

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПО КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕНЦИАЛА НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОЛЛОКАЦИЙ

И. А. Шалимова, К. К. Сабельфельд

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 517.968

Настоящая работа посвящена численному нахождению параметров распределения гидравлической проницаемости пористой среды по известному распределению потенциала. Для решения прямой задачи мы использовали эффективный подход для решения стационарного уравнения Дарси со случайным коэффициентом гидравлической проницаемости на основе разложения решения в полиномиальный хаос, коэффициенты разложения которого вычисляются стохастическим методом коллокаций. Трудоемкость полученного алгоритма определяется порядком приближения полиномиального хаоса и числом точек коллокаций. При этом точность результатов оказывается достаточной для численного разделения корреляционных функций потенциала, соответствующих различным свойствам среды.

**Ключевые слова:** метод стохастических коллокаций, стационарное уравнение Дарси, метод Монте — Карло, разложение Кархунена — Лозва.

## Введение

Настоящая работа является продолжением серии работ [1], [5], в которых мы решали задачу о транспорте жидкости в пористых средах, а именно, для уравнения Дарси со случайным коэффициентом гидравлической проницаемости решалась краевая задача на основе разложения решения в полиномиальный хаос.

Метод Монте — Карло, который традиционно используется для решения подобных задач, является универсальным и простым в применении, но весьма трудоемким. Действительно, основываясь на конечно-разностной аппроксимации исходной задачи, для каждой реализации входящего случайного поля приходится вычислять поле решений или искомых функционалов и затем усреднять по всему ансамблю реализаций. Тем самым, для получения удовлетворительной точности, требуется многократно решать аппроксимирующую систему линейных алгебраических уравнений, что ведет к увеличению трудоемкости алгоритма. Поэтому в данной работе мы используем разложение решения в полиномиальный хаос, а именно по полиномам Эрмита, что позволяет существенно уменьшить трудоемкость алгоритма за счет уменьшения числа реализаций входящего поля. Начиная с работы Н.Винера [6], в которой он впервые построил ортогональный случайный базис, этот подход широко применяется в настоящее время для решения краевых задач со случайными данными [7]–[9].

В предыдущих работах мы решали прямую задачу: находили поле потенциала, поле скоростей Дарси, моделировали Лагранжевы траектории и вычисляли статистические характеристики движения такие как средние продольные смещения Лагранжевых частиц, продольный и поперечный коэффициенты корреляций Лагранжевых скоростей, коэффициенты диффузии. В данной работе решается обратная задача об определении свойств среды по известным характеристикам движения, а именно находится дисперсия коэффициента гидравлической проницаемости по известным параметрам распределения гидравлического потенциала.

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-11-00083).

## 1 Решение прямой задачи

### 1.1 Постановка задачи

В прямоугольнике  $L_x \times L_y = D$  рассматривается краевая задача для уравнения Дарси

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K(x, y, \omega) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K(x, y, \omega) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0. \quad \mathbf{x} = (x, y) \in D, \quad (1)$$

где  $\phi$  — гидравлический потенциал,  $K(\mathbf{x}, \omega)$  — коэффициент гидравлической проницаемости — заданное случайное поле. В рассматриваемой задаче коэффициент гидравлической проницаемости имеет логнормальное распределение, т.е.

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = \ln[K(\mathbf{x}, \omega)], \quad (2)$$

где  $Y(\mathbf{x}, \omega)$  — гауссовское случайное поле с нулевым средним и корреляционной функцией гауссовского типа

$$C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_Y^2 \exp(-|x_1 - y_1|^2 / \lambda_x^2 - |x_2 - y_2|^2 / \lambda_y^2). \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_Y^2$  — дисперсия, а  $\lambda_x, \lambda_y$  — соответствующие корреляционные длины случайного поля  $Y(\mathbf{x}, \omega)$ . На верхней и нижней границах заданы краевые условия Неймана

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, L_y) = 0, \quad x \in (0, L_x), \quad (4)$$

а на левой и правой границах — условия Дирихле

$$\phi(0, y) = g_l(y), \quad \phi(L_x, y) = g_r(y), \quad y \in (0, L_y). \quad (5)$$

Для численного решения задачи (1)–(5) на частных реализациях случайного поля  $K(\mathbf{x}, \omega)$  была применена консервативная конечно-разностная схема с равномерным шагом, имеющая второй порядок аппроксимации по обеим переменным (см., например, [2]). Полученная разреженная система линейных алгебраических уравнений, как и в работах [1], [5] решалась с использованием пакета PARDISO.

### 1.2 Разложение Кархунена — Лозва

Для моделирования коэффициента гидравлической проницаемости  $K(\mathbf{x}, \omega)$  мы использовали разложение Кархунена — Лозва, для чего была решена задача на собственные значения для корреляционной функции  $C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,

$$\int_D C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_n f_n(\mathbf{y}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $\lambda_k, f_k(\mathbf{x})$  — собственные значения и функции. Собственные функции удовлетворяют условию ортонормированности:

$$\int_D f_n(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}, \quad n, m \geq 1. \quad (7)$$

Тогда, корреляционная функция  $C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  разлагается в ряд по собственным функциям

$$C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\mathbf{x}) f_k(\mathbf{y}), \quad (8)$$

а для случайного поля  $Y$  имеет место разложение Кархунена — Лозва

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где  $\xi_k(\omega)$  — семейство независимых стандартных нормальных величин.

Хорошо известно [4], [10], что разложение по собственным функциям является наилучшим приближением в среднеквадратическом смысле. В алгоритме используется конечное число мод разложения Кархунена —

Лозва, и частичная проблема отыскания собственных значений решалась численно на основе рандомизированных методов [11]. Среднеквадратическая погрешность остаточного члена, возникающая при замене ряда (9) конечной суммой длины  $N$

$$Y_N(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{k=1}^N \xi_k \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{x}), \quad (10)$$

в силу независимости  $\xi_k$  и условия ортонормированности (7), имеет вид

$$\varepsilon = E \|Y(\mathbf{x}, \xi) - Y_N(\mathbf{x}, \xi)\|^2 = \sum_{m,k=N+1}^{\infty} E[\xi_k \xi_m] \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_m} \int_D f_k(\mathbf{x}) f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k.$$

Последнее равенство, в частности, показывает, что чем быстрее убывают собственные числа, тем меньшее количество мод  $N$  в разложении Кархунена — Лозва потребуется для описания  $Y_N$ . С учетом ортонормированности собственных функций из равенства (8) несложно получить

$$L_x L_y \sigma_Y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \quad (11)$$

Следовательно, число слагаемых разложения  $N$  можно выбрать, например, так чтобы выполнялось условие

$$0.9 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \approx \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (12)$$

Согласно этому критерию можно определить количество членов разложения для достижения относительной среднеквадратической погрешности порядка 10%. Большее число гармоник  $N$  в разложении Кархунена — Лозва, как будет показано ниже, увеличивает число слагаемых  $P$  в полиномиальном разложении и тем самым увеличивает трудоемкость алгоритма. Поэтому в алгоритме выбирается число гармоник, минимально достаточное для обеспечения заданной среднеквадратической погрешности.

### 1.3 Полиномиальное разложение хаоса

В данной секции рассматривается разложение гидравлического потенциала  $\phi$  по полиномам Эрмита в вероятностном пространстве, задаваемом коэффициентом гидравлической проницаемости  $K(\mathbf{x}, \xi)$ . В этом случае приближение  $\hat{\phi}$  имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \omega) &= a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}(\mathbf{x}) H_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}(\mathbf{x}) H_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{x}) H_3(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициенты  $a_i$  зависят от пространственной координаты  $\mathbf{x}$ ,  $H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))$  — полиномы Эрмита порядка  $d$ ,  $\xi = (\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))$  — вектор независимых стандартных нормальных величин размерности  $d$ ,

$$H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega)) = (-1)^d \exp\left(\frac{\xi^T \xi}{2}\right) \frac{\partial^d}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_d}} \left[ \exp\left(-\frac{\xi^T \xi}{2}\right) \right].$$

Мы будем использовать конечное число слагаемых разложения (13) и представление

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{j=1}^P c_j(\mathbf{x}) \Psi_j(\xi), \quad (14)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$  — вектор независимых стандартных нормальных величин размерности  $N$ . Для функций  $\Psi_j(\xi)$  в (14) существует однозначное соответствие с  $H_d(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \dots, \xi_{i_d}(\omega))_d$  из (13). Общее число

слагаемых  $P$  определяется размерностью  $N$  — числа слагаемых в разложении Кархунена — Лозва и порядком разложения полиномиального хаоса  $d$ ,

$$P = \frac{(N + d)!}{N!d!}. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов разложения полиномиального хаоса  $c_j(\mathbf{x})$  в (14) традиционно используются либо проекционные методы типа Галеркина либо метод коллокаций [3]. В данной работе реализован стохастический метод коллокаций.

#### 1.4 Стохастический метод коллокаций

Уравнение Дарси, с учетом усеченного разложения Кархунена — Лозва для случайного поля коэффициента проницаемости  $K$ , а также стоков или источников  $g(\mathbf{x})$  имеет вид

$$\nabla \cdot \left\{ \exp \left[ \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \xi_n \right] \nabla \phi(\mathbf{x}) \right\} = g(\mathbf{x}).$$

Определим невязку  $R$  для приближенного решения  $\hat{\phi}$  следующим образом

$$R(c_1, \dots, c_P; \boldsymbol{\xi}) = \nabla \cdot \left\{ \exp \left[ \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} f_n(\mathbf{x}) \xi_n \right] \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}) \right\} - g(\mathbf{x}).$$

Тогда, неизвестные коэффициенты  $c_i(\mathbf{x})$  полиномиального разложения (14) находятся из требования равенства нулю усредненного с некоторым весом  $W_j$  значения невязки, т.е. из условия

$$\int_{R^N} R(c_1, \dots, c_P; \mathbf{z}_\xi) W_j(\mathbf{z}_\xi) p(\mathbf{z}_\xi) d\mathbf{z}_\xi = 0, \quad (16)$$

где  $p(\mathbf{z}_\xi)$  — плотность совместного распределения вектора стандартных нормальных величин  $\boldsymbol{\xi}$ . Веса в методе коллокаций определяются выражением

$$W_j(\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{col}), \quad j = 1, \dots, P,$$

где  $\boldsymbol{\xi}_j^{col}$  — множество частных значений вектора  $\boldsymbol{\xi}$ , так называемые точки коллокаций. Такой выбор весовых функций позволяет найти решение уравнения Дарси в точках коллокаций. Обозначим  $\hat{\Phi}$  — вектор решений размерности  $P$ , вычисленный в точках коллокаций. Тогда, для нахождения коэффициентов  $c_1, \dots, c_P$  достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Z} C(\mathbf{x}) = \hat{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^{col}), \quad (17)$$

где  $C = (c_1, \dots, c_P)$  — вектор искомых коэффициентов,  $Z_{ij} = \Psi_j(\boldsymbol{\xi}_i^{col})$  — элементы независимой от пространственных переменных матрицы  $\mathbf{Z}$ , состоящей из полиномов Эрмита.

Очевидно, что коэффициенты разложения  $c_j$  существенно зависят от выбора точек коллокаций. В данной работе как и предыдущих, они находятся по аналогии с квадратурами Гаусса [1].

## 2 Обратная задача

В данном разделе описан алгоритм отыскания дисперсии  $\sigma_K^2$  коэффициента гидравлической проницаемости  $K$  — "входящего" поля по известным значениям дисперсии  $\sigma_\phi^2$  потенциала  $\phi$  — "выходящего поля". Из разложения (14) несложно получить представление для статистических моментов гидравлического потенциала. Так, среднее имеет вид

$$\langle \hat{\phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rangle = c_1(\mathbf{x})$$

и дисперсия

$$\sigma_\phi^2(\mathbf{x}) = \langle \hat{\phi}^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rangle = \sum_{j=2}^p c_j^2(\mathbf{x}) \langle \Psi_j^2(\boldsymbol{\xi}) \rangle. \quad (18)$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью стохастических полиномов Эрмита  $\Psi_j(\xi)$ . Кроме того, пользуясь явным представлением для полиномов  $\Psi_j(\xi)$ , можно аналитически вычислить их вторые моменты. Так, например, в одномерном случае

$$\langle \Psi_j^2(\xi) \rangle = j!.$$

Свойство (18) позволяет вычислять дисперсию  $\sigma_\phi^2$  суммируя квадраты коэффициентов  $c_j$  с соответствующим весом, не моделируя само поле  $\hat{\phi}$ . Последнее обстоятельство существенно уменьшает трудоемкость предложенного подхода по сравнению с прямым моделированием. При этом точность вычислений является достаточной для разделения дисперсий выходящего поля  $\sigma_\phi^2$ , соответствующих различным значениям входящего параметра  $\sigma_Y$ . Ниже приведен пошаговый алгоритм решения обратной задачи.

1. Для выбранного множества значений параметра  $\sigma_{Y,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  формируется распределение коэффициента гидравлической проницаемости  $K(\sigma_{Y,i}, \mathbf{x}, \omega)$ , строится разложение Кархунена — Лозва и решается прямая задача (1)–(5). Согласно представлению (18) находятся соответствующие значения дисперсии гидравлического потенциала  $\sigma_{\phi,1}(\mathbf{x}), \dots, \sigma_{\phi,M}(\mathbf{x})$ .
2. Для  $M$  вычисленных значений  $\sigma_{\phi,i}$  строится интерполяционный многочлен Лагранжа и устанавливается зависимость  $\sigma_Y(\sigma_\phi)$ .
3. Полученная в п. 2 зависимость позволяет определить искомые значения  $\sigma_Y$  по заданным значениям  $\sigma_\phi$ .
4. В качестве проверки, для найденного в п. 3 значения  $\sigma_Y$ , решается уравнение Дарси и вычисляется дисперсия потенциала  $\sigma_\phi^*$ . Найденное значение  $\sigma_\phi^*$  сравнивается с исходным  $\sigma_\phi$  и, если погрешность приближения является неудовлетворительной, переходят к пункту 2 и повторяют процедуру. При этом полученные значения  $\sigma_Y$  и  $\sigma_\phi^*$  можно включить в интерполяционный многочлен, тем самым повысив его степень аппроксимации.

### 3 Численные результаты

В этом разделе представлены результаты численной реализации метода стохастических коллокаций для решения обратной задачи\*.

Численные расчеты выполнялись в квадрате  $L_x \times L_y$  размера  $L_x = L_y = 10$  с равномерным шагом  $h_x = h_y = 0.125$ . На верхней и нижней границах поставлено условие непротекания, а на левой и правой границах для потенциала взяты значения  $\phi = 10.0$  и  $\phi = 15.0$ , соответственно. Предполагалось отсутствие источников и стоков,  $g(x) = 0$ . Коэффициент гидравлической проницаемости задается случайным логнормальным распределением с заданной корреляционной функцией гауссовского вида (3) с нулевым средним  $\langle Y \rangle = 0$  и коэффициентами  $\lambda_x = \lambda_y = 6.59$ , что соответствует длине корреляций порядка  $L \approx 10.0$ . Численные результаты соответствуют четвертому порядку приближения полиномиального хаоса  $d = 4$  и  $N = 13$  гармоникам в разложении Кархунена — Лозва. В этом случае для вычисления коэффициентов разложения  $c_j$ , система линейных уравнений, аппроксимирующих уравнение Дарси, решалась  $P = 521$  раз. Собственные числа  $\lambda_i$  и собственные функции находились численно, на основе проекционного метода.

Заметим, что в методе Монте — Карло для решения прямой задачи необходимое число гармоник бралось порядка  $N = 100$  на статистике  $N_{st} = 10^5$ , в то время как в полиномиальном разложении  $N = 13$  и аппроксимирующая система уравнений решалась  $P = 521$  раз. Среднее поле потенциала, вычисленное на основе полиномиального разложения, лежит в доверительном интервале равным  $2.3 \cdot 10^{-2}$ .

На рис. 1 приведены графики дисперсии  $\sigma_\phi^2$  гидравлического потенциала  $\phi$  для разных значений входящего параметра  $\sigma_Y^2$  в сечении области  $y = 5.0$ ,  $x \in [0; 10]$ , вычисленные на основе полиномиального разложения (PCE).

На следующем рис. 2 приведен график зависимости дисперсии  $\sigma_Y$  — входящего случайного поля, от дисперсии гидравлического потенциала  $\sigma_\phi$ , построенного на основе интерполяционного многочлена Лежандра. Представлены два случая  $M = 5$  и  $M = 6$ .

Наконец, в Таблице 1 во втором столбце представлены значения параметра  $\sigma_Y$  для гидравлической проницаемости среды  $K(\mathbf{x}, \omega)$ , найденные из построенной численно зависимости  $\sigma_Y(\sigma_\phi)$  в точке  $(5.0; 5.0)$ . Для тестирования полученного результата решена прямая задача с вычисленным параметром распределения  $\sigma_Y$ , и подсчитана дисперсия гидравлического потенциала  $\sigma_\phi'$  (эти данные помещены в третий столбец).

\*Расчеты выполнялись с использованием Сибирского суперкомпьютерного центра СО РАН

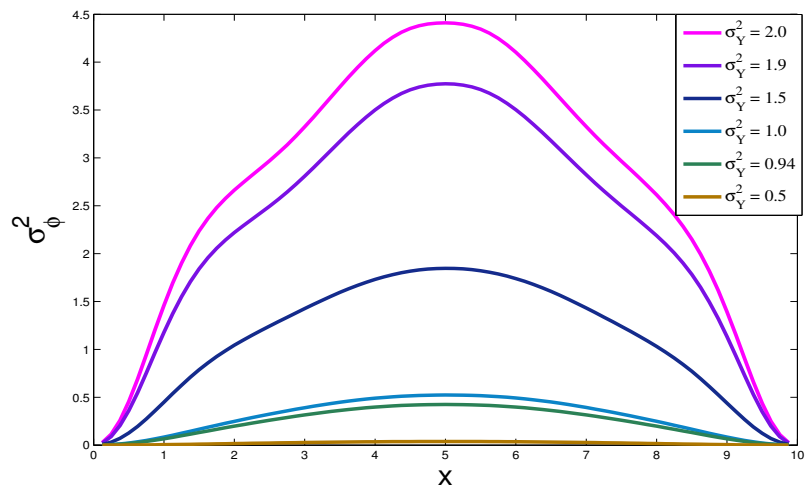


Рис. 1: Дисперсия поля потенциала  $\phi$ , вычисленная для разных значений  $\sigma_Y^2$

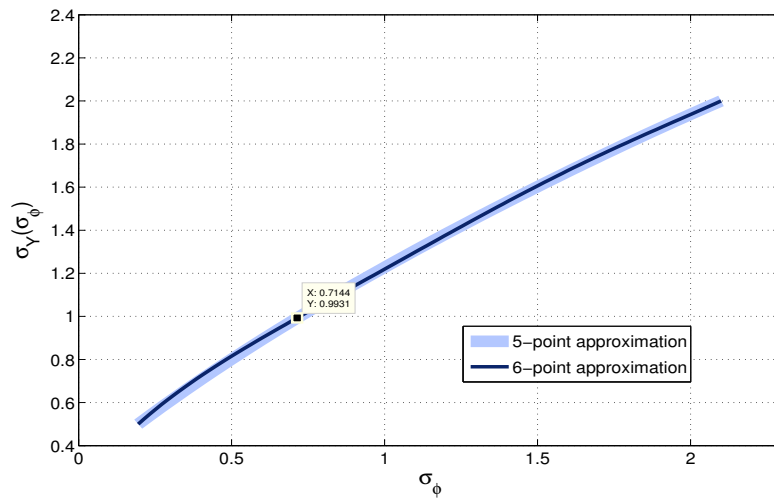


Рис. 2: Зависимость дисперсии  $\sigma_Y$  — входящего случайного поля, как функции от дисперсии гидравлического потенциала  $\sigma_\phi$

Таблица 1: Результаты решения прямой и обратной задач

$\sigma_\phi$	$\sigma_Y$	$\sigma'_\phi$
0.6567	0.9424	0.6515
1.3299	1.4784	1.3274

## Заключение

В данной работе на основе полиномиального разложения, решена обратная задача определения свойств распределения случайного поля коэффициента гидравлической проницаемости по известным параметрам распределения поля гидравлического потенциала. Данный подход является более экономичным по сравнению с методом Монте — Карло, при этом точность приближения искомого параметра распределения лежит в рамках статистической погрешности.

## Список литературы

- [1] I. Shalimova and K. Sabelfeld. Stochastic polynomial chaos based algorithm for solving PDS with random coefficients. Monte Carlo Methods and Applications, 2014, Vol. 20, issue 4, pp. 279–289. doi:10.1515/mcma-2014-0006
- [2] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, изд-во "Наука М., 1978.
- [3] Heng Li, and Dongxiao Zhang, Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods, Water Resources Research, 2007, Vol. 43, W09409. doi:10.1029/2006WR005673
- [4] Ghanem, R.G., Spanos P., Stochastic Finite Element: A Spectral Approach, Springer, New York, 1991.
- [5] Shalimova, Irina A., Sabelfeld, Karl K., Dulzon, Olga V., Uncertainty quantification and stochastic polynomial chaos expansion for recovering random data in Darcy and Diffusion equations, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Published Online: 03/16/2017.
- [6] N. Wiener, The homogenous chaos, Amer. J. Math., 1938, Vol. 60, No.4, pp. 897–936. DOI: 10.2307/2371268
- [7] W. Schoutens, Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials, Springer, 2000.
- [8] Dongbin Xiu, Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review, Commun. Comput. Phys., 2009, Vol. 5, No. 2-4, pp. 242-272. doi:10.1137/040615201
- [9] Dongbin Xiu and Jan S. Hesthaven, High-order collocation methods for differential equations with random inputs, SIAM J. Sci. Comput., 2006, Vol. 27(3), 1118–1139. doi:10.1137/040615201
- [10] O. P. Le Maitre and O. M. Knio, Spectral Methods for Uncertainty Quantification: with Applications to Computational Fluid Dynamics, Springer Netherlands, Houten, Netherlands, 2010.
- [11] K.K. Sabelfeld, N.S. Mozartova, Sparsified Randomization algorithms for low rank approximations and applications to integral equations and inhomogeneous random field simulation, Math. Comput. Simul. (2011), vol.82, 295–317. doi:10.1016/j.matcom.2011.08.002

*Ирина Александровна Шалимова — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
Новосибирск, 630090; e-mail: ias@osmf.sccc.ru;  
Карл Карлович Сабельфельд — д.ф.-м.н., гл. науч.сотр. Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
Новосибирск, 630090; e-mail: karl@osmf.sccc.ru.  
Дата поступления — 31 мая 2017 г.*