

УСТОЙЧИВОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В ШАРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗМЕРА

А. Г. Фатьянов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 550.344

В работе получено явное выражение для функции Грина в спектральной области для волнового поля в произвольном слоистом шаре. Для раскрытия неопределенностей в функции Грина использована новая асимптотика цилиндрических функций. Это позволило получить устойчивое аналитическое решение для волновых полей в шаре произвольного размера. Приведены результаты расчета волнового поля для Земли с реальными параметрами. Показано, что низкоскоростное внешнее ядро Земли обладает свойствами собирающей линзы. Возникает область фокусировки. Это приводит к формированию мощной волны. Это явление ранее было неизвестно.

Ключевые слова: шар, функция Грина, аналитическое решение, асимптотика, устойчивость, Земля, линза, фокусировка.

Введение

В работе рассматривается задача построения устойчивого аналитического решения для волновых полей в слоистом шаре произвольного размера. Метод построения аналитического решения для волновых полей в шаре давно известен. После известных преобразований Фурье — Лежандра искомая постановка сводится к двухпараметрическому семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение искомой задачи в каждом сферическом слое находится в виде линейной комбинации функций Бесселя [1]. Далее неизвестные коэффициенты определяются из известных условий сопряжения на границе слоев. В итоге для их определения получается матричная система линейных уравнений. Поскольку функции Бесселя разных типов быстро стремятся к нулю и бесконечности, возникает неустойчивость. Причем чем больше радиус шара в относительных величинах (длинах волн), тем быстрее они возникают. В этой ситуации вычисление на компьютере становится неустойчивым.

Устойчивое аналитическое решение построено на основе сведения краевой задачи к двум задачам Коши. Получено явное решение соответствующего нелинейного уравнения Риккати, что не было известно ранее. Далее для построения решения используется новая асимптотика цилиндрических функций, полученная в [2]. Это дает устойчивое аналитическое решение для волновых полей в неоднородном шаре произвольного размера.

Приведены результаты расчетов волновых полей для Земли с реальными параметрами. Показано, что низкоскоростное внешнее ядро Земли обладает свойствами собирающей линзы. Возникает область фокусировки. Это приводит к формированию мощной волны. Это явление ранее было неизвестно.

1 Постановка задачи

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в сферической системе координат ($0 \leq r \leq R_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \phi \leq 2\pi$) следующим образом: определить компоненты вектора смещения для неупругой среды, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{r\theta} \cos \theta) + f_r \cdot f(t),$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cos \theta + 3\tau_{r\theta}) + f_\theta \cdot f(t), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\phi} \cos \theta + 3\tau_{\phi r}) + f_\phi \cdot f(t).$$

с начальными условиями при $t=0$

$$u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = u_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} = 0,$$

и граничными данными при $r = R_0$

$$\sigma_r = \tau_{\theta r} = \tau_{\phi r} \quad (2)$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (а они с компонентами вектора смещения) известными соотношениями, в которых коэффициенты λ , μ по принципу Вольтерра заменяются интегральными операторами Λ , M , учитывающими влияние упругого последействия.

$$\Lambda < x > \equiv \lambda x(t) - \lambda^1 \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad M < x > \equiv \mu x(t) - \mu^1 \int_{-\infty}^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (3)$$

Здесь λ^1, μ^1 — величины, определяющие уровень поглощения. Функции последействия (ядра) $h(\xi), g(\xi)$ определяют спектральный состав поглощения [3]. Среда предполагается кусочно-постоянной по координате r . На границах разрыва параметров ставятся известные условия сопряжения. Компоненты вектора силы $F = (f_r, f_\theta, f_\phi)$ описывают сосредоточенные и распределённые источники различного типа.

2 Построение аналитического решения для слоистого шара

Аналитическое решение для наглядности строится на примере распространения SH волн. Приложим в точке $r = d, \theta = 0$ вращательное воздействие в виде момента сил [3]:

$$F = \delta(r-d) \frac{\delta(\theta)}{d^3 \sin^2 \theta} f(t) e_\phi = f_\phi \cdot f(t) e_\phi \quad (4)$$

В этом случае задача определения вектора смещения в сферической системе координат сводится к нахождению единственной отличной от нуля компоненты вектора смещения $u_\phi(r, \theta, t)$ из следующей краевой задачи.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = & \frac{1}{r^2} M < \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) > + \frac{\partial}{\partial r} \left[M < \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} > \right] + \\ & + \frac{3}{r} M < \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} > + \frac{2}{r^2} M < \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) \cot \theta > + \rho f_\phi f(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$M < \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} > \Big|_{r=R_0} = 0, \quad (6)$$

$$u_\phi|_{t=0} = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

На границах разрыва параметров среды ставятся известные условия сопряжения. В случае рассмотрения сейсмологической модели жидкого ядра нужно задать дополнительное граничное условие:

$$M < \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} > \Big|_{r=R_1} = 0.$$

На первом этапе решение ищется в виде разложения Фурье — Лежандра по переменным (θ, t) .

$$u_\phi(r, \theta, t) = \frac{1}{2T} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u(r, k, \omega_n) \exp(i\omega_n t) P_k^1(\cos \theta) \quad (8)$$

Здесь $P_k^1(x)$ — полином Лежандра 1-го рода, $\omega_n = \frac{n\pi}{T}$. В итоге постановка (5)–(7) сведена к двухпараметрическому семейству (k, ω_n) краевых задач в каждом слое $r_{j+1} < r < r_j$ [3]. Для сокращения записи несущественные переменные обозначаются буквой c , а несущественные индексы опускаются.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(k+0.5)^2}{r^2} u + c \cdot \delta(r-d) F(\omega) = -\frac{\omega^2}{v^2} u \quad (9)$$

$$-\frac{3}{2} \frac{1}{r} + \frac{du}{dr} \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (10)$$

Здесь $v^2 = (\mu - \mu^1 \int_0^T g(t) e^{-i\omega t} dt) / \rho$, $F(\omega)$ — спектр входного сигнала $f(t)$.

Далее строится решение уравнения (9). Для этого вводится вспомогательная функция $\beta(r)$ следующим образом:

$$-\frac{3}{2} \frac{1}{r} u + \frac{du}{dr} = \beta(r) \cdot u \quad (11)$$

После подстановки (11) в однородное уравнение (9) получим уравнение на $\beta(r)$.

$$\frac{d\beta}{dr} + \beta^2 + 4 \cdot \frac{1}{r} \cdot \beta + \frac{(3/2)^2 - (k+0.5)^2}{r^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \quad (12)$$

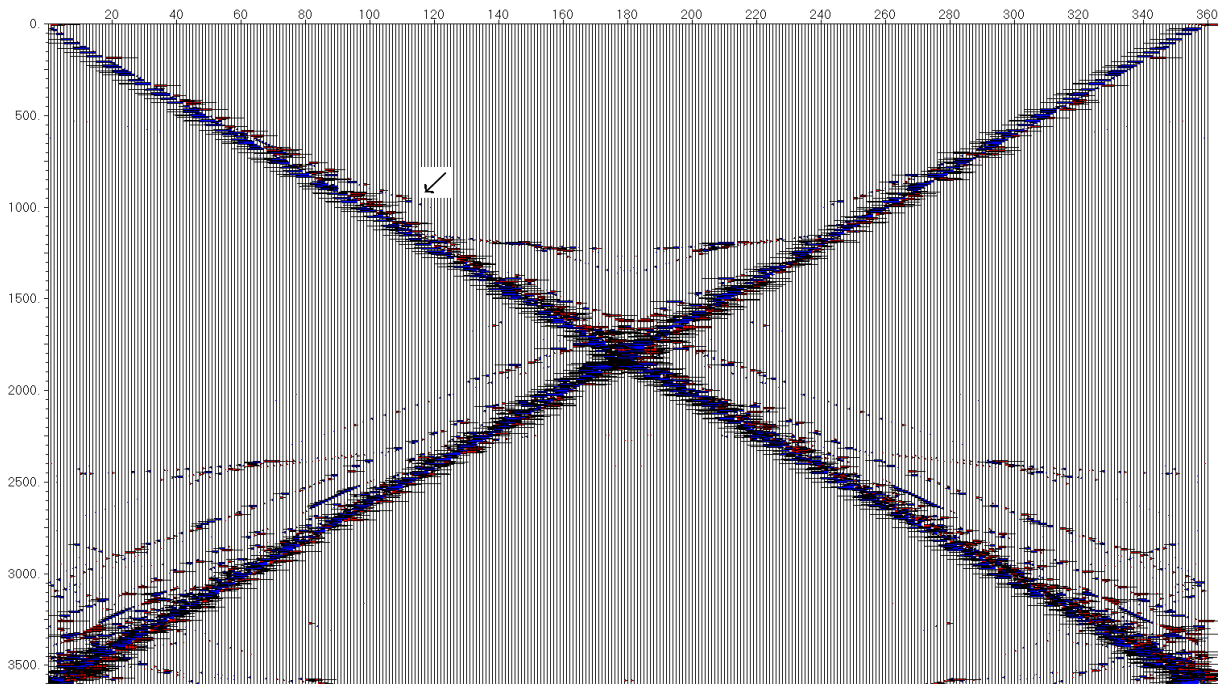


Рис. 1: Волновое поле для Земли. Стрелкой обозначено начало зоны тени для прямой волны.

Получено явное решение для (12) через функции Бесселя полуцелого индекса $J_{k+0.5}(z)$ и $J_{-k-0.5}(z)$. Это не было известно ранее. В итоге получен явный рекуррентный алгоритм нахождения функции $\beta(r)$ для произвольного r .

$$\beta_j = \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{b_1 J_{-\nu}(a_j r_j) - b_2 J_{\nu}(a_j r_j)} \quad (13)$$

$$d_1 = (-1.5J_\nu(a_j r_j)/r_j + a_j J'_\nu(a_j r_j), \quad \nu = k + 0.5$$

$$d_2 = (-1.5J_{-\nu}(a_j r_j)/r_j + a_j J'_{-\nu}(a_j r_j), \quad a_j = \omega/v_j$$

$$b_1 = (-1.5J_\nu(a_j r_{j+1})/r_{j+1} + a_j J'_\nu(a_j r_{j+1}) - \beta_{j+1} J_\nu(a_j r_{j+1})$$

$$b_2 = (-1.5J_{-\nu}(a_j r_{j+1})/r_{j+1} + a_j J'_{-\nu}(a_j r_{j+1}) - \beta_{j+1} J_{-\nu}(a_j r_{j+1})$$

Рекурсия в (13) начинается от центра шара. При этом $\beta_j = \beta(r_j)$, $\beta_{j+1} = \beta(r_{j+1})$, $\beta|_{r=0} = 0$. Это с учетом условий сопряжения на границах разрыва параметров среды полностью решает искомую задачу для произвольного слоистого шара. При этом $\frac{1}{\beta}$ при $r = R_0$ — есть не что иное, как функция Грина.

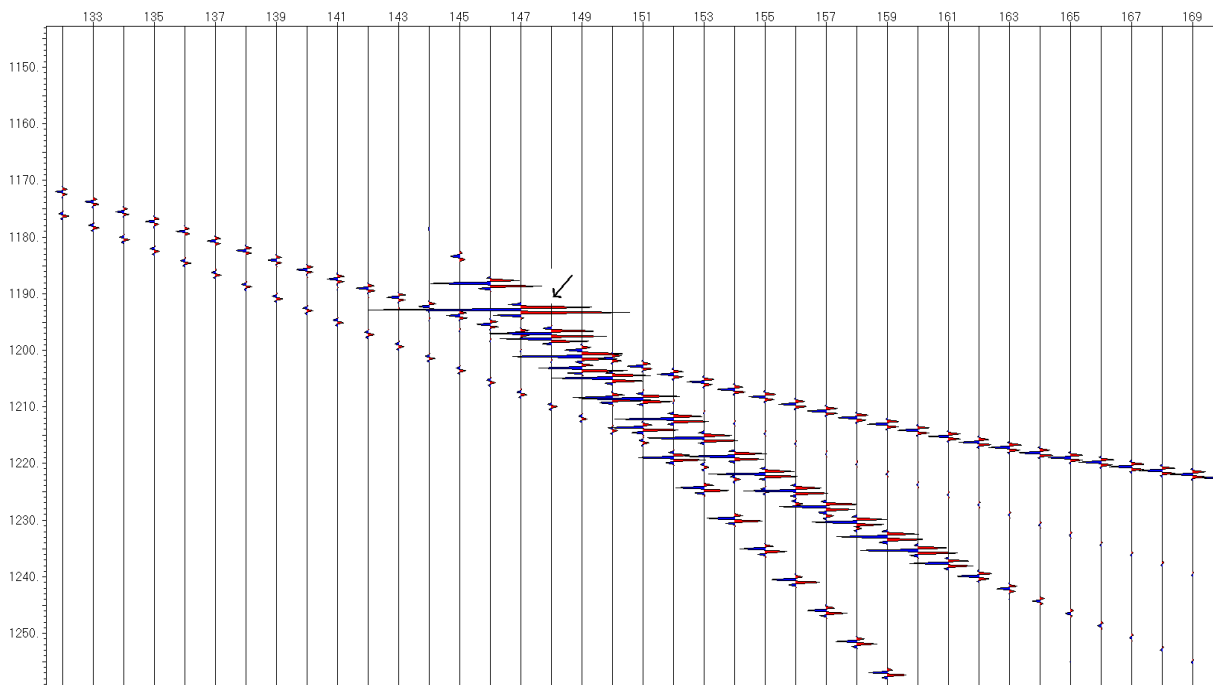


Рис. 2: Фрагмент волнового поля для Земли с первым вступлением. Стрелкой выделено сильное разрастание амплитуды.

3 Построение устойчивого решения

Построенное решение для шара не может непосредственно использоваться для вычислений. В [2] показано, что даже классическое решение для однородного шара [1] не может использоваться для численного решения. Дело в том, что при возрастании индекса бesselевых функций k в аналитическом решении возникают особенности (типа $\frac{0}{0}$ в случае однородного шара). Причем чем больше радиус шара (в относительных величинах) тем быстрее они возникают. Ряд исследователей для преодоления неустойчивости предлагают воспользоваться классической асимптотикой [4]. В [2] показано, что классическая асимптотика приводит к помехе в решении в виде ложной волны. И это в случае однородного шара, где казалось бы все проблемы решены. В [2] получена новая асимптотика бesselевых функций и показано, что её применение устраняет помеху в решении. На основе новой асимптотики раскрыты неопределенности в решении для произвольного слоистого шара. Это позволило получить устойчивое аналитическое решение для шара произвольного размера. С использованием (8) получено решение в физической области.

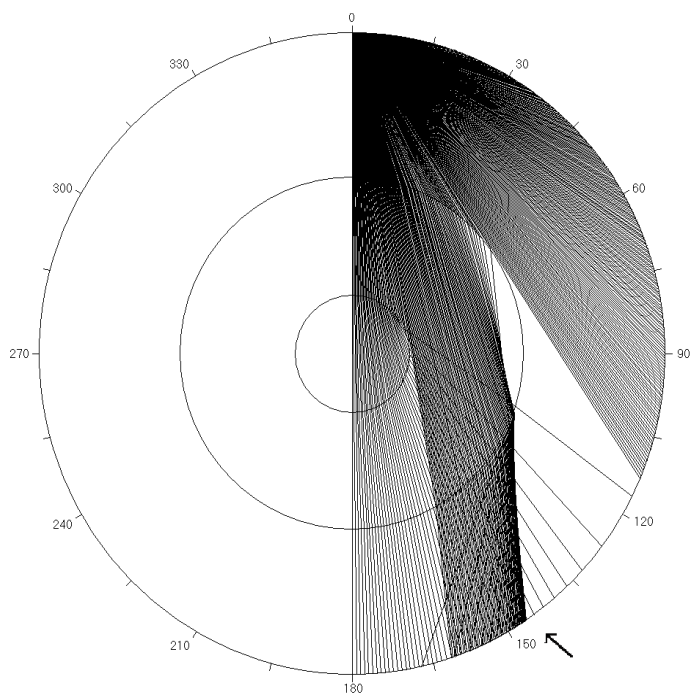


Рис. 3: Лучевая картина для Земли. Стрелкой обозначено место наибольшей фокусировки

4 Волновое поле для Земли с реальными параметрами

По разработанному алгоритму создан программный модуль для расчета волновых полей для тел космических размеров.

На рисунке 1 приведено волновое поле для обобщенной модели Земли, содержащей мантию, внешнее и внутреннее ядро. Размеры взяты реальными величинами. Так радиус Земли равен 6371.2 км. Выдача производится на дневной поверхности через 1 градус. По вертикали выдается время в секундах. Несущая частота взята в 1гц. Количество временных и пространственных частот в двойной сумме (8) — 100000 и 50000. На рисунке 1 стрелкой обозначена зона тени для прямой волны. Она начинается примерно на 118 градусах, что соответствует реальным значениям. На рисунке 2 приведен фрагмент волнового поля из рисунка 1. Он выбран так, чтобы четко выделить первое вступление. Стрелкой выделено сильное разрастание амплитуды непонятной природы. Для выяснения этого эффекта на рисунке 3 приведена лучевая картина для модели Земли. Из рисунка 3 видно, что низкоскоростное внешнее ядро Земли обладает свойствами собирающей линзы. Возникает область фокусировки. Это и приводит к формированию мощной волны. Это явление ранее было неизвестно.

Заключение

В работе получено явное решение в спектральной области для волнового поля в произвольном слоистом шаре, что не было известно ранее. Для построения устойчивого решения в шаре произвольного размера использована новая асимптотика цилиндрических функций. Приведены результаты расчета волнового поля для Земли с реальными параметрами. Выяснилось, что низкоскоростное внешнее ядро Земли обладает свойствами собирающей линзы. Возникает область фокусировки. Это приводит к формированию мощной волны. Это явление ранее было неизвестно.

Список литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики М.: Наука, 1977, 735 с.

- [2] Фатьянов А. Г. Устойчивое аналитическое решение для волновых полей в шаре // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 3. С. 91–103.
- [3] Фатьянов А.Г. Численное моделирование волновых полей в неоднородном неупругом шаре. — Новосибирск. 1981. — 22 с. — (Препринт / АН СССР Сиб Отд-ние ВЦ; 337).
- [4] V. A. Korneev and L. R. Johnson, “Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results,” *Geophys. J. Int.*, no. 115, pp. 230–250, 1993.

Алексей Геннадьевич Фатьянов — д.ф.-м.н., зав. лабораторией Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.
e-mail: fat@nmsf.sscc.ru.

Дата поступления — 3 мая 2017 г.