

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ ПРОСТЕЙШИМ ПОТОКОМ

А. А. Галилейская, Е. Ю. Лисовская

Национальный исследовательский Томский государственный университет, 634050, Томск

УДК 519.872

В работе рассматривается двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Заявки поступают на первую фазу системы в соответствии с простейшим потоком, после завершения обслуживания на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Каждая заявка имеет некоторый пакет данных (объем заявки). Время обслуживания не зависит от объема заявки. В работе получена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на фазах и их суммарного объема.

Ключевые слова: двухфазная бесконечнолинейная система массового обслуживания, требования случайного объема, простейший поток.

Введение

При моделировании работы современных технических систем, например, загрузки каналов передачи данных в сети [3], в качестве математической модели имеют применение системы массового обслуживания (СМО) требований случайного объема [1, 9].

СМО требований случайного объема так же позволяют решать задачи проектирования экономических и информационных процессов. В первых под объемом заявки понимаются денежные средства, которые клиент вносит на счет в банке. Во вторых объектом преобразования является информация, поступающая в виде сообщений случайного размера. Кроме того, задача исследования таких систем, как было замечено в работах [10, 11], играет важную роль при моделировании технических устройств, где необходимо рассчитать достаточный объем буфера для хранения данных.

В работах [6, 7] рассматривается СМО требований случайного объема вида $M/GI/\infty$. Для такой системы получена характеристическая функция двумерного распределения вероятностей числа заявок в системе и их суммарного объема.

Многофазные СМО [2] являются моделями, представляющими последовательную обработку заявок. Такая СМО представляет собой линейную последовательность из систем обслуживания, называемых фазами обслуживания.

Аналитические результаты для характеристик суммарного объема требований в многофазных системах ранее не были получены. Цель данной работы исследование суммарного объема требований на фазах в системе $M/(GI/\infty)^2$.

1 Постановка задачи

Рассмотрим двухфазную СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ . Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объемом $v > 0$, $G(y) = P\{v > y\}$ — функция распределения случайной величины v . Объемы различных

требований независимы. Продолжительность обслуживания заявок на первой фазе имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов, которую обозначим $B_1(x)$, и на второй фазе — $B_2(x)$. После обслуживания на первой фазе заявка с тем же объемом переходит на вторую фазу, после обслуживания на второй фазе заявка покидает систему и «уносит» с собой свой объем.

Пусть $i_k(t)$ — число заявок на k -ой фазе в момент времени t , $V_k(t)$ — суммарный объем заявок на k -ой фазе в момент времени t , где $k = 1, 2$ — номер фазы.

Поставим задачу нахождения характеристик четырехмерного случайного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [8].

Изобразим три параллельных оси времени, пронумерованных от 0 до 2 (Рисунок 1). Ось под номером 0 будет отображать события входящего потока, ось под номером 1 будет соответствовать первому просеянному потоку, ось под номером 2 — второму. Пусть имеется набор функций $S_1(t)$, $S_2(t)$, значения которых лежат в диапазоне $[0, 1]$ и обладают свойством $S_1(t) + S_2(t) \leq 1$ для любых t .

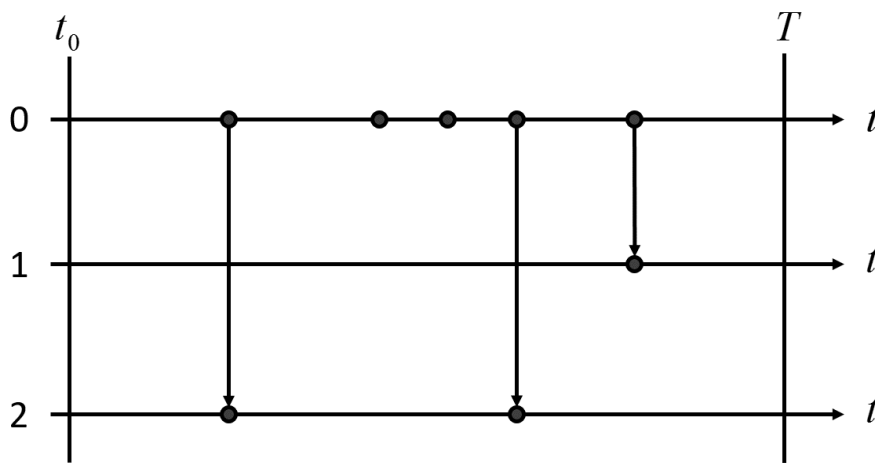


Рис. 1: Просеивание заявок входящего потока

Событие входящего потока может просеиваться только на одну из осей 1 или 2. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ к моменту времени T не закончит обслуживание на первой фазе, то есть просеется на ось 1 равна $S_1(t) = 1 - B_1(T - t)$. Вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t > t_0$ к моменту времени T закончит обслуживание на первой фазе и не закончит на второй, то есть просеется на ось 2 равна $S_2(t) = B_1(T - t) - B_2^*(T - t)$, где $B_2^*(\tau) = (B_1 * B_2)(\tau)$ — свертка функций распределения $B_1(x)$, $B_2(x)$ длительности обслуживания на фазах системы. Причем заявка может не просеиваться ни на одну из фаз с вероятностью $S_0(t) = 1 - S_1(t) - S_2(t)$, то есть к моменту времени T заявка закончит обслуживание на обеих фазах и покинет систему.

Обозначим через $n_k(t)$ — число событий, наступивших на k -ой оси просеянного потока до момента t , $W_k(t)$ — суммарный объем просеянных заявок на k -ю ось.

Как показано в [5], многомерное распределение вероятностей числа заявок на стадиях системы в момент времени T совпадает с многомерным распределением вероятностей числа просеянных заявок на соответствующие оси:

$$P\{i_1(T) = m_1, i_2(T) = m_2\} = P\{n_1(T) = m_1, n_2(T) = m_2\}$$

для любых $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно показать, что для исследуемого процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ справедливо:

$$\begin{aligned} P\{i_1(T) = m_1, V_1(T) < z_1, i_2(T) = m_2, V_2(T) < z_2\} = \\ = P\{n_1(T) = m_1, W_1(T) < z_1, n_2(T) = m_2, W_2(T) < z_2\} \end{aligned} \quad (1)$$

для любых $m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots$ и $z_1, z_2 > 0$. Будем использовать равенство (1) для исследования процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ с помощью исследования процесса $\{n_1(t), W_1(t), n_2(t), W_2(t)\}$.

2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение для распределения вероятностей двумерного Марковского процесса $P(n_1, w_1, n_2, w_2, t) = P\{n_1(t) = n_1, W_1(t) < w_1, n_2(t) = n_2, W_2(t) < w_2\}$. Для этого распределения составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности получим:

$$P(n_1, z_1, n_2, z_2, t + \Delta t) = P(n_1, z_1, n_2, z_2, t) (1 - \lambda \Delta t) + P(n_1, z_1, n_2, z_2, t) (1 - S_1(t) - S_2(t)) + \lambda \Delta t S_1(t) \int_0^{z_1} P(n_1 - 1, z_1 - y, n_2, z_2, t) dG(y) + \lambda \Delta t S_2(t) \int_0^{z_2} P(n_1, z_1, n_2 - 1, z_2 - y, t) dG(y) + o(\Delta t) \quad (2)$$

при этом будем считать, что

$$P(n_1, z_1, n_2, z_2, t_0) = \begin{cases} 1, & n_1 = z_1 = n_2 = z_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из (2) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n_1, z_1, n_2, z_2, t)}{\partial t} = & \lambda \left[S_1(t) \left(\int_0^{z_1} P(n_1 - 1, z_1 - y, n_2, z_2, t) dG(y) - P(n_1, z_1, n_2, z_2, t) \right) + \right. \\ & \left. + S_2(t) \left(\int_0^{z_2} P(n_1, z_1, n_2 - 1, z_2 - y, t) dG(y) - P(n_1, z_1, n_2, z_2, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

3 Характеристическая функция

Введем характеристическую функцию вида:

$$h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{ju_1 n_1} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 z_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2 n_2} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 z_2} P(n_1, dz_1, n_2, dz_2, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} e^{ju_1} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{ju_1(n_1-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 y} e^{j\alpha_1(z_1-y)} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2 n_2} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 z_2} \int_0^{z_1} P(n_1 - 1, d(z_1 - y), n_2, dz_2) dG(y) = \\ = e^{ju_1} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 y} \sum_{n_1=1}^{\infty} e^{ju_1(n_1-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1(z_1-y)} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{ju_2 n_2} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 z_2} P(n_1 - 1, d(z_1 - y), n_2, dz_2) dG(y) = \\ = e^{ju_1} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 y} h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) dG(y) = e^{ju_1} G^*(\alpha_1) h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} e^{ju_2} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 z_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 y} e^{j\alpha_2(z_2-y)} \int_0^{z_2} P(n_1, dz_1, n_2 - 1, d(z_2 - y)) dG(y) = \\ = e^{ju_2} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 y} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_1 z_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{ju_2(n_2-1)} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2(z_2-y)} P(n_1, dz_1, n_2 - 1, d(z_2 - y)) dG(y) = \\ = e^{ju_2} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_2 y} h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) dG(y) = e^{ju_2} G^*(\alpha_2) h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t), \end{aligned}$$

где

$$G^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha y} dG(y),$$

можно записать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)}{\partial t} = \lambda h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) [S_1(t) (e^{ju_1} G^*(\alpha_1) - 1) + S_2(t) (e^{ju_2} G^*(\alpha_2) - 1)]. \quad (4)$$

Найдем решение дифференциального уравнения (4):

$$\frac{dh(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)}{h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t)} = \lambda [S_1(t) (e^{ju_1} G^*(\alpha_1) - 1) + S_2(t) (e^{ju_2} G^*(\alpha_2) - 1)] dt,$$

очевидно, оно имеет вид:

$$h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, t) = \exp \left\{ \lambda \left[(e^{ju_1} G^*(\alpha_1) - 1) \int_{t_0}^t S_1(\tau) d\tau + (e^{ju_2} G^*(\alpha_2) - 1) \int_{t_0}^t S_2(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Полагая $t = T$ и $t_0 \rightarrow -\infty$ для характеристической функции четырехмерного процесса $\{i_1(t), V_1(t), i_2(t), V_2(t)\}$ в стационарном режиме получим:

$$h(u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2) = \exp \left\{ \lambda [(e^{ju_1} G^*(\alpha_1) - 1) b_1 + (e^{ju_2} G^*(\alpha_2) - 1) b_2] \right\},$$

где

$$b_1 = \int_0^{\infty} (1 - B_1(\tau)) d\tau,$$

$$b_2 = \int_0^{\infty} \left(B_1(\tau) - \int_0^{\tau} B_2(\tau - y) dB_1(y) \right) d\tau.$$

Аналогично, для двумерного процесса суммарного объема заявок на фазах $\{V_1(t), V_2(t)\}$ характеристическая функция распределения вероятностей в стационарном режиме имеет вид:

$$h(\alpha_1, \alpha_2) = \exp \{ \lambda b_1 (G^*(\alpha_1) - 1) + \lambda b_2 (G^*(\alpha_2) - 1) \},$$

которая совпадает с [4].

Заключение

В работе рассмотрена двухфазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на фазах. Заявки поступают на первую фазу системы в соответствии с простейшим потоком, после завершения обслуживания на первой фазе каждая заявка переходит на вторую фазу. Каждая заявка имеет некоторый пакет данных (объем заявки). Время обслуживания не зависит от объема заявки. В работе получена характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на фазах и их суммарного объема.

Список литературы

- [1] Morozov E.V., Potakhina L.V. Speed-Up estimation of a system with random volume customers // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах. Под общей редакцией В.М. Вишневого и К.Е. Самуйлова. 2016. С. 334–336.
- [2] Reich E. Waiting Times When Queues are in Tandem // Annals of Mathematical Statistics. 1957. V. 28, Iss. 3, P. 768–773.

- [3] Вихрова О.Г., Сопин Э.С. Анализ показателей качества сети LTE с помощью систем массового обслуживания с ограниченным ресурсом и случайными требованиями // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 185–191.
- [4] Галилейская А.А. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в двухфазной системе массового обслуживания с простейшим входящим потоком // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2017: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. с. 105.
- [5] Грачев В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2012. Т. 2. № 2 (26). С. 248–251.
- [6] Лисовская Е.Ю. Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в системе $M/GI/\infty$ // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016 Новосибирский государственный университет. 2016. С. 108.
- [7] Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида $M/GI/\infty$ // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем материалы Всероссийской конференции с международным участием. Российский университет дружбы народов. 2016. С. 28–30.
- [8] Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.
- [9] Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125–132.
- [10] Тихоненко О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций. Минск : БГУ, 2008.
- [11] Тихоненко О.М. Системы обслуживания требований случайной длины с ограничениями // Автоматика и телемеханика., 1991, № 10, С. 126–134.

*Анастасия Александровна Галилейская — студент Национального исследовательского
Томского государственного университета;
e-mail: lusa.nastya@mail.ru;*

*Екатерина Юрьевна Лисовская — аспирант Национального исследовательского
Томского государственного университета;
e-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru.*

Дата поступления — 12 мая 2017 г.