega}^s$ — кусочно-равномерная сетка по x , а $\bar{\omega}_0$ — равномерная по t .

Для этого будем исследовать поведение величин

$$E(\varepsilon, N = N_0) = \max_{\bar{G}_h} |u(x, t; \varepsilon) - z(x, t; \varepsilon, N = N_0)|, \quad \bar{E}(N = N_0) = \bar{E}(N = N_0; u(\cdot)) = \max_{\varepsilon} E(\varepsilon, N = N_0)$$

в зависимости от значения параметра ε , $\varepsilon = 2^0 \div 2^{-14}$, при $N = N_0 = 2^2 \div 2^{12}$.

Случаю (1) соответствует Таблица 1, а случаю (2) — Таблица 2. Сеточные решения, соответствующие случаям (1) и (2) показаны на Рис. 1.

Из Таблицы 1 следует, что с ростом N , $N = N_0$, сеточное решение $z(x, t)$ стандартной схемы на равномерной сетке **сходится** к точному решению $u(x, t)$ лишь при **фиксированных значениях параметра ε** (выше выделенной диагонали), однако оно **не сходится ε -равномерно**.

Из Таблицы 2 следует, что с ростом N , $N = N_0$ сеточное решение $z(x, t)$ **специальной** разностной схемы на кусочно-равномерной сетке **сходится** к точному решению $u(x, t)$ **ε -равномерно**.

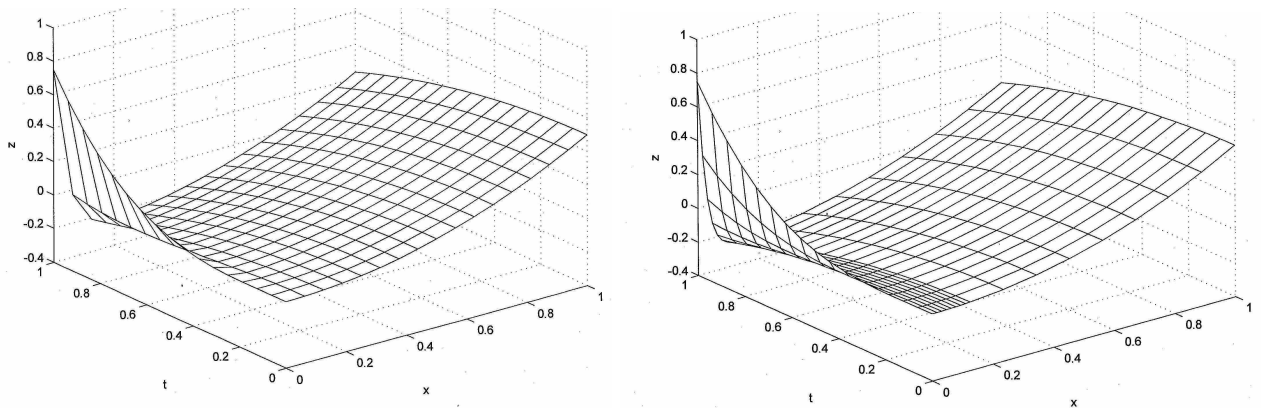
⁴ Запись $G_{(i)} (L_{(i)}, m_{(i)}, M_{(i)}, G_{h(i)})$ означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле (i).

Таблица 1: Ошибки $E(\varepsilon, N = N_0)$ решения стандартной схемы на равномерной сетке

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024	4096
1	2.832e-1	9.050e-2	2.467e-2	6.310e-3	1.586e-3	3.972e-4
2^{-2}	2.666e-1	1.661e-1	5.226e-2	1.407e-2	3.580e-3	8.990e-4
2^{-4}	5.463e-2	2.183e-1	1.450e-1	4.517e-2	1.208e-2	3.070e-3
2^{-6}	6.055e-2	5.326e-2	2.098e-1	1.403e-1	4.355e-2	1.162e-2
2^{-8}	6.201e-2	1.550e-2	5.781e-2	2.079e-1	1.391e-1	4.315e-2
2^{-10}	6.238e-2	1.559e-2	1.213e-2	5.907e-2	2.074e-1	1.388e-1
2^{-12}	6.247e-2	1.562e-2	3.904e-3	1.460e-2	5.939e-2	2.073e-1
2^{-14}	6.249e-2	1.562e-2	3.906e-3	2.956e-3	1.522e-2	5.947e-2
$\bar{E}(N)$	2.832e-1	2.183e-1	2.098e-1	2.079e-1	2.074e-1	2.073e-1

Таблица 2: Ошибки $E(\varepsilon, N = N_0)$ решения специальной схемы на кусочно-равномерной сетке

$\varepsilon \setminus N$	4	16	64	256	1024	4096
1	2.832e-1	9.050e-2	2.467e-2	6.310e-3	1.586e-3	3.972e-4
2^{-2}	2.666e-1	1.661e-1	5.226e-2	1.407e-2	3.580e-3	8.990e-4
2^{-4}	2.494e-1	1.627e-1	5.135e-2	1.384e-2	3.524e-3	8.849e-4
2^{-6}	2.482e-1	1.625e-1	5.129e-2	1.383e-2	3.520e-3	8.839e-4
...
2^{-14}	2.482e-1	1.625e-1	5.129e-2	1.383e-2	3.520e-3	8.839e-4
$\bar{E}(N)$	2.832e-1	1.661e-1	5.226e-2	1.407e-2	3.580e-3	8.990e-4

Рис. 1: Численные решения $z(x, t)$: слева — для стандартной схемы, $(x, t) \in \bar{G}_h(7)$, справа — для специальной схемы, $(x, t) \in \bar{G}_h(10)$, при $\varepsilon = 2^{-5}$, $N = N_0 = 16$

6 Результаты

В работе получены следующие результаты:

(а) Поставлена начально-краевая задача для *сингулярно возмущенного уравнения переноса* с возмущающим параметром ε при пространственной производной, где $\varepsilon \in (0, 1]$. Установлено, что в окрестности боковой границы при $\varepsilon \rightarrow 0$ в решении задачи *появляется пограничный слой*.

(б) Построена *декомпозиция решения* на регулярную и сингулярную компоненты решения, для которых получены априорные оценки решения вместе с производными. Показано, что в окрестности пограничного слоя *производные по x сингулярной компоненты решения неограниченно растут* при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем производные решения по t остаются ε -равномерно ограниченными.

(в) Показано, что решение *стандартной разностной схемы* — монотонной сеточной аппроксимации дифференциальной задачи на сетках с произвольным распределением узлов, в частности — на равномерных сетках, сходится в равномерной норме при фиксированных значениях параметра ε , однако *не сходится*

ε -равномерно. Сходимость имеет место лишь при условии $h = o(\varepsilon)$, $\tau = o(1)$, где h и τ — максимальный шаг сеток по x и t соответственно.

(г) Для начально-краевой задачи построена специальная разностная схема — стандартная схема на кусочно-равномерной сетке по x (сгущающейся в окрестности пограничного слоя) и равномерной по t , являющаяся ε -равномерно монотонной. Такая схема сходится ε -равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} + N_0^{-1})$, где $N + 1$ и $N_0 + 1$ — число узлов сеток по x и t соответственно.

(д) С использованием экспериментальной техники, подобной разработанной для сингулярно возмущенных краевых и начально-краевых задач в [7], проведено численное исследование модельной начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса; численные результаты согласуются с теоретическими.

Заключение

Для сингулярно возмущенного уравнения переноса ставится и исследуется начально-краевая задача. Решение такой задачи при малых значениях возмущающего параметра имеет особенность типа пограничного слоя — узкая подобласть в окрестности боковой границы ширины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Производные решения в этой окрестности неограниченно растут при $\varepsilon \rightarrow 0$. Разрабатывается техника построения и исследования специальной разностной схемы, сходящейся ε -равномерно в равномерной норме с ростом числа сеточных узлов.

Таким образом, рассмотрен новый класс начально-краевых задач для уравнения переноса — задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Такие задачи могут возникать при моделировании сложных процессов и явлений, связанных с переносом субстанции, приводящие к задачам с пограничными и внутренними слоями.

Список литературы

- [1] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука, 1989.
- [2] Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989.
- [3] Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Численные методы. Методы математической физики. Москва: Издательский центр “Академия”, 2013.
- [4] Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
- [5] Shishkin G. I., Shishkina L. P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Vol. 140 of Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [6] Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion and Flow Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [7] Farrel P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O’Riordan, Shishkin G.I. Robust Computational Techniques for Boundary Layers. Chapman & Hall/CRC Press, 2000.

Григорий Иванович Шишкин — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
e-mail: shishkin@imm.uran.ru;

Лидия Павловна Шишкина — вед. математик Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
e-mail: Lida@convec.ru.

Дата поступления — 27 мая 2017 г.