

# СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУХ БЫСТРЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ВИХРЕВОГО ВЛИЯНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ ВИХРЕВЫМИ МЕТОДАМИ

Е. Н. Авдеева, К. С. Кузьмина, И. К. Марчевский

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, 105005, Москва*

УДК 532.5

Рассмотрены два различных быстрых метода, позволяющих приближенно решить задачу расчета вихревого влияния, возникающую при моделировании плоских течений несжимаемой среды вихревыми методами. Использование данных быстрых методов позволяет избежать расчета всех парных взаимодействий вихревых элементов и снизить вычислительную сложность задачи с  $O(n^2)$  до  $O(n \log n)$ , где  $n$  — количество вихревых элементов. Один из методов аналогичен быстрому методу Барнса — Хата решения гравитационной задачи  $n$  тел, второй основан на возможности быстрого решения уравнения Пуассона для функции тока с помощью быстрого преобразования Фурье. Построены оценки сложности обоих методов, показавшие небольшое преимущество второго метода над первым по вычислительной сложности при больших значениях  $n > 10^5$ . Также второй метод предпочтительнее первого по эффективности параллельной реализации.

**Ключевые слова:** вихревой метод, быстрый метод, задача  $n$  тел, уравнение Пуассона, быстрое преобразование Фурье, функция тока

## Введение

Для решения ряда задач вычислительной механики сплошной среды могут успешно применяться лагранжевы методы, называемые также методами частиц. Суть этих методов состоит в том, что для описания движения жидкости или деформации твердого тела мы «следим» за перемещением и состоянием отдельных частиц сплошной среды.

При моделировании двумерных течений жидкости и газа с малыми дозвуковыми скоростями, когда влиянием сжимаемости можно пренебречь, могут быть эффективными так называемые вихревые методы [1, 2, 3], предполагающие, что первичной расчетной величиной является завихренность. Распределение завихренности в области течения моделируется при помощи большого числа «элементарных носителей завихренности» — т. н. вихревых элементов, каждый из которых характеризуется радиус-вектором положения в пространстве  $\vec{r}_i$  и циркуляцией  $\Gamma_i$  (количеством завихренности, которое в нем содержится),  $i = 1, \dots, n$ .

В качестве вихревых элементов при моделировании двумерных течений обычно выбирают точечные вихри — бесконечные вихревые нити, перпендикулярные плоскости течения; в результате получаем, что распределение завихренности представимо в виде

$$\Omega(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1)$$

где  $\delta(\vec{r})$  — двумерная дельта-функция Дирака. При этом под завихренностью в двумерных задачах часто понимают скалярную функцию, равную третьей компоненте ротора скорости:

$$\Omega = \vec{\Omega} \cdot \vec{k} = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Зная распределение завихренности, можно восстановить все остальные параметры течения — найти скорость среды в любой точке и давление.

Для отыскания поля скоростей  $\vec{V}$  можно воспользоваться законом Био — Савара:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS_{\xi} + \vec{V}_{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi} + \vec{V}_{\infty}. \quad (2)$$

С учетом заданного формулой (1) распределения завихренности  $\vec{\Omega}(\vec{r})$ , выражение (2) принимает вид

$$\vec{V}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} + \vec{V}_{\infty}. \quad (3)$$

Из вида формулы (3) следует, что скорость среды в произвольной точке  $\vec{r}$  области течения есть суперпозиция влияний всех вихревых элементов. При этом влияние каждого вихревого элемента убывает обратно пропорционально расстоянию до него.

Для моделирования движения вихревых элементов требуется вычислять скорости среды в точках их расположения. Заметим, что данная задача аналогична гравитационной задаче  $n$  тел, в которой необходимо рассчитывать притяжение каждого тела к каждому, и ее вычислительная сложность пропорциональна  $n^2$ .

Для обеспечения высокой точности моделирования течений, особенно в областях с большими градиентами, в частности, в пристеночных слоях, в расчетную схему требуется вводить большое число вихревых элементов — до нескольких десятков или сотен тысяч. Опыт проведения расчетов показывает, что расчет скоростей вихревых элементов является самой трудоемкой частью алгоритма, и на практике при  $n$  превышающем 10 000, ее решение «напрямую» невозможно [4]. Поэтому разработаны приближенные быстрые методы, имеющие существенно меньшую сложность (порядка  $n \log^{\alpha} n$ ).

## 1 Метод типа Барнса — Хата

Метод Барнса — Хата [5], изначально разработанный для решения гравитационных задач и впоследствии адаптированный проф. Г. Я. Дынниковой к вихревым методам [6], основан на построении иерархической структуры прямоугольных областей — дерева. Напрямую по закону Био — Савара (3) вихревое влияние рассчитывается только от вихревых элементов, которые находятся в достаточно близких к рассматриваемой ячейкам; влияние от вихревых элементов, находящихся далеко от рассматриваемой ячейки, рассчитывается приближенно по упрощенным формулам.

Используя данный подход, можно добиться значительного снижения вычислительной сложности алгоритма: при правильном выборе количества уровней дерева сложность будет пропорциональна  $n \log n$ . Это позволяет за разумное время решать задачи с большим количеством (десятками или даже сотнями тысяч) вихревых элементов. При решении практических задач недостаточно знать только порядок вычислительной сложности, необходима также количественная оценка, которая может помочь при выборе оптимальных параметров алгоритма. В работе [7] приведено подробное описание алгоритма метода и получена достаточно точная оценка количества операций в алгоритме:

$$Q_{tree} = \frac{24n^2}{2^k} \left( \frac{4}{\theta} \right) \left( 1 - \alpha \frac{\sqrt{2^k} - 1}{\sqrt{n}} \right)^2 \left( 1 - \frac{4}{\theta \sqrt{2^k}} \left( 1 - \alpha \frac{\sqrt{2^k} - 1}{\sqrt{n}} \right) \right) + \\ + \frac{896 \cdot 2^k \cdot \beta}{\theta^2} \left( 4 \left( \frac{1}{4 + \theta} + \frac{1}{4 - \sqrt{2^k} \theta} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{2^k} - 4}{4 + \theta} \right) \right) + 4n. \quad (4)$$

Здесь  $n$  — количество вихревых элементов в области течения;  $k$  — количество уровней дерева;  $\theta$  — параметр, определяющий точность вычисления скоростей ( $0 < \theta < 1$ ). Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  определяются эмпирически. При малых значениях параметра  $\theta$  быстрый метод имеет высокую точность, но в этом случае он имеет также и высокую вычислительную сложность; большие значения  $\theta$  позволяют снизить сложность алгоритма, но при этом повышается погрешность решения.

В работе [4] на примере модельной задачи построена оценка погрешности вычисления скоростей вихрей с помощью описанного алгоритма. Показано, что в случае, когда допустима относительная погрешность  $\varepsilon \approx 0,2\%$ , можно выбрать  $\theta = 0,4$ .

Отметим, что эффективная параллельная реализация описанного метода для систем с распределенной памятью является нетривиальной задачей. Основную сложность составляет обеспечение равномерности загрузки процессоров: сложность вычисления скоростей отдельных вихрей, как следует из описанного алгоритма, существенно зависит от их положения в области течения, в отличие «прямого» расчета по закону Био — Савара, в соответствии с которым скорости всех вихрей вычисляются по единой формуле.

## 2 Метод, основанный на приближенном решении уравнения Пуассона с помощью быстрого преобразования Фурье

Рассмотрим другой подход к построению приближенного быстрого метода вычисления вихревого влияния, основанный на возможности быстрого перемножения матриц за счет использования свойств дискретного преобразования Фурье [8].

Плоское соленоидальное поле скоростей  $\vec{V}$  можно выразить через скалярную функцию тока  $\psi$ :

$$\vec{V}(\vec{r}) = \nabla \times (\psi(\vec{r})\vec{k}), \quad (5)$$

где равенство понимается в смысле первых двух компонент. Функция тока  $\psi$  удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = -\Omega. \quad (6)$$

Идея быстрого метода [9] заключается в том, что выписанное уравнение Пуассона решается численно на сравнительно грубой сетке, что позволяет довольно точно учитывать влияние вихрей, находящихся вдали от точки наблюдения, однако вносит серьезную ошибку в расчет влияния вихрей, расположенных в ближней области. Эта ошибка затем корректируется путем расчета влияния вихрей из ближней области напрямую по закону Био — Савара (3).

Наиболее эффективным способом решения двумерного уравнения Пуассона представляется подход, описанный также в [9]. Решение двумерного уравнения Пуассона с известной правой частью выражается в виде свертки этой правой части с функцией Грина:

$$\psi = \int_S G(\vec{r} - \vec{\xi}) \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi}, \quad G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\vec{r}|}.$$

Тогда для скоростей среды с учетом (5) имеем

$$\vec{V}(\vec{r}) = \nabla \times (\psi(\vec{r})\vec{k}) = \int_S (\nabla \times G(\vec{r} - \vec{\xi})\vec{k}) \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_S \underbrace{\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2}}_{\vec{K}(\vec{r} - \vec{\xi})} \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi}, \quad (7)$$

В прямоугольной области, охватывающей всю имеющуюся завихренность, вводится равномерная прямоугольная сетка, содержащая  $N_x \times N_y$  узлов, при этом  $N_x N_y \ll n$ . Интеграл в (7) можно приближенно заменить суммой по узлам сетки:

$$\vec{V}(\vec{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \vec{K}(\vec{r} - \vec{r}_{i,j}) \underbrace{\Omega(\vec{r}_{i,j}) \Delta S}_{\Gamma_{i,j}},$$

Тогда для расчета скоростей среды в узлах сетки необходимо проделать следующие действия.

- 1) Рассчитать циркуляции  $\Gamma_{i,j} = \Omega(\vec{r}_{i,j}) \Delta S$  в узлах сетки, перераспределив на них циркуляции вихревых элементов. Для выполнения этой процедуры целесообразно использовать т. н. операторы сглаживания, например, оператор  $M'_4$ , введенный в [10].
- 2) Выполнить двумерное дискретное преобразование Фурье [8] для найденной матрицы  $\Gamma_{i,j}$  циркуляций в узлах сетки; в результате получим комплекснозначную матрицу-образ с компонентами  $\hat{\Gamma}_{i,j}$ .

- 3) Вычислить значение векторной функции  $\vec{K}(\vec{r}) = \frac{\vec{k} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$ , входящей в формулу (7), в узлах сетки. Если один из узлов совпадает с точкой (0; 0), то полагаем, что в этой точке  $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{0}$ . Полученные значения объединяются в две матрицы  $K^x$  и  $K^y$ , содержащие, соответственно, горизонтальные и вертикальные компоненты векторного поля  $\vec{K}$  в узлах сетки.
- 4) Произвести двумерное дискретное преобразование Фурье для матриц  $K^x$  и  $K^y$ ; в результате получим комплекснозначные матрицы-образы с компонентами  $\hat{K}_{i,j}^x$  и  $\hat{K}_{i,j}^y$ .
- 5) Из свойств преобразования Фурье известно, что образом суммы вида  $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} K(\vec{r}-\vec{r}_{i,j})\Gamma_{i,j}$ , также вычисленной в узлах сетки, является матрица, элементы которой получаются в результате поэлементного перемножения матриц-образов  $\hat{K}$  и  $\hat{\Gamma}$ ; следовательно, могут быть по-отдельности найдены образы  $\hat{V}^x$  и  $\hat{V}^y$  горизонтальных и вертикальных компонент скоростей в узлах сетки.
- 6) Выполняя обратные преобразования Фурье для матриц-образов  $\hat{V}^x$  и  $\hat{V}^y$  компонент скоростей в узлах сетки, можно найти сами эти скорости  $\vec{V}_{i,j}$ .

Скорости отдельных вихрей вычисляются двумерной интерполяцией найденных значений скоростей в узлах сетки.

Как правило, на практике пользуются быстрым преобразованием Фурье (БПФ), которое имеет вычислительную сложность, пропорциональную  $Q \sim N \log N$ , где  $N$  — длина преобразуемого вектора, вместо квадратичной  $Q \sim N^2$ . Отметим, что БПФ наиболее эффективно, когда  $N = 2^m$ , в этом случае для его реализации требуется выполнить  $\frac{1}{2}N \log_2 N = \frac{Nm}{2}$  комплексных умножений. Если  $N \neq 2^m$ , его сложность оказывается несколько выше.

По постановке задачи требуется найти такое решение уравнения Пуассона, которое обеспечивает нулевые скорости на бесконечности, т. е. имеет на бесконечности нулевые частные производные. Это можно обеспечить следующим приемом [9]: область, «накрываемая» сеткой, перед началом расчета увеличивается в 4 раза путем ее двукратного расширения вправо и вверх и рассматривается новая сетка.

При этом  $\Gamma$  в добавленных узлах полагается равной нулю, матрицы  $K^x$  и  $K^y$  «продолжаются» симметричным и антисимметричным способом до матриц  $\bar{K}^x$  и  $\bar{K}^y$  по правилам:

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{i,j}^x &= +K_{i,j}^x \\ \bar{K}_{i,j}^y &= +K_{i,j}^y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq i < N_x \\ 0 \leq j < N_y \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \bar{K}_{i,2N_y-1-j}^x &= -K_{i,j+1}^x \\ \bar{K}_{i,2N_y-1-j}^y &= +K_{i,j+1}^y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq i < N_x \\ 0 \leq j < N_y - 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{i,N_y}^x &= \bar{K}_{N_x,j}^x = 0 \\ \bar{K}_{i,N_y}^y &= \bar{K}_{N_x,j}^y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq i < 2N_x \\ 0 \leq j < 2N_y \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \bar{K}_{2N_x-1-i,j}^x &= +K_{i+1,j}^x \\ \bar{K}_{2N_x-1-i,j}^y &= -K_{i+1,j}^y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq i < N_x - 1 \\ 0 \leq j < N_y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{2N_x-1-i,2N_y-1-j}^x &= -K_{i+1,j+1}^x \\ \bar{K}_{2N_x-1-i,2N_y-1-j}^y &= -K_{i+1,j+1}^y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq i < N_x - 1 \\ 0 \leq j < N_y - 1 \end{aligned}$$

Дальнейшие действия выполняются по указанному выше алгоритму, но рассматриваются матрицы размером  $(2N_x+1) \times (2N_y+1)$ . Результаты также будут представлять собой «расширенные» матрицы скоростей, в которых физический смысл имеет только блок размером  $N_x \times N_y$ .

Ясно, что при перераспределении завихренности из вихревых элементов на узлы сетки вносится определенная погрешность; в результате скорость, индуцируемая исходными вихревыми элементами, отличается от скорости, индуцируемой вихрями в узлах сетки. Однако если рассмотреть скорости, индуцируемые вихрями, находящимися в конкретной ячейке, то существенная погрешность в расчете их влияния будет наблюдаться только в самой этой ячейке и нескольких соседних ячейках. Вдали от этой ячейки погрешность будет весьма незначительной.

Опыт расчетов показывает, что ошибка в вычислении скоростей вихрей по описанному алгоритму составляет порядка 20 %, что неприемлемо для практических целей. При этом данная ошибка возникает именно из-за погрешности в учете влияния ближайших вихрей.

Для решения этой проблемы можно применить полуэмпирический подход [9], основанный на нахождении линейной связи между скоростями и циркуляцией.

Примем, что «ширина ближней зоны», т. е. той зоны, влияние вихрей из которой следует скорректировать, составляет 3 слоя ячеек (рис. 1, *а*). Следующий алгоритм, состоящий из 2 этапов, позволяет исключить их влияние из численного решения, найденного выше, и учесть его напрямую по закону Био — Савара.

Этап 1. Вычисление матрицы путем решения вспомогательной задачи.

1. В произвольную точку внутри центральной ячейки помещается вихрь единичной циркуляции.
2. При помощи оператора сглаживания  $M'_4$  этот вихрь распределяется по 16 ближайшим узлам сетки (черные кружки на рис. 1, *а*). Эта операция соответствует п. 1 описанного в предыдущем разделе алгоритма. В результате получаем вектор  $\{\Gamma\}$  из 16 компонент.
3. В соответствии с пп. 2–5 алгоритма на основе преобразования Фурье вычисляются скорости во всех остальных узлах сетки, из которых выделяются скорости в 64 узлах, расположенных по периметру центральной ячейки и еще 3 «опоясывающих» ее слоях ячеек (белые и черные кружки на рис. 1, *а*). Поскольку скорости имеют две компоненты, результирующий вектор  $\{V\}$  имеет 128 компонент.
4. Основываясь на свойстве линейности оператора дифференцирования (взятия ротора) и закона Био — Савара, полагаем, что компоненты вектора  $\{V\}$  могут быть линейно выражены через компоненты вектора  $\{\Gamma\}$  путем умножения последнего на некоторую матрицу:  $\{V\} = [C]\{\Gamma\}$ ,  $[C] \in M(\mathbb{R})_{128 \times 16}$ .

Полученные 128 уравнений следует записать в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов матрицы  $[C]$ , количество которых составляет  $128 \cdot 16 = 2048$ .

5. Для составления дополнительных уравнений решаются 15 аналогичных вспомогательных задач, отличающихся лишь положением исходного вихря в центральной ячейке, которые выбираются произвольно. Решив соответствующую систему, можно найти компоненты матрицы  $[C]$ .

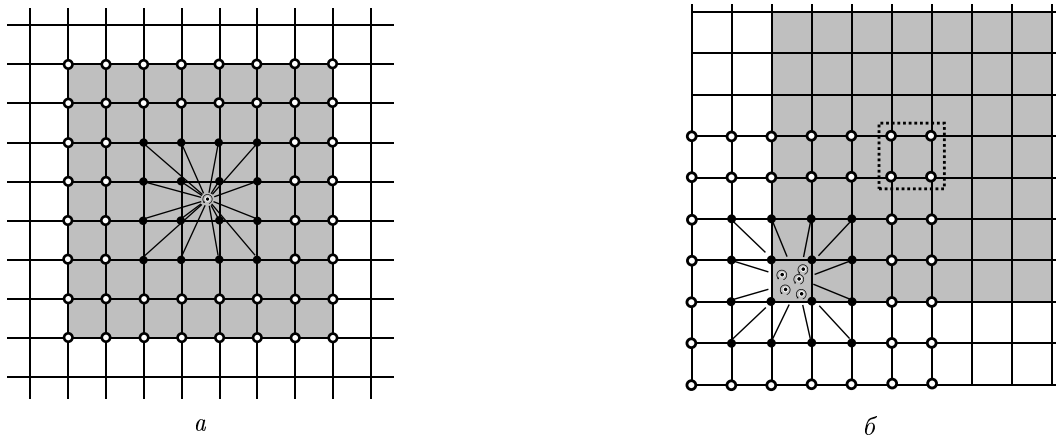


Рис. 1: *а* — центральная ячейка, вихрь в ней, ближняя зона (заштрихована) и 64 узла, в которых вычисляются скорости (белые и черные кружки); *б* — вихри в одной из ячеек ближней зоны; узлы, в которые перераспределяются их циркуляции (черные кружки); узлы, в которых вычисляется их влияние с помощью матрицы  $[C]$  (белые кружки, показаны не все); контрольная ячейка (обведена рамкой)

Этап 2. Коррекция скоростей вихрей. Процедуру коррекции рассмотрим для вихрей, находящихся внутри одной ячейки с индексом  $(i, j)$ . Для остальных ячеек все действия выполняются по аналогии.

Необходимо последовательно перебрать 49 ячеек, образующих «ближнюю зону», и для каждой  $p$ -й из них ( $p = 1, \dots, 49$ ) выполнить следующий алгоритм действий.

1. Определить вихри, попавшие в  $p$ -ю ячейку (рис. 1, *б*). При помощи оператора сглаживания  $M'_4$  перераспределить их циркуляции на 16 соседних узлов сетки (черные кружки на рис. 1, *б*), получив в результате вектор  $\{\Gamma_p\}$ .
2. Вектор  $\{\Gamma_p\}$  умножить на матрицу  $[C]$ ; получится вектор  $\{V_p\}$ , содержащий по 2 компоненты скорости в 64 узлах сетки, опоясывающих  $p$ -ю ячейку (черные и белые кружки на рис. 1, *б*).
3. Из полученного вектора  $\{V_p\}$  следует выделить те компоненты, которые соответствуют углам  $(i, j)$ -й (контрольной) ячейки, которая на рис. 1, *б* обведена рамкой.

Полученные скорости в углах  $(i, j)$ -й ячейки следует вычесть из скоростей, найденных в результате решения исходной задачи методом преобразования Фурье. Тем самым в результате будет исключено влияние вихрей, находящихся в ближней зоне, на  $(i, j)$ -ю ячейку.

Полученные (скорректированные) значения скоростей в углах  $(i, j)$ -й ячейки следует интерполировать на находящиеся в ней вихри. К скоростям всех вихрей следует прибавить скорости, индуцированные всеми вихрями ближней зоны, которые рассчитываются «напрямую» точно по закону Био — Савара

$$\vec{V}_{neigh}(\vec{r}_s) = \sum_{q \in B_{i,j}} \frac{\Gamma_q}{2\pi} \frac{\vec{k} \times (\vec{r}_s - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_s - \vec{r}_q|^2},$$

где  $B_{i,j}$  обозначает множество вихрей, попадающих в ближнюю зону к ячейке  $(i, j)$ .

### 3 Сравнение эффективности двух быстрых методов

Расчеты показывают, что описанная реализация быстрого метода на основе быстрого преобразования Фурье с приведенными выше параметрами, главным из которых является «ширина» ближней зоны, принятая равной 3 слоям ячеек, обеспечивает после выполнения коррекции погрешность вычисления скоростей на уровне  $0,2 \dots 0,3\%$ , что согласуется с погрешностью, обеспечиваемой методом типа Барнса — Хата при  $\theta = 0,4$ .

Опытным путем установлено, что количество ячеек грубой сетки и, соответственно, размер этих ячеек мало влияют на точность решения задачи, однако это влияние оказывается существенным, если рассматривать вычислительную сложность алгоритма. Будем считать, что число ячеек сетки по двум направлениям одинаково,  $N_x = N_y = N$ , и является степенью двойки (что позволяет оптимальным образом реализовать алгоритм БПФ), а вихри будем считать равномерно распределенными по ячейкам сетки.

В рамках указанных допущений можно построить приблизительную оценку для количества операций, необходимых для вычисления скоростей всех вихрей в соответствии с описанным алгоритмом:

$$Q_{FFT} \approx \frac{294n^2}{N^2} + 104n + 32\,888N^2 + 68N^2 \log_2 N. \quad (8)$$

Поскольку, как указано выше, рассмотренные быстрые методы обеспечивают соизмеримую точность вычисления скоростей вихрей, представляет интерес сравнение их сложностей. На графике на рис. 2 показаны сложности обоих методов при различных значениях числа вихрей  $n$ , вычисленные при помощи оценок (4) и (8); при этом число уровней дерева  $k$  в методе типа Барнса — Хата и число ячеек сетки  $N$  в методе, основанном на быстром преобразовании Фурье, во всех случаях были выбраны оптимальными.

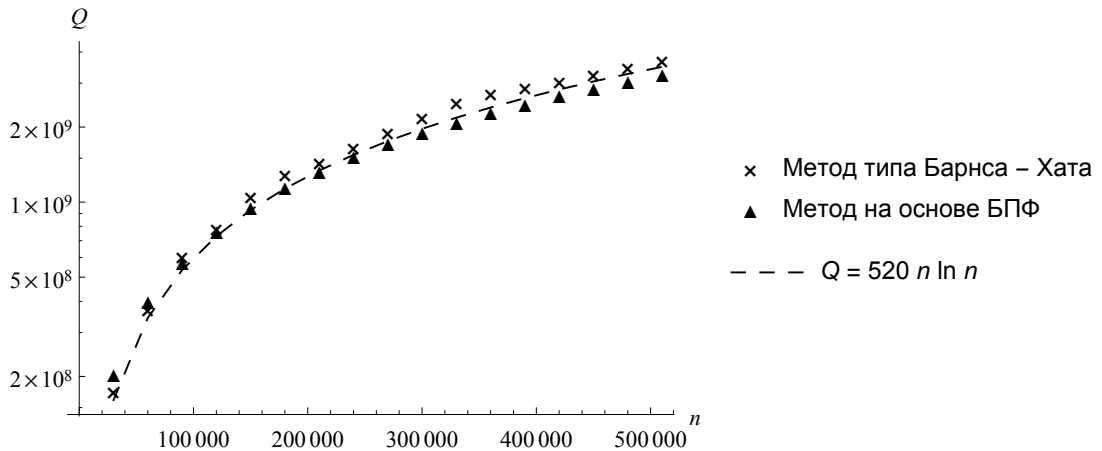


Рис. 2: Зависимости вычислительной сложности быстрого метода типа Барнса — Хата (x) и быстрого метода на основе БПФ (▲) от числа вихрей. Штриховой линией показана кривая  $Q = 520n \ln n$

## Заключение

Построены оценки вычислительной сложности двух быстрых методов вычисления вихревого влияния: метода типа Барнса — Хата [6], основанного на построении иерархической структуры дерева и последующем его обходе, и метода, предполагающего решение уравнения Пуассона на грубой сетке с помощью быстрого преобразования Фурье [9].

В обоих методах влияние близко расположенных вихрей рассчитывается напрямую (точно) по закону Био — Савара, а влияние вихрей, расположенных сравнительно далеко от точки наблюдения, учитывается приближенно.

При задании параметров точности обоих методов, обеспечивающих сравнимые погрешности вычисления скоростей вихрей порядка 0,2 %, и оптимальном выборе остальных параметров, вычислительные сложности обоих методов оказываются близкими. При числе вихрей  $n > 100\,000$  метод на основе быстрого преобразования Фурье несколько экономичнее метода типа Барнса — Хата (примерно на 10 %). Кроме того, его параллельная реализация может быть более эффективной в смысле обеспечения более равномерной загрузки вычислительных ядер.

Представляется также, что при решении задач моделирования пространственных течений вихревыми методами быстрый метод на основе быстрого преобразования Фурье будет значительно более эффективным по сравнению с методом типа Барнса — Хата.

## Список литературы

- [1] Лифанов И. К. Метод сингулярных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
- [2] Дынникова Г. Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: Дис. . . д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. Москва, 2011. 269 с.
- [3] Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. Vortex methods. Theory and practice. Cambridge University Press, 2008. 314 p.
- [4] Кузьмина К. С., Марчевский И. К. Об оценках вычислительной сложности и погрешности быстрого алгоритма в методе вихревых элементов // Труды ИСП РАН. 2016. Т. 28. В. 1. С. 259–274.
- [5] Barnes J., Hut P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm. Nature. 1986. Vol. 324. No. 4. Pp. 446–449.
- [6] Дынникова Г. Я. Использование быстрого метода решения «задачи  $N$  тел» при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1456.
- [7] Кузьмина К. С., Марчевский И. К. Оценка трудоемкости быстрого метода расчета вихревого влияния в методе вихревых элементов // Наука и образование: электрон. науч.-техн. изд. 2013. № 10. С. 399–414.
- [8] Van Loan C. Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform. SIAM, 1992. 287 p.
- [9] Morgenthal G., Walther J. H. An immersed interface method for the Vortex-In-Cell algorithm // Computers and Structures. 2007. Vol. 85. Pp. 712–726.
- [10] Monaghan J. J. Extrapolating B-splines for interpolation // Journal of Computational Physics. 1985. Vol. 60, No. 2. P. 253–262.

*Елена Николаевна Авдеева — студент каф. «Прикладная математика»  
Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана  
e-mail: lena.avdeeva177@mail.ru;*

*Ксения Сергеевна Кузьмина — аспирант, ассистент каф. «Прикладная математика»  
Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана  
e-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru;*

*Илья Константинович Марчевский — к.ф.-м.н., доцент каф. «Прикладная математика»  
Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана  
e-mail: iliamarchevsky@mail.ru.*

*Дата поступления — 30 мая 2017 г.*