

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Т. А. Аверина<sup>1,2</sup>, К. А. Рыбаков<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

<sup>3</sup> *Московский авиационный институт, 125993, Москва*

УДК 519.676

В работе представлен статистический алгоритм решения задачи фильтрации и прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения. В основе разработанного алгоритма лежит моделирование траекторий специального случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий, обсуждаются упрощенные варианты предложенного статистического алгоритма.

**Ключевые слова:** стохастическая система, фильтрация, прогнозирование, апостериорная плотность, ветвящиеся процессы, статистический алгоритм.

## Введение

В работе рассматривается задача, связанная с фильтрацией и прогнозированием сигналов в нелинейных стохастических системах с пуассоновской составляющей, т.е. в классе диффузионно-скачкообразных динамических систем. Напомним, что методы, предложенные ранее для диффузионных динамических систем [9, 12], были применены затем для диффузионно-скачкообразных динамических систем. В частности, постановка рассматриваемой задачи изложена в [3, 5], а в [4] был приведен упрощенный алгоритм решения задач фильтрации и прогнозирования с неточным моделированием пуассоновского потока, связанного в том числе и с пуассоновской составляющей в модели динамической системы, а также моделированием обрывов и ветвлений траекторий случайных процессов. Представленная работа обобщает полученные ранее результаты, ее основная цель состоит в построении алгоритма решения задач фильтрации и прогнозирования, в котором применяется точное моделирование пуассоновского потока. Разработанные алгоритмы можно включить в семейство методов частиц [14, 15].

## 1 Задача фильтрации и прогнозирования

Рассматриваются стохастические динамические системы, которые задаются двумя векторными уравнениями. Первое уравнение описывает модель объекта наблюдения и является стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито с пуассоновской составляющей:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

В уравнении (1) используются следующие обозначения:  $X \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$  — время;  $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерная вектор-функция,  $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-05052-а и 17-08-00530-а).

— матричная функция  $n \times s$ ;  $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  — величина опережения по времени для прогнозирования, удовлетворяющая условию (это условие носит формальный характер и при необходимости может быть сформулировано иным образом)

$$\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T);$$

$W(t)$  —  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального вектора состояния  $X_0$ , заданного плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ ;  $Q(t)$  — общий пуассоновский процесс, заданный в виде

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

Для последнего соотношения  $P(t)$  — неоднородный пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$ , а  $\Delta_k$  — независимые случайные векторы из  $\mathbb{R}^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta)$ . Таким образом, в случайные моменты времени вектор состояния  $X$  получает приращения  $\Delta_k$  и условная вероятность разрыва траектории случайного процесса  $X(t)$  на промежутке  $[t, t + \Delta t]$  при условии  $X(t) = x$  задается равенством

$$\mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \lambda(t, x) \Delta t + o(\Delta t).$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ , характеризующая распределение  $\Delta_k$  при условии  $X(\tau_k - 0) = x$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$ . Наряду с  $\psi(\tau_k, \Delta | x)$  введем плотность вероятности  $\eta(\tau_k, x | \xi)$ , характеризующую распределение  $X(\tau_k)$  при условии  $X(\tau_k - 0) = \xi$ , т.е.  $\Delta_k = X(\tau_k) - \xi$ .

Второе уравнение рассматриваемой стохастической системы наблюдения задает модель измерителя, оно представляется в виде [8]:

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (2)$$

где  $Z \in \mathbb{R}^m$  — вектор измерений,  $t \in [t_0, T]$ ;  $c(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $m$ -мерная вектор-функция,  $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$  — матричная функция  $m \times d$ , для которой соответствующая матрица диффузии невырождена;  $N(t)$  —  $d$ -мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от  $W(t)$  и от начального вектора состояния  $X_0$ .

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки  $\hat{X}(t + \Delta(t))$  по результатам измерений  $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$ , накопленных к текущему моменту времени  $t$ .

Следуя [9], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда

$$\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Z_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t + \Delta(t), x | Z_0^t) dx,$$

где  $\mathbb{M}$  означает математическое ожидание,  $p(t + \Delta(t), x | Z_0^t)$  — апостериорная плотность вероятности вектора состояния  $X$  в будущий момент времени  $t + \Delta(t)$ .

Можно рассматривать, например, следующие варианты задачи прогнозирования:

- а) прогнозирование с фиксированным упреждением, т.е.  $\Delta(t) = \Delta = \text{const}$ ;
- б) прогнозирование в фиксированный момент времени  $T' \geq T$ , т.е.  $\Delta(t) = T' - t$ .

При  $\Delta(t) = 0$  задача нахождения оценки  $\hat{X}(t)$  по результатам измерений  $Z_0^t$  — это задача фильтрации [8, 13].

## 2 Численный метод

Уравнения для решения задач фильтрации и прогнозирования были приведены в работах [3, 5, 11], это уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи и уравнение Колмогорова–Феллера. Здесь их приводить не будем и перейдем сразу к построению алгоритма фильтрации и прогнозирования.

Основу алгоритма составляет моделирование ансамбля траекторий исходной стохастической системы, заданной уравнением (1), причем для этапа прогнозирования такое моделирование осуществляется непосредственно по алгоритму решения задачи анализа [2], а на этапе фильтрации моделируются траектории стохастической системы, заданной тем же уравнением (1), но с дополнительными условиями: обрывами и ветвлениями, моменты времени появления которых статистически зависят от текущих измерений [11]. По полученному ансамблю траекторий методами математической статистики можно найти и указанную выше

апостериорную плотность вероятности, и требуемые оценки вектора состояния, т.е. решение задачи прогнозирования.

Случайный процесс, траектории которого могут иметь разрывы, обрывы и ветвления, будем называть специальным, чтобы отличать его от решения уравнения (1). Наличие разрывов, а также обрывов и ветвлений траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  усложняет алгоритм их моделирования. Так, регулярную (с постоянным шагом) или нерегулярную (с переменным шагом) сетку для численного решения стохастического дифференциального уравнения без пуассоновской составляющей:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (3)$$

необходимо дополнить узлами, которые соответствуют двум пуассоновским потокам: разрывам с заданной интенсивностью  $\lambda(t, x)$ , а также обрывам и ветвлениям, интенсивность которых определяется функцией  $\mu(t, x, z)$ , записанной ниже. Эти дополнительные узлы сетки формируются отдельно для каждой траектории специального случайного процесса  $X(t)$ .

Чтобы упростить алгоритм моделирования, предлагается рассмотреть пуассоновский поток, включающий и разрывы, и обрывы, и ветвления траекторий. Суммарная интенсивность такого потока определяется формулой

$$\Lambda(t, x, z) = \lambda(t, x) + |\mu(t, x, z)|,$$

где

$$\mu(t, x, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x) q_{kr}(t) \left( z_r - \frac{1}{2} c_r(t, x) \right),$$

$$q(t) = \omega^{-1}(t), \quad \omega_{kr}(t) = \sum_{l=1}^d \zeta_{kl}(t) \zeta_{rl}(t), \quad k, r = 1, 2, \dots, m,$$

причем разрывы траекторий реализуются с вероятностью  $\lambda(t, x)/\Lambda(t, x, z)$ , а обрывы и ветвления траекторий — с вероятностью  $|\mu(t, x, z)|/\Lambda(t, x, z)$ . Моделирование такого пуассоновского потока проще, а результаты будут статистически эквивалентны независимому моделированию двух исходных пуассоновских потоков.

Далее в алгоритме будут использованы обозначения  $\mu^-(t, x, z)$  и  $\mu^+(t, x, z)$ :

$$\mu^-(t, x, z) = \begin{cases} -\mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) < 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \mu^+(t, x, z) = \begin{cases} \mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) > 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \leq 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\mu(t, x, z) = -\mu^-(t, x, z) + \mu^+(t, x, z).$$

Для определения оптимальной оценки  $\hat{X}(t + \Delta(t))$  предлагается статистический алгоритм моделирования траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  с учетом разрывов, обрывов и ветвлений с последующим усреднением. При этом можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Например, можно использовать простой в реализации стохастический метод Эйлера, именно он применяется далее в алгоритмах для моделирования «фрагментов» траекторий на промежутках времени между двумя последовательными разрывами, обрывами или ветвлениями, т.е. траекторий стохастической системы диффузионного типа, модель которой задается уравнением (3). Для получения большей точности требуется применять численные методы более высокого порядка.

Для моделирования пуассоновского потока разрывов, обрывов и ветвлений траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  используется метод «максимального сечения» [7]. Формулы для моделирования времени, через которое происходят эти события, здесь не приводятся, их можно найти в [2, 6, 7] и далее в алгоритме.

На основе результатов моделирования траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  с разрывами, обрывами и ветвлениями в каждый момент времени можно оценить апостериорные плотность вероятности и функцию распределения. Также можно найти оценку вектора состояния как для текущего (фильтрация), так и для будущего момента времени (прогнозирование), усредняя по ансамблю траекторий с учетом того, что на этапе прогнозирования обрывы и ветвления не происходят.

### Алгоритм совместного моделирования системы наблюдения, фильтрации и прогнозирования

**Шаг 1.** Задать  $M$  — число моделируемых траекторий специального случайного процесса  $X(t)$ ;  $h$  — шаг численного интегрирования; величины  $\lambda^*$  и  $\Lambda^*$  — мажоранты для интенсивностей  $\lambda(t, x)$  и  $\Lambda(t, x, z)$  соответственно. Предполагается, что для интенсивности  $\lambda(t, x)$  мажоранту можно найти точно:

$$\lambda^* = \max_{(t,x) \in [t_0, T+\Delta(T)] \times \mathbb{R}^n} \lambda(t, x),$$

для интенсивности  $\Lambda(t, x, z)$  это можно сделать, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения, заданной уравнениями (1) и (2), применяя статистический алгоритм анализа [2]:

$$\Lambda^* = \max_{t_k \in [t_0, T], i=1,2,\dots,M} \Lambda(t_k, X_k^i, Z_k^i),$$

где максимум берется по всем значениям вектора состояния  $X_k^i$  и соответствующего ему вектора измерений  $Z_k^i$  в узлах сетки  $\{t_k = t_0 + kh\}$  по  $M$  смоделированным траекториям.

Получить реализации начальных векторов  $X_0$  и  $X_0^i$  согласно заданной плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  ( $X_0$  — начальный вектор состояния для основной траектории, для которой проводятся измерение и оценивание,  $X_0^i$  — для траекторий специального случайного процесса, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка); получить реализацию промежутка времени  $\hat{\xi}$ , через который может произойти разрыв основной траектории:  $\hat{\xi} = -\ln \beta / \lambda^*$ , и промежутков времени  $\xi^i$ , через которые могут произойти разрывы, обрывы или ветвления вспомогательных траекторий:  $\xi^i = -\ln \beta / \Lambda^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Здесь и далее  $\beta$  — различные реализации (для всех  $i$ ) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ .

Положить  $k = 0$ ,  $t_* = t_0$ ,  $t_*^i = t_0$ ,  $I_0^i = 1$  (траектория с номером  $i$  в начальный момент времени не оборвана),  $i = 1, 2, \dots, M$ .

**Шаг 2.** Положить  $\kappa = k$ ,  $\tau_*^i = t_*^i$ ,  $\xi_*^i = \xi^i$  (запомнить текущее время и параметры),  $i = 1, 2, \dots, M$ . Далее положить  $i = 1$ ,  $j = 0$  ( $j$  — количество новых ветвей на шаге  $k$ ),  $\Xi = 1$  (прогнозирование).

**Шаг 3.** Проверить условие  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa) - t_k > 0$ . Если оно выполнено, то перейти к шагу 4. Иначе положить

$$M_\kappa = \sum_{i=1}^M I_\kappa^i \quad (M_0 = M)$$

и найти прогноз  $\hat{X}_\kappa$  как выборочное среднее реализаций  $\mathbb{X}_\kappa = \{X_k^i\}_{i=1,2,\dots,M; I_\kappa^i=1}$ :

$$\hat{X}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa} \sum_{i=1,2,\dots,M; I_\kappa^i=1} X_k^i.$$

Проверить условие  $T - t_\kappa = 0$ . Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе положить  $k = \kappa$ ,  $t_*^i = \tau_*^i$ ,  $\xi_*^i = \xi_*^i$  (восстановить текущее время и параметры),  $i = 1, 2, \dots, M$ , затем положить  $i = 1$ ,  $\Xi = 0$  (фильтрация).

Проверить условие  $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$ , если оно выполнено, то получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить вектор измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V.$$

В этих формулах и далее  $\Delta W$  и  $\Delta V$  — различные для всех  $k$  и  $i$  (а также для промежуточных расчетов) реализации  $s$ -мерного и  $d$ -мерного случайных векторов соответственно, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Если условие  $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$  не выполнено, то положить  $\hat{X} = X_k$ ,  $\hat{t} = t_k$  и  $l = 1$ .

Последовательно найти реализации оцениваемого вектора состояния и векторы измерений в дополнительных узлах сетки:

$$Z_k^{(l)} = c(\hat{t}, \hat{X}) + \frac{\zeta(\hat{t})}{\sqrt{\hat{h}}}\Delta V, \quad \hat{X} = \hat{X} + \hat{h}f(\hat{t}, \hat{X}) + \sqrt{\hat{h}}\sigma(\hat{t}, \hat{X})\Delta W, \quad \hat{h} = \hat{t}_* + \hat{\xi} - \hat{t}.$$

Для каждого дополнительного узла сетки необходимо выполнять следующие действия: положить  $\hat{\tau} = \hat{\tau} + \hat{h}$  и получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ ; проверить условие  $\alpha \leq \lambda(\hat{\tau})/\lambda^*$ ,  $\lambda(\hat{\tau}) = \lambda(\hat{\tau}, \hat{X})$ , и если оно выполнено, то получить реализацию случайного вектора  $\Delta$ , распределенного с плотностью вероятности  $\psi(\hat{\tau}, \Delta | \hat{X})$ , и положить  $\hat{X} = \hat{X} + \Delta$  или сразу получить новую реализацию случайного вектора  $\hat{X}$ , распределенного с плотностью вероятности  $\eta(\hat{\tau}, x | \hat{X})$ ; положить  $l = l + 1$ ,  $\hat{t}_* = \hat{t}_* + \hat{\xi}$  и  $\hat{\xi} = -\ln \beta/\lambda^*$ . Эти вычисления проводятся до тех пор пока  $\hat{t}_* + \hat{\xi} < t_k + h$ .

Далее получить реализацию оцениваемого вектора состояния и векторы измерений в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1} = \hat{X} + \hat{h} f(\hat{\tau}, \hat{X}) + \sqrt{\hat{h}} \sigma(\hat{\tau}, \hat{X}) \Delta W, \quad \hat{h} = t_k + h - \hat{\tau}.$$

$$Z_k^{(l)} = c(\hat{\tau}, \hat{X}) + \frac{\zeta(\hat{\tau})}{\sqrt{\hat{h}}} \Delta V.$$

Фактически здесь формируется кусочно-постоянная функция  $Z_k(t)$ ,  $t \in [t_k, t_k + h)$ , принимающая постоянное значение  $Z_k$ , если на полуинтервале нет разрывов основной траектории, или последовательно принимающая значения  $Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}, \dots$ , если разрывы есть.

Шаг 4. Проверить условие  $I_\kappa^i = 0$  (траектория с номером  $i$  оборвана). Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при  $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$  перейти к шагу 5, а при  $t_*^i + \xi^i < t_k + h$  положить  $\tilde{X}^i = X_k^i$ ,  $\tau^i = t_k$  и перейти к шагу 6.

Шаг 5. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = X_k^i + h f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h} \sigma(t_k, X_k^i) \Delta W.$$

Положить  $I_{k+1}^i = 1$  (если  $\Xi = 0$ ) и перейти к последнему шагу.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить  $\tau^i = \tau^i + h^i$  и получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ . Проверить условие  $\alpha \leq \Lambda(\tau^i)/\Lambda^*$ ,  $\Lambda(\tau^i) = \Lambda(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k)$ , и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Здесь и на следующих шагах  $Z_k$  — это вектор измерений, причем при условии, что на полуинтервале  $[t_k, t_k + h)$  произошел хотя бы один разрыв основной траектории,  $Z_k = Z_k^{(l)}$ , где верхний индекс  $l$  соответствует моменту времени  $\tau^i$ .

Шаг 7. Получить реализацию  $\gamma$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ , и проверить условия:

а) если  $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) \leq \gamma$  ( $\lambda(\tau^i) = \lambda(\tau^i, \tilde{X}^i)$ , разрыв траектории), то получить реализацию случайного вектора  $\Delta$ , распределенного с плотностью вероятности  $\psi(\tau^i, \Delta | \tilde{X}^i)$ , и положить  $\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + \Delta$  или сразу получить новую реализацию случайного вектора  $\tilde{X}^i$ , распределенного с плотностью вероятности  $\eta(\tau^i, x | \tilde{X}^i)$ ;

б) если  $\Xi = 0$ ,  $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma$  и  $\mu^-(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$  (обрыв траектории), то положить  $I_{k+1}^i = 0$  (траектория далее не моделируется:  $I_r^i = 0$ ,  $r > k$ ) и перейти к последнему шагу;

в) если  $\Xi = 0$ ,  $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma$  и  $\mu^+(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$  (ветвление траектории), то положить  $j = j + 1$ ,  $I_{k+1}^{M+j} = 1$  ( $I_r^{M+j} = 0$ ,  $r \leq k$ ),  $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ ,  $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$ ,  $\tau^{M+j} = \tau^i$  и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление новой траектории с номером  $M + j$ :  $\xi^{M+j} = -\ln \beta/\Lambda^*$ .

Шаг 8. Положить  $t_*^i = t_*^i + \xi^i$  и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление траектории с номером  $i$ :  $\xi^i = -\ln \beta/\Lambda^*$ .

Проверить условие  $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ . Если оно выполнено, то перейти к шагу 6.

Шаг 9. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить  $I_{k+1}^i = 1$ .

Шаг 10. Проверить условия:

а) если  $i = M + j$ , то положить  $M = M + j$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3 при  $\Xi = 1$  или к шагу 2 при  $\Xi = 0$ ;

- б) если  $i < M$ , то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 4;  
 в) если  $M \leq i < M + j$  (новые ветви), то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 6.

#### Замечания.

1. Предполагается, что конечный момент времени  $T$  для построения текущей оценки и конечный момент времени  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$  для нахождения прогноза согласованы с шагом численного интегрирования, т.е. найдутся такие целые числа  $K_1$  и  $K_2^\kappa$ , что  $t_0 + K_1 h = T$  и  $t_0 + K_2^\kappa h = t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$ , иначе при нахождении вектора состояния в эти моменты времени потребуется скорректировать шаг численного интегрирования.

2. На шаге 3 можно получить ковариационную матрицу ошибки прогнозирования:

$$\hat{\Gamma}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa - 1} \sum_{i=1,2,\dots,M; I_\kappa=1} (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^\top.$$

Индекс  $\kappa$  в обозначении  $\hat{X}_\kappa$  и  $\hat{\Gamma}_\kappa$  указывает на то, что эти характеристики соответствуют прогнозу в момент времени  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$  при текущем времени  $\theta = t_\kappa$ .

На этом же шаге по выборке  $\mathbb{X}_k$  можно найти оценки апостериорных плотности вероятности  $p(t_\kappa + \Delta(t_\kappa), x | Z_0^{t_\kappa})$  и соответствующей функции распределения. Это дает возможность использовать не только критерий минимума среднеквадратической ошибки прогнозирования, но и другие критерии [8, 12].

3. На этапе прогнозирования ( $\Xi = 1$ ) обрывы и ветвления траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  не происходят, однако согласно приведенным алгоритмам интервалы времени между двумя последовательными моментами, в которых проверяется реализация разрыва траектории, моделируются по показательному закону распределения с параметром  $\Lambda^*$ , а не  $\lambda^*$ , хотя, как правило,  $\Lambda^* \gg \lambda^*$ . Это, вообще говоря, допустимо и не сказывается на точности моделирования пуассоновского потока разрывов траекторий, но увеличивает время моделирования, в частности за счет получения «лишних» реализаций случайных величин, снижая таким образом конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел.

Чтобы этого избежать, можно модифицировать приведенный алгоритм. На шаге 2 дополнительно требуется положить  $t_*^i = t_k$  и  $\xi^i = -\ln \beta / \lambda^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . При  $\Xi = 1$  на шаге 6 достаточно проверить условие  $\alpha \leq \lambda(\tau_i) / \lambda^*$ , где  $\lambda(\tau_i) = \lambda(\tau_i, \tilde{X}^i)$ , и если оно выполнено, то на шаге 7 смоделировать разрыв траектории с номером  $i$  (получение реализации  $\gamma$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ , и проверка условия  $\lambda(\tau_i) / \Lambda(\tau_i) \leq \gamma$  не требуется). На шаге 8 получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв траектории с номером  $i$ :  $\xi^i = -\ln \beta / \lambda^*$ .

При интенсивности разрывов траекторий, не зависящей от вектора состояния, т.е.  $\lambda(t, x) = \lambda(t)$ , и тем более при постоянной интенсивности  $\lambda(t, x) = \lambda = \text{const}$  алгоритмы можно упростить, в частности, моделировать моменты времени разрывов на этапе прогнозирования заранее. Если  $\lambda(t, x) = \lambda = \text{const}$ , то получение реализации  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ , и проверка условия  $\alpha \leq \lambda(\tau_i) / \lambda^*$  не требуется.

4. Трудоемкость построенного алгоритма можно уменьшить, если использовать модифицированный метод «максимального сечения» с использованием моделирования последовательности исключений по одному случайному числу [1].

5. Можно предложить метод моделирования пуассоновского потока, для которого моменты времени разрывов, обрывов и ветвлений совпадают с узлами регулярной сетки для численного решения стохастического дифференциального уравнения. Решение задач фильтрации и прогнозирования для систем диффузионного типа с помощью такого метода рассматривалось в [10], соответствующая модификация алгоритма совместного моделирования системы наблюдения, фильтрации и прогнозирования будет содержать меньшее количество шагов.

## Список литературы

- [1] Аверина Т. А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 1. С. 16–23.
- [2] Аверина Т. А. Построение алгоритмов статистического моделирования систем со случайной структурой. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.

- [3] Аверина Т. А., Рыбаков К. А. О прогнозировании состояний стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей // Проблемы оптимизации сложных систем. XI Международная Азиатская школа-семинар, Чолпон-Ата, 27 июля – 7 августа 2015 г.: Тр. конф. Ч. 1. 2015. С. 16–24.
- [4] Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Практическая реализация алгоритма прогнозирования в стохастических системах с пуассоновской составляющей // Проблемы оптимизации сложных систем. XII Международная Азиатская школа-семинар, Новосибирск, 12–16 декабря 2016 г.: Тр. конф. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2016. С. 2–11.
- [5] Аверина Т. А., Рыбаков К. А. Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сибирский журнал вычислительной математики. 2017. Т. 20. № 1. С. 1–13.
- [6] Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
- [7] Михайлов Г. А., Аверина Т. А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163–165.
- [8] Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортакровский А. С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
- [9] Рыбаков К. А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 1. С. 25–38.
- [10] Рыбаков К. А. Модифицированные статистические алгоритмы фильтрации и прогнозирования в непрерывных стохастических системах // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 155–162.
- [11] Рыбаков К. А. Статистические алгоритмы оптимальной фильтрации сигналов в нелинейных диффузионно-скачкообразных стохастических системах // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20. № 4 (74). С. 107–113.
- [12] Рыбаков К. А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.
- [13] Синицын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.
- [14] Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009.
- [15] Del Moral P. Feynman–Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. Springer, 2004.

*Татьяна Александровна Аверина — к.ф.-м.н.,  
ст. науч. сотр. Института вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН;  
доцент Новосибирского государственного университета;  
e-mail: ata@osmf.ssc.ru;  
Константин Александрович Рыбаков — к.ф.-м.н.,  
доцент Московского авиационного института;  
e-mail: rkoffice@mail.ru.  
Дата поступления — 30 мая 2017 г.*