

ПРОЕКЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ МЕТОДА МОНТЕ — КАРЛО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УГЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. В. Трачева^{1,2}, С. А. Ухинов^{1,2}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.245; 519.676

В работе представлен алгоритм метода Монте — Карло для исследования пространственно-угловых характеристик поляризованного излучения, основанный на двумерном проекционном разложении соответствующего углового распределения по ортонормированным с некоторым весом базисным функциям. Приведены результаты численной оценки двумерных угловых распределений интенсивности и степени поляризации излучения, проходящего и отраженного оптически толстым слоем рассеивающего и поглощающего вещества.

Ключевые слова: метод Монте — Карло, статистическое моделирование, перенос излучения, ортогональное разложение, полусферические гармоники, полиномы Якоби.

Введение

При решении ряда задач атмосферной оптики широко используется разложение решения уравнения переноса по сферическим гармоникам (см., например, [1]). Однако в задачах, связанных с переносом излучения с поверхности или на поверхность, когда излучение распространяется в пределах телесного угла, равного 2π , применение сферических функций в чистом виде невозможно. Данная проблема привела к попыткам построения систем полусферических гармоник разного вида (см., например, [2, 3]). В настоящей работе мы используем систему полусферических гармоник, ортогональных с весом $|\cos\theta|$ (θ — широта, отсчитываемая от нормали к поверхности), построенную в работе [2]. В работе [4] была показана полнота данной ортогональной системы.

Рассматривается процесс переноса поляризованного излучения в рассеивающей и поглощающей среде. Для описания поляризационных свойств излучения мы используем вектор Стокса $\Phi = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)})^T$ в четырехмерном функциональном пространстве, компоненты которого имеют размерность интенсивности и определяют в совокупности интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения (см., например, [5, 6]).

Для стационарных задач компоненты вектор-функций Стокса зависят от пяти переменных: $\Phi = \Phi(x)$, $x \in X$, где $X = R \times \Omega$, $R \subseteq \mathbf{R}^3$ — пространство координат, $\Omega = \{\omega \in \mathbf{R}^3 : |\omega| = 1\}$ — пространство единичных векторов направлений. Математическая модель переноса поляризованного излучения строится на основе феноменологического предположения о том, что в результате рассеяния ассоциируемый с частицей (квантом излучения) вектор Стокса преобразуется заданной матрицей рассеяния (см., например, [5]).

Рассматривается стационарное интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения с поляризацией вида:

$$\omega \nabla \Phi(r, \omega) + \sigma(r) \Phi(r, \omega) = \int_{\Omega} \sigma_s(r) P(\omega', \omega, r) \Phi(r, \omega') d\omega' + \mathbf{I}_0(r, \omega).$$

Здесь $\Phi(r, \omega)$ — вектор-функция интенсивности излучения (потока частиц) в точке r в направлении ω ; σ_s — сечение(коэффициент) рассеяния, $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$ — полное сечение ослабления, σ_c — сечение поглощения;

$$P(\omega', \omega, r) = L(\pi - i_2)R(\omega', \omega, r)L(-i_1),$$

$R(\omega', \omega, r)$ — матрица рассеяния, $L(i)$ — специальная матрица поворота, i_1 и i_2 — углы между плоскостью рассеяния $\omega\omega'$ и плоскостями $\omega's$ и ωs соответственно, s — единичный вектор, определяющий плоскость отсчета параметров электромагнитной волны [7], обычно равный $(0, 0, 1)$ в плоскопараллельной геометрии среды и $r = |r|$ — в сферической [5], \mathbf{I}_0 — вектор-функция плотности распределения источника излучения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим перенос частиц через плоский слой $0 < z < H$ от расположенного в точке $(0, 0, -1)$ источника вида $\mathbf{I}_0(\omega) = \delta(\omega - \mathbf{e}_z)\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_0 = (I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, I_0^{(3)}, I_0^{(4)})^T$, $I_0^{(1)} \geq 0$, $I_0^{(1)2} \geq I_0^{(2)2} + I_0^{(3)2} + I_0^{(4)2}$.

На внешней границе $z = H$ слоя плотность полного потока излучения (освещенность границы слоя) равна

$$P_H = \int_{\Omega} \Phi^{(1)}(\omega) \mu d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu \Phi^{(1)}(\mu, \varphi) d\mu d\varphi,$$

где $\mu = \omega_z$, ω — зенитный угол, φ — азимутальный угол.

Угловая плотность $\Phi_s^{(1)}(r, \mu, \varphi)$ распределения по μ и φ потока излучения в точке r равна

$$\Phi_s^{(1)}(r, \mu, \varphi) = |\mu| \Phi^{(1)}(r, \mu, \varphi). \quad (1)$$

Построим метод Монте — Карло, позволяющий исследовать угловое распределение интенсивности отраженного и проходящего излучения

$$\Phi_s^{(1)}(r, \mu, \varphi)/P_H, \quad \mu \in (0, 1), \varphi \in (0, \pi).$$

Другой важной характеристикой частично поляризованного излучения является степень поляризации, определяемая как отношение интенсивности полностью поляризованной компоненты к общей интенсивности излучения

$$p(r, \omega) = \frac{\sqrt{\Phi^{(2)}(r, \omega)^2 + \Phi^{(3)}(r, \omega)^2 + \Phi^{(4)}(r, \omega)^2}}{\Phi^{(1)}(r, \omega)}. \quad (2)$$

Построим метод Монте — Карло для оценки данной характеристики.

Для этого рассмотрим систему ортонормированных на множестве $(0, 1) \times (0, 2\pi)$ с весом x функций $\{H_{i,j}(x, y), i = 0, \dots, \infty, j = -i, \dots, i\}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_{2,x}(\Omega)$ на полусфере единичных направлений Ω , таких, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 x H_{i,k}(x, y) H_{j,l}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1, & i = j, k = l \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обобщив (1) разложим функцию $\Phi(x, y)$ по ортонормированному базису $\{H_{i,j}(x, y), i = 0, \dots, \infty, j = -i, \dots, i\}$ в $\mathcal{L}_{2,x}(\Omega)$:

$$\Phi_s(x, y) = x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i a_{i,j} H_{i,j}(x, y)$$

где

$$a_{i,j} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi_s(x, y) H_{i,j}(x, y) dx dy.$$

В качестве оценки функции $\Phi_s(x, y)$ рассмотрим конечную сумму

$$\Phi_s(x, y) \approx x \sum_{i=0}^n \sum_{j=-i}^i a_{i,j} H_{i,j}(x, y) = x \Phi_n(x, y), \quad (3)$$

Ставится задача нахождения коэффициентов $a_{i,j}$ приближения (3) методом численного статистического моделирования (методом Монте — Карло).

2 Алгоритм решения

Построим ортонормированный базис на основе полусферических функций $\{H_{i,j}(\mu, \varphi)\}$ вида

$$\begin{aligned} H_{0,0}(\mu, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \\ H_{i,0}(\mu, \varphi) &= C_{i,0} J_i(2\mu - 1), \quad i = 1, 2, \dots; \\ H_{i,j}(\mu, \varphi) &= C_{i,j} J_i^j(2\mu - 1) \cos(j\varphi), \quad i = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, i; \\ H_{i,-j}(\mu, \varphi) &= C_{i,j} J_i^j(2\mu - 1) \sin(j\varphi), \quad i = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, i. \end{aligned}$$

Здесь J_i — полином Якоби порядка i , а J_i^j — j -ый присоединенный полином Якоби порядка i :

$$\begin{aligned} J_i(x) &= J_i^{(0,1)}(x) = \frac{(-1)^i}{2^i i!} \frac{1}{1+x} \frac{d^i}{dx^i} [(1+x)(1-x^2)^i], \\ J_i^j(x) &= (1-x^2)^{j/2} \frac{d^j}{dx^j} J_i^{(0,1)}(x). \end{aligned}$$

Нормировочные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [C_{i,0}]^2 &= \frac{i+1}{\pi}, \\ [C_{i,j}]^2 &= \frac{2(i+1)}{\pi \cdot \prod_{k=1}^j [(i+1)^2 - k^2]} \quad \text{при } j \neq 0. \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов $\mathbf{a}_{i,j}$ ортогонального разложения (3) применяется весовая векторная оценка метода Монте — Карло $\{\xi_{i,j} = (\xi_{i,j}^{(1)}, \xi_{i,j}^{(2)}, \xi_{i,j}^{(3)}, \xi_{i,j}^{(4)})^T : E\xi_{i,j} = \mathbf{a}_{i,j}\}$ “по направлениям” [6]:

$$\xi_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_t-1} q_k \mathbf{Q}_{k+1} H_{i,j}(\mu_{k+1}, \varphi_{k+1}) e^{-\frac{\sigma(h-z_k)}{\mu_{k+1}}} \Delta_{s,\mu}(z_k, \mu_{k+1}).$$

Здесь $x_k = (z_k, \omega_k)$ — моделируемая цепь Маркова, z_k — z -координата точки столкновения, $z_0 = 0$; ω_k — направление частицы перед столкновением, $\omega_1 = \mathbf{e}_z$; $\mu_k = (\omega_k, \mathbf{e}_z)$;

$$\Delta_{s,\mu}(z_k, \mu_{k+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_k < h \text{ и } \mu_{k+1} > 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то есть $\Delta_{s,\mu}$ — индикатор пересечения направления частицы поверхности $z = h$ после рассеяния в точке $z_k < h$, N_t — случайный номер последнего столкновения. Считается, что вне рассматриваемого слоя $0 < z < H$ сечение $\sigma \equiv \sigma_c > 0$, то есть вне слоя цепь столкновений обрывается с вероятностью единица.

Направление рассеяния ω_k в точке z_{k-1} моделируется согласно элементу R_{11} матрицы рассеяния $R(\omega_{k-1}, \omega_k)$.

Векторный вес $\mathbf{Q}_k = (Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}, Q_k^{(3)}, Q_k^{(4)})^T$ определяется выражениями:

$$\mathbf{Q}_1 = (I_0^{(1)}, I_0^{(2)}, I_0^{(3)}, I_0^{(4)})^T, \quad \mathbf{Q}_k = P(\omega_{k-1}, \omega_k) \mathbf{Q}_{k-1} / R_{11}(\omega_{k-1}, \omega_k), \quad k \geq 2.$$

Значение скалярного веса q_k определяется используемой модификацией метода Монте — Карло моделирования длины пробега и учета поглощения. При использовании модификации “без поглощения”, то есть при моделировании длины пробега по экспоненциальному закону с параметром σ и учете поглощения весом в точке столкновения, имеем $q_k = q_{k-1} \cdot \sigma_s / \sigma$, $q'_k = q_{k-1}$, $q_0 = 1$. При моделировании “по рассеянию”, то есть при выборе длины пробега l по экспоненциальному закону с параметром σ_s и учете поглощения весом $\exp(-\sigma_c \cdot l)$, имеем $q_k = q_{k-1} \cdot \exp(-\sigma_c |z_k - z_{k-1}| / |\mu_k|)$, $q'_k = q_{k-1} \cdot \exp(-\sigma_c (h - z_{k-1}) / \mu_k)$.

Оценка ξ_h полного потока P_h рассеянного излучения (освещенности) на поверхности $z = h$, $0 < h \leq H$ имеет вид:

$$\xi_h = \sum_{k=2}^{N_t} q'_k Q_k^{(1)} \Delta_s(z_{k-1}, z_k), \quad E\xi_h = P_h.$$

Рандомизированная проекционная оценка $\tilde{\Phi}_n(x, y)$ функции $\Phi(x, y)$ согласно (3) строится следующим образом:

$$\Phi(x, y) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=-i}^i \alpha_{i,j} H_{i,j}(x, y) = \Phi_n(x, y) \approx \tilde{\Phi}_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=-i}^i \alpha_{i,j} H_{i,j}(x, y),$$

где

$$\alpha_{i,j} = E_N \xi_{i,j} \equiv \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N \xi_{i,j}^{(m)},$$

$$E \alpha_{i,j} = E \xi_{i,j} = \alpha_{i,j},$$

$$E \tilde{\Phi}_n(x) = \Phi_n(x).$$

Здесь $\xi_{i,j}^{(m)}$ — реализация случайной величины $\xi_{i,j}$ на m -ой траектории.

Дисперсия случайной вектор функции $\tilde{\Phi}_n(x)$ покомпонентно равна

$$\begin{aligned} D \tilde{\Phi}_n(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=-i}^i \sum_{j=0}^n \sum_{l=-j}^j \text{cov}(\alpha_{i,k}, \alpha_{j,l}) H_{i,k}(x, y) H_{j,l}(x, y) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n \sum_{k=-i}^i \sum_{j=0}^n \sum_{l=-j}^j \text{cov}(\xi_{i,k}, \xi_{j,l}) H_{i,k}(x, y) H_{j,l}(x, y). \end{aligned}$$

Здесь и далее операции D , cov , умножения и возведения в квадрат четырехмерных векторов понимаются покомпонентно. Так $\text{cov}(\xi_{i,k}, \xi_{j,l})$ — покомпонентная ковариация векторных оценок $\xi_{i,k}$ и $\xi_{j,l}$, то есть вектор $\{\text{cov}(\xi_{i,k}^{(s)}, \xi_{j,l}^{(s)})\}$, $s = 1, \dots, 4$, компоненты которого статистически оцениваются по формуле:

$$\text{cov}_N(\xi_{i,k}, \xi_{j,l}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N \xi_{i,k}^{(m)} \xi_{j,l}^{(m)} - \alpha_{i,k} \alpha_{j,l}.$$

Статистическая оценка дисперсии находится по формуле

$$D_N \xi_{i,k} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^N \xi_{i,k}^{(m)2} - \alpha_{i,k}^2.$$

Асимптотически несмещенной оценкой углового распределения степени поляризации $p(x)$ на поверхности $z = h$ исходя из (2) будет, очевидно, являться следующее выражение

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{\sqrt{(\tilde{\Phi}_n^{(2)}(x))^2 + (\tilde{\Phi}_n^{(3)}(x))^2 + (\tilde{\Phi}_n^{(4)}(x))^2}}{\tilde{\Phi}_n^{(1)}(x)}.$$

Дисперсия $D_N \tilde{p}_n(x)$ асимптотически при $N \rightarrow \infty$ равна

$$\begin{aligned} D_N \tilde{p}_n(x) &= \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{g D_N g_1}{g_1^2} + \frac{g_2^2 D_N g_2 + g_3^2 D_N g_3 + g_4^2 D_N g_4}{g} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\text{cov}_N(g_1, g_2) g_2 + \text{cov}_N(g_1, g_3) g_3 + \text{cov}_N(g_1, g_4) g_4}{g_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\text{cov}_N(g_2, g_3) g_2 g_3 + \text{cov}_N(g_2, g_4) g_2 g_4 + \text{cov}_N(g_3, g_4) g_3 g_4}{g} \right) + o(N^{-1}), \end{aligned}$$

где $g_m = \tilde{\Phi}_n^{(m)}(x)$, $g = g_2^2 + g_3^2 + g_4^2$,

$$\text{cov}_N(g_m, g_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n \sum_{k=-i}^i \sum_{j=0}^n \sum_{l=-j}^j \text{cov}_N(\xi_{i,k}^{(m)}, \xi_{j,l}^{(t)}) H_{i,k}(x, y) H_{j,l}(x, y), \quad m, t = 1, \dots, 4.$$

3 Численные результаты

Расчеты проводились для двух типов матриц рассеяния: молекулярной [5] и аэрозольной. Последняя рассчитывалась по теории Ми для следующих параметров аэрозольной среды: коэффициент преломления частиц $n = 1.331 - i1.310^{-4}$ (вода), распределение частиц по размерам логнормально с плотностью

$$f(r) = \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_g^2} \ln^2\left(\frac{r}{r_g}\right)\right), \quad r \in (0, 10\mu m), \quad r_g = 0.12\mu m, \quad \sigma_g = 0.5, \quad \text{длина волны излучения равна } 0.65\mu m.$$

Средний косинус угла рассеяния $\mu_0 = 0.7292$.

На рисунке 1 приведены полученные угловые распределения функции $\Phi_s^{(1)}(\mu)$, нормированной на полный поток P_H , в сравнении с ламбертовским угловым распределением, равным μ/π , а также степени поляризации $p(\mu)$ излучения, рассеянного вперед и назад слоями оптической толщины $H = 5$, $H = 10$. Источник излучения $\mathbf{I}_0 = (1, 0, 0, 0)^T$.

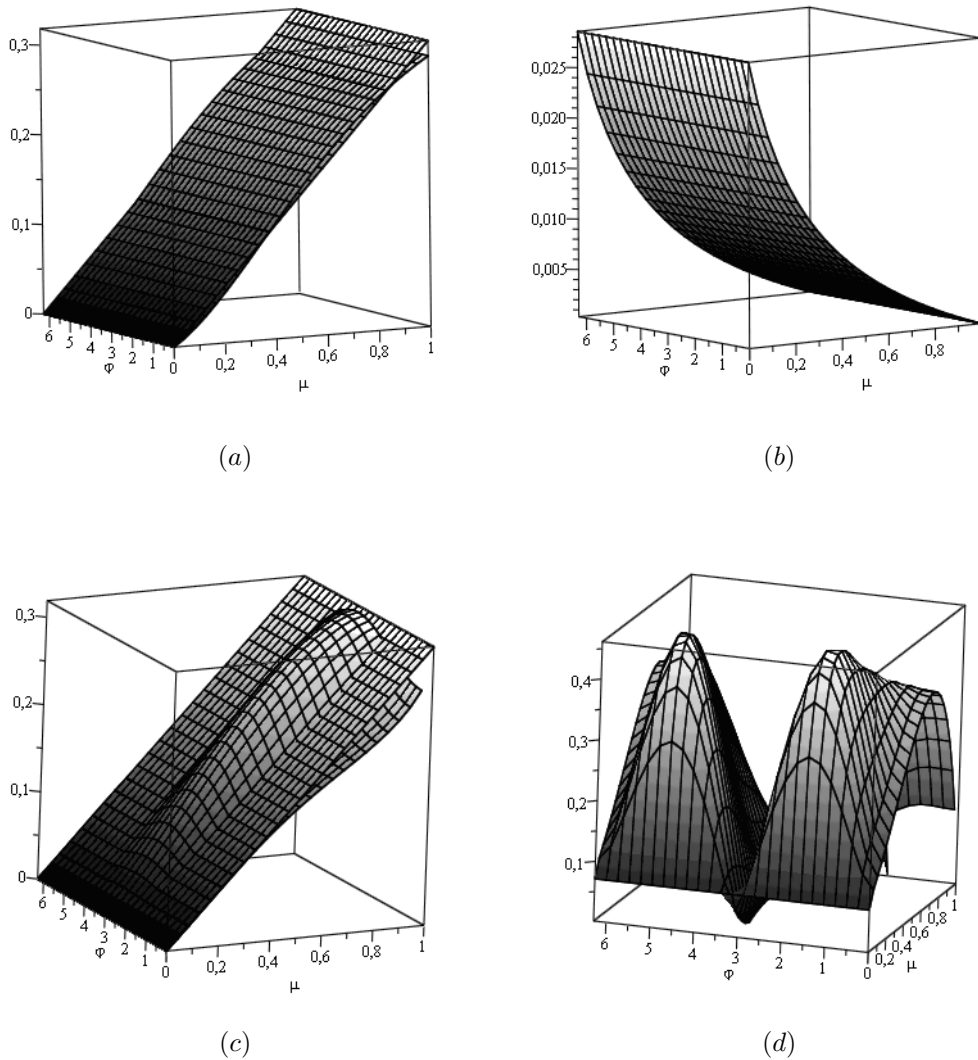


Рис. 1: (а) $\Phi_s^{(1)}(\mu)$. Проходящее излучение. Аэрозольная матрица. Угол падения 0° . $H = 10$; (б) $p(\mu)$. Проходящее излучение. Аэрозольная матрица. Угол падения 0° . $H = 10$; (в) $\Phi_s^{(1)}(\mu)$. Отраженное излучение. Молекулярная матрица. Угол падения 45° . $H = 5$; (д) $\Phi_s^{(1)}(\mu)$. Отраженное излучение. Молекулярная матрица. Угол падения 45° . $H = 5$.

Результаты расчетов согласуются с ранее полученными одномерными оценками угловых распределений интенсивности и степени поляризации, полученными в работе [6].

Заключение

В настоящей работе, на базе двумерного проекционного разложения построен алгоритм метода Монте—Карло для исследования пространственно-угловых характеристик поляризованного излучения. Указанный алгоритм может применяться для изучения как проходящего, так и отраженного излучения, причем, поскольку рассчитываются все компоненты вектора Стокса, возможно провести исследование всех поляризационных характеристик излучения. Получены двумерные угловые распределения интенсивности и степени поляризации излучения, проходящего и отраженного оптически толстым слоем рассеивающего и поглощающего вещества для произвольно падающего излучения. Отметим, что в настоящей статье не отражено решение специфической для метода Монте-Карло задачи среднеквадратической оптимизации рандомизированной проекционной оценки по критерию трудоемкости, т. е. среднего числа вычислительных операций, необходимых для достижения заданной точности. Однако, аналогично рассуждениям из работы [8] можно показать, что по этому критерию рандомизированная проекционная оценка может существенно превосходить оценку типа гистограммы, а также известные в теории методов Монте-Карло “локальные оценки” и “методы сопряженных блужданий”.

Список литературы

- [1] Сушкевич Т. А. Математические модели переноса излучения. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
- [2] Mahotkin O. A. Analysis of radiative transfer between surfaces by hemispherical harmonics //Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1996. V. 56, iss. 6, P. 869–879.
- [3] Gautron P., Krivanek J., Pattanaik S., Bouatouch K. A Novel Hemispherical Basis for Accurate and Efficient Rendering //Rendering Techniques 2004 (Proceedings of Eurographics Symposium on Rendering). 2004. V. 56, iss. 6, P. 321–330.
- [4] Смелов В. В. О полноте системы полусферических гармоник //Сиб.журн. вычисл. матем. 1998. Т. 1, № 4, С. 391–395.
- [5] Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте—Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 284 с.
- [6] Tracheva N. V., Ukhinov S. A. Numerical statistical study of the angular distribution of the polarized radiation scattered by medium //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2017. V. 32, iss. 6, P. 135–146.
- [7] Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ. 1961.
- [8] Михайлов Г. А., Трачева Н. В., Ухинов С. А. Рандомизированный проекционный метод для оценки угловых распределений поляризованного излучения на основе численного статистического моделирования //ЖВМиМФ. 2016. Т. 56, № 9, С. 1560—1570.

*Наталья Валерьевна Трачева — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
ст. преподаватель Новосибирского государственного университета;
e-mail: tnv@osmf.sscs.ru;*

*Сергей Анатольевич Ухинов — д.ф.-м.н., вед.науч.сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
проф. Новосибирского государственного университета;
e-mail: sau@sscc.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.