

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ЭКВИРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А. В. Войтишек^{1,2}, Д. А. Прасол²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.676

В данной работе сформулирован аналог принципа эквираспределения для стохастической сетки. Установлено соответствие между принципом эквираспределения и методом выборки по важности, широко используемом в задачах многомерного численного стохастического интегрирования.

Ключевые слова: адаптивная сетка, принцип эквираспределения, вероятностная плотность распределения, метод выборки по важности.

Введение

При численном решении ряда прикладных задач целесообразно использовать адаптивные сетки, в которых сгущения узлов в подобластях позволяют более эффективно получать приближение решения.

В данной работе обсуждается применение и численная реализация адаптивных сеток в *алгоритмах численного интегрирования*. При этом особое внимание будет уделено решению *многомерных задач*, в которых целесообразно применять *стохастические (вероятностные) алгоритмы построения адаптивных сеток*.

В Разделе 1 приведены рассуждения о том, что в основном принципе построения адаптивных сеток — *принципе эквираспределения* (см., например, [1]) — так называемая *управляющая функция* имеет основные свойства *вероятностной плотности распределения* (см., например, [2]). Сформулирован *вероятностный аналог принципа эквираспределения* (в интегральной форме) для случая, когда управляющая функция в точности является вероятностной плотностью, индуцирующей неупорядоченный адаптивный набор точек (как в *алгоритме выборки по важности* — см., например, [3]). В Разделе 2 приведен краткий анализ использования стохастических адаптивных сеток при построении *квадратурных* и *кубатурных формул* для приближенного вычисления интегралов (см., например, [3, 4]), в том числе, рассмотрены особенности компьютерной реализации упомянутого выше алгоритма выборки по важности. В Заключение сформулированы основные выводы данной работы.

Отметим следующую особенность представления материала в данной работе. Хотя речь здесь идет об алгоритмах, особенно эффективных для *многомерных задач*, ряд принципиальных аналитических рассуждений и рекомендаций в тексте более подробно сделан для *одномерного* случая. Перенос соответствующих суждений на многомерный случай технически не сложен, однако он требует использования тяжеловесных многомерных обозначений и рассуждений, что приводит к затруднениям при восприятии основных идей данной работы.

1 Вероятностный аналог принципа эквираспределения

При построении адаптивных сеток, как правило, реализуется тот или иной вариант *принципа эквираспределения* (см., например, [1]).

Этот принцип связан с построением невырожденного отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$, которое переводит зафиксированную (как правило, равномерную) сетку на «вычислительной» области Q в адаптивную сетку на заданной «физической» области X , и удовлетворяет соотношению:

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))J(\mathbf{y}) \equiv H_1 = \text{const}, \quad (1.1)$$

где $J(\mathbf{y})$ — это якобиан отображения, H_1 — положительная константа, $f(\mathbf{x})$ — специально выбранная **управляющая функция**, такая, что

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ при } \mathbf{x} \in X \text{ и } f(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x} \notin X. \quad (1.2)$$

На практике, как правило, рассматриваются случаи, когда $X \subseteq \mathbf{R}^d$, а $Q \subseteq \mathbf{R}^s$, где $1 \leq s \leq d$.

В дальнейшем будем полагать, что функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна или кусочно-непрерывна, и выполнено соотношение

$$\int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \quad (1.3)$$

Свойствами (1.2), (1.3) обладает, в частности, **вероятностная плотность распределения** $f_{\xi}(\mathbf{x})$ некоторого случайного вектора (d -мерной случайной величины) ξ (см., например, [2]). Но более существенным свойством вероятностной плотности является то, что она определяет «сгущения» выборочных значений (реализаций) ξ_j случайного вектора ξ .

Управляющая функция $f(\mathbf{x})$, обладающая свойствами (1.1) — (1.3), также определяет «сгущения» узлов реализуемой с ее помощью адаптивной сетки.

Покажем это для простейшего одномерного случая, когда $d = 1$ и $\mathbf{x} = x \in X \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{y} = y \in Q = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

Построение адаптивной сетки

$$\tilde{X}^{(M)} = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M\}; \quad x_j = x(y_j), \quad y_j = j\Delta y, \quad \Delta y = 1/M; \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

в этом случае связано с рассмотрением частного случая соотношения (1.1):

$$f(x(y))x'_y(y) = H_2 = \text{const},$$

где $x'_y(y)$ обозначает соответствующую производную по переменной y (это в данном случае якобиан отображения $x = x(y)$).

Интегрируя это соотношение на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$ и предполагая непрерывность функции $f(x)$ на этом отрезке, получаем

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(z) dz = H_2(y_{j+1} - y_j) \quad (1.4)$$

или

$$f(\tilde{x}_j)(x_{j+1} - x_j) = H_3, \quad \text{где } \tilde{x}_j \in [x_j, x_{j+1}], \quad H_3 = H_2\Delta y = \frac{H_2}{M}; \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (1.5)$$

Таким образом, для заданного количества узлов M , для подобластей, в которых функция $f(x)$ велика, длины отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ малы.

Учитывая соотношения (1.2), (1.3), (1.5) можно назвать функцию $f(x)$ **плотностью распределения узлов адаптивной сетки**.

Теперь рассмотрим одномерную неупорядоченную *стохастическую* адаптивную сетку для метода Монте-Карло (см. [3], а также Раздел 2 данной работы)

$$\Xi^{(n)} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \quad (1.6)$$

где ξ_i — независимые выборочные значения случайной величины ξ , имеющей плотность распределения $f_{\xi}(z)$.

Рассмотрим также соответствующий аналог левой части соотношения (1.4) (которое можно назвать *интегральной формой принципа эквираспределения для стохастической сетки* (1.6)):

$$I^{(i)} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f_{\xi}(z) dz = F_{\xi}(\xi_{i+1}) - F_{\xi}(\xi_i); \quad i = 1, \dots, n-1;$$

здесь $F_{\xi}(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(z) dz$ — *функция распределения* случайной величины ξ (см., например, [2]).

Хорошо известно (см., например, [3]), что случайная величина $\alpha = F_\xi(\xi)$ имеет равномерное распределение в интервале $(0, 1)$.

Таким образом, случайная величина $I^{(i)}$ равна

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f_\xi(z) dz = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \quad (1.7)$$

для любой плотности распределения $f_\xi(z)$ и любых случайных узлов ξ_i и ξ_{i+1} ; здесь $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ независимые стандартные случайные величины [3], равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$.

Используем следующее утверждение.

ЛЕММА (см., например, [2]). Сумма $\eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ двух независимых случайных величин $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ с плотностями распределения $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$ имеет плотность распределения в виде свертки

$$f_{\eta^{(1)}+\eta^{(2)}}(z) = (f_{\eta^{(1)}} * f_{\eta^{(2)}})(z) = \int f^{(1)}(u)f^{(2)}(z-u) du. \quad (1.8)$$

Из Леммы несложно получить, что случайная величина $I^{(i)}$ имеет «универсальное» (для различных $i = 1, \dots, n-1$) распределение с плотностью

$$f_{I^{(i)}}(z) = f_{\alpha^{(1)}+(-\alpha^{(2)})}(z) = \beta^{(1)}(z) = \begin{cases} 1+z & \text{для } -1 \leq z \leq 0, \\ 1-z & \text{для } 0 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.9)$$

здесь $\beta^{(1)}(z)$ — *B-сплайн первого порядка* (или «функция-крышка» — см., например, [5]).

Таким образом, соотношение (1.7) можно назвать **вероятностным аналогом принципа эквивалентности для сетки** (1.6).

Индукцией по размерности d , используя разложение совместной плотности распределения случайного вектора в произведение условных плотностей (см., например, [2, 3]), можно получить следующий аналог формулы (1.7) для одинаково распределенных (согласно плотности $f(\mathbf{z}) = f(z^{(1)}, \dots, z^{(d)})$) d -мерных случайных векторов $\xi_1 = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(d)})$ и $\xi_2 = (\xi_2^{(1)}, \dots, \xi_2^{(d)})$:

$$\int_{\xi_1^{(1)}}^{\xi_2^{(1)}} \dots \int_{\xi_1^{(d)}}^{\xi_2^{(d)}} f(z^{(1)}, \dots, z^{(d)}) dz^{(1)} \dots dz^{(d)} = \alpha^{(1)} \times \dots \times \alpha^{(d)} - \alpha^{(d+1)} \times \dots \times \alpha^{(2d)}, \quad (1.10)$$

где $\alpha^{(s)}$; $s = 1, \dots, 2d$ — независимые стандартные (равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$) случайные величины.

Заметим, что формула (1.10) и ее обоснование подтверждает высказанный во Введении тезис о том, что многомерные аналоги полученных в данной работе одномерных результатов (и их обоснование) имеют достаточно громоздкий вид. Такой громоздкий вид будет иметь и многомерный аналог формулы (1.9). Здесь для получения плотности распределения случайной величины из правой части соотношения (1.10) следует использовать известные формулы для суммы (формула (1.8)) и произведения

$$f_{\eta^{(1)} \times \eta^{(2)}}(z) = \int f^{(1)}\left(\frac{z}{u}\right) f^{(2)}(u) \frac{du}{|u|}$$

независимых случайных величин $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ с известными плотностями распределения $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$ (см., например, [2]).

2 Использование адаптивных сеток в стохастических алгоритмах численного интегрирования

Рассмотрим задачу приближенного вычисления многократного интеграла

$$I = \int_X g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Известно (см., например, [3, 4]), что для достаточно больших размерностей d (конкретнее, для $d \geq 4$ [3]) наиболее эффективным алгоритмом вычисления интеграла I является *весовой метод Монте-Карло*, основанный на представлении интеграла в виде математического ожидания

$$I = \int \frac{g(\mathbf{x})}{f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})} f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}\zeta, \quad \zeta = \frac{g(\boldsymbol{\xi})}{f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi})},$$

где случайный вектор $\boldsymbol{\xi}$ распределен согласно выбираемой плотности $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$, с последующим численным приближением интеграла I согласно *закону больших чисел* (см., например, [2, 3])

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i, \quad \zeta_i = \frac{g(\boldsymbol{\xi}_i)}{f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_i)}; \quad (2.1)$$

здесь $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ — реализуемые на компьютере выборочные значения случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$.

Одним из принципиальных преимуществ метода (2.1) состоит в том, что он допускает корректную аналитическую оптимизацию на основе принципа

«тот алгоритм эффективнее, который позволяет получить заданный уровень погрешности за меньшее время счета»,

в то время как «детерминированные» методы численного интегрирования — квадратурные и кубатурные формулы — сравниваются (не вполне корректно) только по зависимости погрешности от шага сетки (см., например, [4]).

Затраты (время счета) алгоритма (2.1) равны величине

$$s = n \times t, \quad (2.2)$$

где t — среднее время для получения выборочного значения $\zeta_i = g(\boldsymbol{\xi}_i)/f_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}_i)$. Как несложно показать (см., например, [3]), при фиксированном уровне погрешности величина (2.2) пропорциональна величине *трудоемкости*

$$S = \mathbf{D}\zeta \times t; \quad (2.3)$$

здесь $\mathbf{D}\zeta$ — дисперсия случайной величины («*весовой оценки*») ζ .

В свою очередь, при оптимизации алгоритма (2.1) на основании минимизации величины (2.3) широко используется **принцип выборки по важности**, состоящий в том, что среди алгоритмов (2.1), имеющих примерно одинаковое среднее время t реализации выборочных значений ζ_i , тот имеет меньшую трудоемкость S из (3.3), для которого

$$f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \approx H_4 |g(\mathbf{x})|; \quad H_4 = \frac{1}{\int |g(\mathbf{u})| d\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Термин «*выборка по важности*» соответствует английскому термину «*importance sampling*». Такое название объясняется тем, что если $f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$ пропорциональна модулю подынтегральной функции $g(\mathbf{x})$, то в тех частях области X , в которых $|g(\mathbf{x})|$ больше и вклад которых в интеграл I более существен, будет выбираться больше случайных точек $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$.

Таким образом, в алгоритме выборки по важности (2.1), (2.4) реализуется **адаптивная стохастическая сетка**

$$\Xi^{(n)} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n\}. \quad (2.5)$$

Адаптивность сетки (2.5) определяется, кроме соотношения (2.4), тем, что распределения случайных величин

$$H_4 \int_{\boldsymbol{\xi}_i^{(1)}}^{\boldsymbol{\xi}_j^{(1)}} \dots \int_{\boldsymbol{\xi}_i^{(d)}}^{\boldsymbol{\xi}_j^{(d)}} |g(z^{(1)}, \dots, z^{(d)})| dz^{(1)} \dots dz^{(d)},$$

где $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(d)})$, $\boldsymbol{\xi}_j = (\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(d)})$; $i, j = 1, \dots, n$; $i \neq j$, близки к распределению случайной величины (1.10), т. е. приближенно выполнены соответствующие аналоги принципа эквираспределения.

Что касается конкретных алгоритмов компьютерной реализации выборки (2.5), то здесь можно воспользоваться соображениями из Раздела 3.2.4 учебника [3] (более детальное представление этих соображений

содержится в статье [6]). Эти соображения состоят в том, что в качестве плотности $f_{\xi}(\mathbf{x})$ целесообразно использовать приближения модуля подынтегральной функции $g(\mathbf{x})$ вида

$$f_{\xi}(\mathbf{x}) = H_5 L_M |g(\mathbf{x})| = H_5 \sum_{j=1}^M w_j(\mathbf{g}) \chi_j(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Здесь $\{\chi_j(\mathbf{x})\}$ — заданные *базисные* функции, согласованные с заданными узловыми точками $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$, коэффициенты $\{w_j(\mathbf{g})\}$ зависят от значений $\mathbf{g} = (|g(\mathbf{x}_1)|, \dots, |g(\mathbf{x}_M)|)$, а H_5 — нормирующая константа.

Здесь возникают требования *моделируемости* приближения $L_M |g(\mathbf{x})|$, состоящие в следующем [3, 6]. Из соотношения (2.6) следует, что для численного моделирования адаптивных случайных узлов (2.5) можно использовать алгоритм *метода суперпозиции* (см., например, [3]).

АЛГОРИТМ. 1. *Используя один из алгоритмов моделирования целочисленной случайной величины η (см., например, [3]) с распределением*

$$\mathbf{P}\{\eta = j\} = p_j, \quad p_j = \frac{H_5 w_j(\mathbf{g})}{H_6^{(j)}}, \quad H_6^{(j)} = \int \chi_j(\mathbf{u}) d\mathbf{u}; \quad j = 1, \dots, M,$$

реализуем выборочное значение $\eta_i = m$; $i = 1, \dots, n$.

2. *Реализуем выборочное значение ξ_i согласно плотности*

$$f_m(\mathbf{x}) = H_6^{(m)} \chi_m(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbf{R}^d. \quad (2.7)$$

Для корректной реализации Алгоритма требуется неотрицательность коэффициентов $\{w_j(\mathbf{g})\}$. Кроме того, базисные функции $\{\chi_j(\mathbf{x})\}$ должны быть пропорциональными плотностям распределения случайных векторов вида (2.7), для которых имеются эффективные алгоритмы реализации выборочных значений. Последние два требования определяют моделируемость приближения $L_M |g(\mathbf{x})|$ из соотношения (2.6).

Проведенные в работе [6] исследования известных приближений вида (2.6) показали, что требованиям моделируемости наилучшим образом удовлетворяет *конечно-элементная аппроксимация Стренга—Фикса* [5], базисные функции строятся следующим образом.

Предполагается, что в \mathbf{R}^d задана равномерная прямоугольная сетка с шагом h и каждый узел \mathbf{x}_j , используемый в аппроксимации (2.6), можно описать как

$$\mathbf{x}_j = (k_{(j)}^{(1)} h, \dots, k_{(j)}^{(d)} h),$$

где $k_{(j)}^{(s)}$ — целые числа. Соответствующая узлу \mathbf{x}_j базисная функция $\chi_j(\mathbf{x})$ имеет специальный вид

$$\chi_j(\mathbf{x}) = \beta^{(r)}\left(\frac{x^{(1)}}{h} - k_{(j)}^{(1)}\right) \times \dots \times \beta^{(r)}\left(\frac{x^{(d)}}{h} - k_{(j)}^{(d)}\right); \quad (2.8)$$

здесь $\beta^{(r)}(z)$ — B -сплайн r -го порядка.

Для базиса Стренга—Фикса (2.8) плотность (2.7), используемая в Алгоритме, имеет вид

$$f_m(\mathbf{x}) = f_m^{(1)}\left(\frac{x^{(1)}}{h}\right) \times \dots \times f_m^{(d)}\left(\frac{x^{(d)}}{h}\right); \quad f_m^{(s)}\left(\frac{x^{(s)}}{h}\right) = \frac{1}{h} \beta^{(r)}\left(\frac{x^{(s)}}{h} - k_{(m)}^{(s)}\right); \quad s = 1, \dots, d,$$

т. е. в данном случае $H_6^{(m)} = h^{-d}$.

Это означает, что при моделировании вектора $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(d)})$ следует учесть, что компоненты $\xi_i^{(s)}$ независимы и моделируются по формуле

$$\xi_i^{(s)} = h \psi_0^{(r)} + k_{(m)}^{(s)} h, \quad (2.9)$$

где $\psi_0^{(r)}$ — выборочное значение случайной величины $\psi^{(r)}$, имеющей плотность распределения $\beta^{(r)}(z)$.

Учитывая рекуррентное определение B -сплайна r -го порядка

$$\beta^{(r)}(z) = (\beta^{(r-1)} * \beta^{(0)})(z),$$

где

$$\beta^{(0)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{для } -1/2 \leq z \leq 1/2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.10)$$

а также Лемму и то обстоятельство, что функция $\beta^{(0)}(z)$ из (2.10) является плотностью распределения случайной величины $\alpha^{(0)} - 1/2$ (здесь $\alpha^{(0)}$ — стандартная случайная величина), несложно обосновать моделирующую формулу

$$\psi_0^{(r)} = \left(\alpha_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\alpha_r - \frac{1}{2}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r - \frac{r+1}{2}. \quad (2.11)$$

Что касается практического применения Алгоритма с формулами (2.9), (2.11), то случай $r = 0$ (кусочно-постоянное приближение (2.6)) подробно рассмотрен в работе [7].

Трудности использования «гладких» приближений (2.6), (2.8) (для достаточно больших r) представлены в диссертации [8] (в частности, подробно рассмотрен случай кубических сплайнов для $r = 3$). Эти трудности связаны, в частности, с вычислением коэффициентов $\{w_j(\mathbf{g})\}$, дающих высокий порядок аппроксимации $L_M|g(\mathbf{x})|$ (здесь может нарушаться требование положительности этих коэффициентов).

В работе [6] нами показано, что наиболее эффективным является применение т. н. *мультилинейного приближения* (2.6) с базисными функциями (2.8) и сплайнами первого порядка (1.8).

Особо отметим, что в практических вычислениях вместо формулы (2.11), которая для случая $r = 1$ имеет вид

$$\psi_0 = \alpha_1 + \alpha_2 - 1,$$

целесообразно использовать обоснованную в Разделе 1 данной работы более экономичную формулу

$$\psi_0 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.12)$$

(см. соотношение (1.9)).

Для развития теории и приложений конструктивных алгоритмов выборки по важности целесообразны дополнительные исследования моделируемых базисов, отличных от конечных элементов (2.8). Особую роль здесь играет построение экономичных реализаций соответствующих алгоритмов с целью их включения в геометрические вычислительные модули (подобно тому, как это сделано в работе [7]).

Заключение

Перечислим основные результаты данной работы.

1. Получен вероятностный аналог принципа эквираспределения — см. соотношения (1.7), (1.9), (1.10).
2. Показано, что метод выборки по важности, широко используемый в задачах многомерного численного стохастического интегрирования, связан с формированием сетки (2.5), адаптивной в том смысле, что плотность распределения узлов пропорциональна модулю подынтегральной функции.
3. Приведен конструктивный алгоритм метода суперпозиции с конкретным аппроксимационным базисом (2.8) и с эффективными (экономичными) моделирующими формулами (2.9), (2.12).

Заметим также, что в нашей работе [9] предложен подход к выбору плотности распределения адаптивных узлов в стохастическом итерационном алгоритме построения адаптивных сеток (схеме Т. Кохонена [10]), используемом в задаче численного приближения функций, и на простом примере показана эффективность этого подхода.

Список литературы

- [1] Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И. Разностные схемы на адаптивных сетках. Ч. 1, 2. Новосибирск: НГУ, 2009.
- [2] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с.
- [3] Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006. 368 с.

- [4] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1959. 464 с.
- [5] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
- [6] Voytishek A. V., Kablukova E. G. Using the approximation functional bases in Monte Carlo methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2003. V. 18, № 6. P. 521–542.
- [7] Бессмельцев М. В., Войтишек А. В. Модификации геометрических программных модулей, связанные с построением моделируемых вероятностных плотностей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 4. С. 19–36.
- [8] Милосердов В. В. Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями. Новосибирск, 2006 (Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-матем. наук: 01.01.07 — вычислительная математика / НГУ). 83 с.
- [9] Войтишек А. В., Прасол Д. А. О выборе плотностей распределения узлов адаптивных сеток в стохастических алгоритмах многомерного интегрирования и приближения функций // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 1. С. 3–16.
- [10] Kohonen T. Self-Organizing Maps. Springer-Verlag, 2001. 502 p.

Антон Вацлавович Войтишек — д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: vav@osmf.ssc.ru;

Денис Александрович Прасол — студент Новосибирского государственного университета;
e-mail: duohus.1993@inbox.ru.

Дата поступления — 10 мая 2017 г.