

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО КОНУСА РЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

Э. А. Бибердорф^{1,2}, А. М. Блохин^{1,2}

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.62, 533.6.011

Работа посвящена математическому моделированию обтекания кругового конуса газом Ван-дер-Ваальса, которое можно описать краевой задачей для системы ОДУ при том, что одна из границ области (угол ударной волны) также является неизвестной. Создан алгоритм вычисления углов ударных волн и характеристик течения между конусом и ударной волной, основанный на итерационном уточнении решения краевой задачи с помощью одного из краевых условий.

Ключевые слова: газ Ван-дер-Ваальса, ударная волна.

Введение

Настоящая работа посвящена классической задаче нахождения стационарных решений уравнений газовой динамики, описывающих обтекание кругового конуса сверхзвуковым потоком газа. В данном случае используются уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса, которые (см. [1]) достаточно хорошо описывают жидкое, газообразное, а также двухфазное (газообразная и жидкая фаза сосуществуют вместе) состояния реального вещества. Заметим, что эта задача имеет большое практическое значение для авиации и ракетной техники (подробнее см. в литературе, указанной в библиографии к [1], [2]).

В работе предлагается оригинальный численный метод для нахождения приближенных решений специфической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от реализованного ранее подхода [2] в данном случае мы представляем алгоритм, который полностью автоматизируется и требует гораздо меньше вычислительного времени и ресурсов.

1 Предварительные сведения

Газ Ван-дер-Ваальса характеризуется уравнениями состояния

$$p = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{V^2}, \quad e = c_V^* T \left(1 - \frac{A_1 T}{2} \right) - \frac{A}{V}.$$

Здесь p , V и T — давление, удельный объем и температура газа соответственно, R — газовая постоянная, e — внутренняя энергия, V_0 ($V > V_0$), A , c_V^* и A_1 — некоторые константы. Пусть $\theta = a$ — уравнение поверхности конуса, $\theta = b$ — уравнение фронта ударной волны, $\delta = b - a$. Тогда для данной задачи уравнения газовой динамики после учета симметрии и обезразмеривания образуют систему ОДУ на интервале $0 < s < \delta$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00791_а).

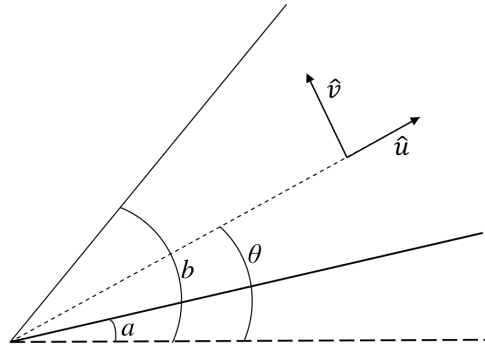


Рис. 1: Схема обтекания кругового конуса с присоединенной ударной волной.

(процесс обезразмеривания подробно описан в [2])

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}'(s) &= \tilde{v}(s), \\
 \tilde{v}'(s) + \tilde{u}(s) &= \frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1}, \\
 \hat{V}(s)\hat{p}'(s) &= -\hat{v}(s)\frac{U_\infty^2}{\hat{p}_\infty\hat{V}_\infty}\frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1}, \\
 \hat{V}'(s) &= \frac{\hat{V}(s)\hat{v}(s)U_\infty^2}{\hat{c}^2(s)}\frac{\tilde{R}(s)}{M_\theta^2 - 1},
 \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{v}(0) = \sin(a), \tag{2}$$

$$\tilde{u}(\delta) = 0, \tag{3}$$

$$\tilde{v}(\delta) = k \sin(b), \tag{4}$$

$$\hat{p}(\delta) = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)k,$$

$$\hat{V}(\delta) = 1 - k,$$

где k — нуль функции $Q(k)$:

$$Q(k, b) = \Lambda \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda\right) - \Lambda_\infty \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty\right) - (\gamma^* - 1)k \left(\frac{\alpha}{1 - k} + \frac{\hat{p}(\delta) + 1}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

$$0 < k < 1 - \beta, \quad 0 < \beta < 1. \tag{6}$$

Замечание. Равенство (5) вместе с условием (6) задает некую неявную функцию

$$k = \bar{k}(b), \tag{7}$$

и именно в таком виде они будут использоваться в дальнейшем.

При этом

$$\hat{u}(s) = \tilde{u}(s) + \cos(s + a), \quad \hat{v}(s) = \tilde{v}(s) + \sin(s + a)$$

— компоненты скорости газа (см. рис. 1);

$$\tilde{R}(s) = \tilde{u}(s) + \tilde{v}(s) \operatorname{ctg}(s + a);$$

\hat{p} , $\hat{\rho}$ — обезразмеренные давление и плотность;

$$M_\theta^2(s) = \frac{\tilde{M}_\infty^2 \hat{v}^2(s)}{\mathbf{C}(s)}, \quad \tilde{M}_\infty^2 = M_\infty^2 \left(\gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha \right),$$

$M_\infty > 0$ — число Маха набегающего потока;
функции $\mathbf{C}(s)$, $\hat{\Lambda}(s)$ определяются формулами

$$\mathbf{C}(s) = \frac{\hat{p}(s) + \alpha \hat{\rho}^2(s)}{\hat{\rho}(s)(1 - \beta \hat{\rho}(s))} \left(1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1 \hat{\Lambda}(s)} \right) - 2\alpha \hat{\rho}(s),$$

$$\hat{\Lambda}(s) = (1 - \beta \hat{\rho}(s))(\hat{p}(s) + \alpha \hat{\rho}^2(s)) / \hat{\rho}(s), \quad \hat{\Lambda}(\delta) = \Lambda;$$

константы α , β , γ_∞ , γ^* , α_1 выражаются через давление \hat{p}_∞ и удельный объем набегающего потока \hat{V}_∞ :

$$\alpha = \frac{A}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty^2}, \quad \beta = \frac{V_0}{\hat{V}_\infty}, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$\gamma_\infty = 1 + \frac{R}{c_V^*(1 - A_1 \hat{T}_\infty)}, \quad \hat{T}_\infty = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty, \quad \Lambda_\infty = (1 - \beta)(1 + \alpha),$$

$$\gamma^* = 1 + \frac{R}{c_V^*}, \quad \gamma^* > \gamma_\infty > 0, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma^* - \gamma_\infty}{(\gamma_\infty - 1)\Lambda_\infty}.$$

Краевое условие (2) представляет собой условие непротекания на поверхности конуса, а условия (3), (4) — следствия условий Рэнкина-Гюгонио на фронте ударной волны. Краевая задача (1)–(4) имеет нестандартный вид. С одной стороны краевых условий на одно больше, чем неизвестных функций, но при этом угол ударной волны b , а значит расположение правой границы расчетного интервала δ , также является неизвестной величиной.

2 Обоснование алгоритма

В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело с другой формулировкой задачи (1)–(4). После замены

$$\begin{aligned} W(s) &= \sin(s + a)\tilde{u}(s) + \cos(s + a)\tilde{v}(s), \\ U(s) &= \cos(s + a)\tilde{u}(s) - \sin(s + a)\tilde{v}(s) \end{aligned} \quad (8)$$

задача (1)–(4) переписывается так

$$\begin{aligned} W'(s) &= \frac{\text{ctg}(s + a)}{M_\theta^2 - 1} W(s), \\ U'(s) + \text{tg}(s + a)W'(s) &= 0, \\ \tilde{p}'(s) &= -\hat{\rho}(s)\tilde{M}_\infty^2 \left[\frac{W^2(s) + U^2(s)}{2} + U(s) \right], \\ \tilde{\rho}'(s) &= \frac{\tilde{p}'(s)}{\mathbf{C}(s)} \end{aligned} \quad (1')$$

с краевыми условиями

$$\cos(a)W(0) - \sin(a)U(0) = \sin(a), \quad (2')$$

$$\sin(b)W(\delta) + \cos(b)U(\delta) = 0, \quad (3')$$

$$W(\delta) = \cos(b)\sin(b)k,$$

$$\hat{p}(\delta) = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \sin^2(b)k, \quad (4')$$

$$\hat{\rho}(\delta) = \frac{1}{1 - k},$$

После интегрирования двух первых уравнений системы (1') получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\sin^2(a)\hat{\mu}}{\sin(s + a)\tilde{I}(s)}, \\ U(s) &= \frac{\tilde{\mu}}{\cos(a)} + \sin^2(a)\hat{\mu}R(s) - \text{tg}(s + a)W(s), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{I}(s) &= \exp \left\{ \int_0^s \frac{\operatorname{ctg}(\tau + a) M_\theta^2(\tau)}{1 - M_\theta^2} d\tau \right\}, \\ R(s) &= \int_0^s \frac{d\tau}{\sin(\tau + a) \cos^2(\tau + a) \tilde{I}(\tau)}, \\ \tilde{\mu} &= -\frac{\cos^2(a) \sin^2(a) R(\delta)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R(\delta)}, \\ \hat{\mu} &= -\frac{\cos(a)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R(\delta)},\end{aligned}\tag{10}$$

Заметим, что согласно этим формулам в простейшем частном случае $M_\theta(s) \equiv 0$ нетрудно установить, что

$$\begin{aligned}M_\theta^{(0)}(s) &\equiv 0, \quad \tilde{I}^{(0)}(s) \equiv 1, \\ R^{(0)}(s) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos^2(a)}{1 - \cos^2(a + s)} + \frac{1}{\cos(a + s)} - \frac{1}{\cos(a)}, \\ \tilde{\mu}^{(0)}(s) &= -\frac{\cos^2(a) \sin^2(a) R^{(0)}(a + s)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R^{(0)}(a + s)}, \\ \hat{\mu}^{(0)}(s) &= -\frac{\cos(a)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R^{(0)}(a + s)}.\end{aligned}\tag{11}$$

Так как $M_\theta^{(0)}(s)$ как и остальные функции (11) определены для всех $s \in [a, \pi/2]$, то можно выбрать $b^{(0)} = \pi/2$. Эти явные выражения удобно использовать для вычисления начального приближения решения (см. ниже).

В терминах равенств (10) условия (3) и (3') преобразуются к виду

$$k = \frac{\sin^2(a) \hat{\mu}}{\cos(b) \sin^2(b) \tilde{I}(\delta)}.\tag{12}$$

Если $k = \bar{k}(b)$ (7), а функция $k = \bar{\bar{k}}(b)$ определена в соответствии с формулой (12), то краевая задача (1'), (2'), (4') может быть решена в том случае, если будет найдена пара (b, k) , представляющая собой точку пересечения графиков $\bar{k}(b)$ и $\bar{\bar{k}}(b)$.

Для определения начальных приближений для итерационного процесса при достаточно больших числах Маха M_∞ используется та же идея. В качестве $b^{(1)}$ выбирается значение b , при котором кривые $k = \bar{k}(b)$ и $k = \bar{\bar{k}}(b)$ пересекаются, где

$$\bar{\bar{k}}^{(0)}(b) = \frac{\sin^2(a) \hat{\mu}^{(0)}(\delta)}{\cos(b) \sin^2(b) \tilde{I}^{(0)}(\delta)}.\tag{13}$$

Причем эмпирически установлено, что для достаточно большого числа Маха M_∞ данные кривые пересекаются в двух точках (см. рис. 2). При небольших числах Маха присоединенной ударной волны не существует. Минимальное число Маха, при котором возникает присоединенная ударная волна, может быть вычислено при применении описанного ниже метода для последовательности $M_\infty^{[i]}$, $i = 1, 2, \dots$, $M_\infty^{[i+1]} < M_\infty^{[i]}$.

3 Описание алгоритма

Входные данные

a — угол полураствора конуса, $M_\infty, \alpha, \beta, \gamma_\infty, \gamma^*$ — параметры набегающего потока, $n, h, nh = 1^\circ$ — параметры дискретизации, ε — параметр сходимости итераций.

Начальное приближение

$M_\theta^{(0)}(s)$, $\tilde{I}_\theta^{(0)}(s)$, $R_\theta^{(0)}(s)$, $\tilde{\mu}^{(0)}(s)$, $\hat{\mu}^{(0)}(s)$ определяются по формулам (11).

$b^{(0)} = \pi/2$ (см. предыдущий раздел), $\delta^{(0)} = b^{(0)} - a$.

Итерации Итерации выполняются до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$|b^{(j)} - b^{(j-1)}| < \varepsilon.$$

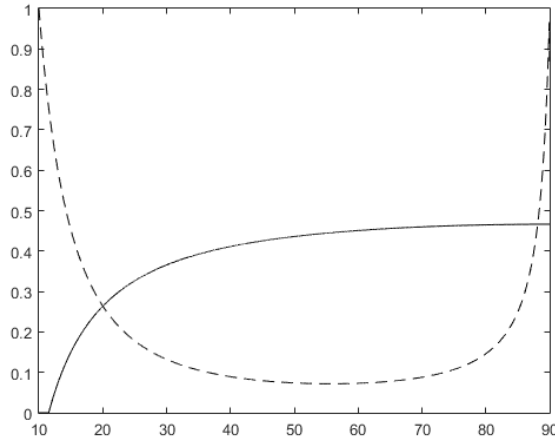


Рис. 2: Пример пересечения кривых $\bar{k}(b)$ (сплошная линия) и $\bar{k}^{(0)}(b)$ (прерывистая линия) при $M_\infty = 5$, $\gamma_\infty = 1.8$, $\gamma^* = 1.9$, $\alpha = 4$, $\beta = 1/3$, $a = 10^\circ$.

Вычисляем на заданной сетке j -е приближение угла ударной волны $b^{(j)} = N^{(j)}h$ как ближайшее к $b^{(j-1)}$ пересечение графика функции $\bar{k}(b)$ (7) с графиком

$$\bar{k}^{(j-1)}(b) = \frac{\sin^2(a)\tilde{\mu}^{(j-1)}(\delta^{(j-1)})}{\cos(b)\sin^2(b)}\tilde{I}^{(j-1)}(\delta^{(j-1)}).$$

Полагаем $\delta^{(j)} = b^{(j)} - a$.

На сетке $s_i = ih$, $0 < s_i \leq \delta^{(j)}$ вычисляем функции $W_i^{(j)} = W^{(j)}(s_i)$, $U_i^{(j)} = U^{(j)}(s_i)$, причем, если $s_i \leq \delta^{(j-1)}$, то используются равенства (9). А в случае $\delta^{(j-1)} < s_i \leq \delta^{(j)}$ мы строим непрерывное продолжение этих функций, удовлетворяющее правым граничным условиям:

$$W_i^{(j)} = \begin{cases} \frac{\sin^2(a)\tilde{\mu}^{(j-1)}}{\sin(s_i + a)\tilde{I}^{(j-1)}(s_i)}, & \text{если } s_i \leq \delta^{(j-1)}, \\ W_{N^{(j-1)}}^{(j)} \frac{\sin(b^{(j-1)})}{\sin(s_i + a)}, & \text{если } \delta^{(j-1)} < s_i \leq \delta^{(j)}, \end{cases} \quad (14)$$

$$U_i^{(j)} = \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}^{(j-1)}}{\cos(a)} + \sin^2(a)\tilde{\mu}^{(j-1)}R^{(j-1)}(s_i) - \operatorname{tg}(s_i + a)W_i^{(j)} & \text{если } s_i \leq \delta^{(j-1)}, \\ -W_{N^{(j-1)}}^{(j)} \frac{\sin(b^{(j-1)})}{\cos(s_i + a)}, & \text{если } \delta^{(j-1)} < s_i \leq \delta^{(j)}, \end{cases}$$

Сеточные функции $\hat{p}_i^{(j)} = \hat{p}^{(j)}(s_i)$ и $\hat{\rho}_i^{(j)} = \hat{\rho}^{(j)}(s_i)$ сначала определяем на правой границе $s = \delta^{(j)} = N^{(j)}h$ (см. (4'))

$$\begin{aligned} \hat{p}_{N^{(j)}}^{(j)} &= \hat{p}^{(j)}(\delta^{(j)}) = 1 + \widetilde{M}_\infty^2 \sin^2(b^{(j)})k^{(0)}, \\ \hat{\rho}_{N^{(j)}}^{(j)} &= \hat{\rho}^{(j)}(\delta^{(j)}) = \frac{1}{1 - k^{(j)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для нахождения их значений в точках $s_i = ih$, $0 \leq i < N^{(j)}$, запишем конечно-разностный аналог уравнений (1'):

$$\begin{aligned} \hat{p}_i^{(j)} - \hat{p}_{i-1}^{(j)} &= -\widetilde{M}_\infty^2 \frac{\hat{\rho}_i^{(j)} + \hat{\rho}_{i-1}^{(j)}}{2} \left[\frac{(W_i^{(j)})^2 + (U_i^{(j)})^2}{2} + U_i^{(j)} - \frac{(W_{i-1}^{(j)})^2 + (U_{i-1}^{(j)})^2}{2} - U_{i-1}^{(j)} \right], \\ \hat{\rho}_{i-1}^{(j)} &= \hat{\rho}_i^{(j)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{D_i^{(j)}} + \frac{1}{D_{i-1}^{(j)}} \right) (\hat{p}_i^{(j)} - \hat{p}_{i-1}^{(j)}) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$D_i^{(j)} = \frac{\hat{p}_i^{(j)} + \alpha(\hat{\rho}_i^{(j)})}{1 - \beta\hat{\rho}_i^{(j)}} \left(1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1(\hat{\Lambda}_i^{(j)})} \right) - 2\alpha(\hat{\rho}_i^{(j)})^2, \quad \hat{\Lambda}_i^{(j)} = (1 - \beta\hat{\rho}_i^{(j)})(\hat{p}_i^{(j)} + \alpha(\hat{\rho}_i^{(j)}))/\hat{\rho}_i^{(j)}.$$

Система (16) приближенно решается итерациями по нелинейности.

Для перехода к следующей итерации вычисляем функцию

$$(M_\theta^{(j)}(s))^2 = \frac{\widetilde{M}_\infty^2}{\mathbf{C}^{(j)}(s)} \left(W^{(j)}(s) \cos(a + s) - U^{(j)}(s) \sin(a + s) \right),$$

где

$$\mathbf{C}^{(j)}(s_i) = \frac{\hat{p}_i^{(j)} + \alpha(\hat{\rho}_i^{(j)})^2}{\hat{\rho}_i^{(j)}(1 - \beta\hat{\rho}_i^{(j)})} \left(1 + \frac{\gamma^* - 1}{1 + \alpha_1\hat{\Lambda}_i^{(j)}} \right) - 2\alpha\hat{\rho}_i^{(j)},$$

а также

$$\tilde{I}^{(j)}(s) = \exp \left\{ \int_0^s \frac{\text{ctg}(\tau + a)(M_\theta^{(j)}(\tau))^2}{1 - (M_\theta^{(j)}(\tau))^2} d\tau \right\}, \quad R^{(j)}(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\sin(\tau + a) \cos^2(\tau + a) \tilde{I}^{(j)}(\tau)},$$

$$\tilde{\mu}^{(j)} = -\frac{\cos^2(a) \sin^2(a) R^{(j)}(\delta)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R^{(j)}(\delta)}, \quad \hat{\mu}^{(j)} = -\frac{\cos(a)}{1 + \cos(a) \sin^2(a) R^{(j)}(\delta)},$$

4 Пример

Рассмотрим пример работы алгоритма при следующих значениях входных параметров: $M_\infty = 5$, $\gamma_\infty = 1.8$, $\gamma^* = 1.9$, $\alpha = 4$, $\beta = 1/3$, $a = 10^\circ$. В качестве параметра дискретизации выберем $h = 0.01^\circ$. В результате получаем два варианта для угла ударной волны $b_1 = 19.29^\circ$, $b_2 = 88.34^\circ$. В рамках заданной точности алгоритм сходится за две итерации (рис. 3). На рис. 4–5 приведены безразмерные параметры течений.

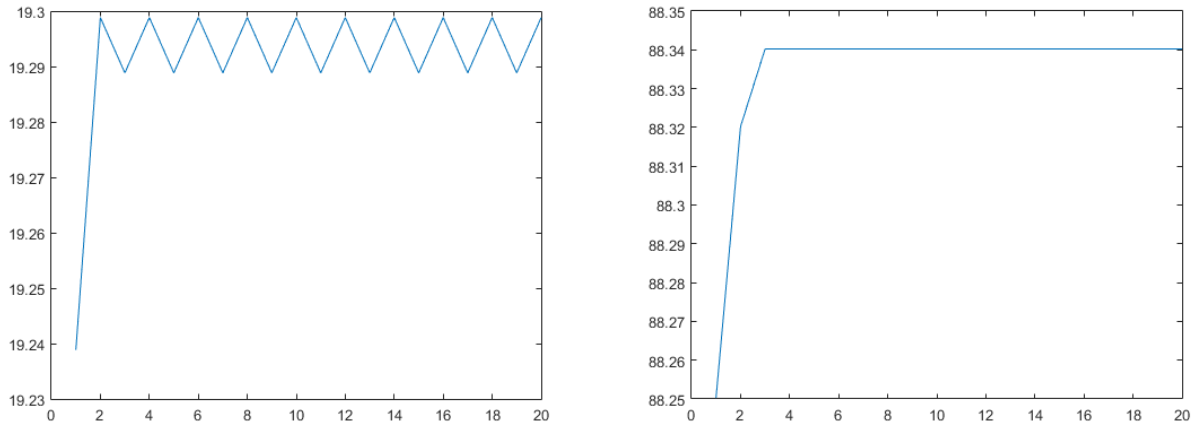


Рис. 3: Расчетное значение угла ударной волны b° в зависимости от номера итерации.

Заключение

В работе представлен численный метод моделирования обтекания кругового конуса реальным газом. Преимущества данного метода заключаются в том, что он полностью автоматизируется и быстро сходится.

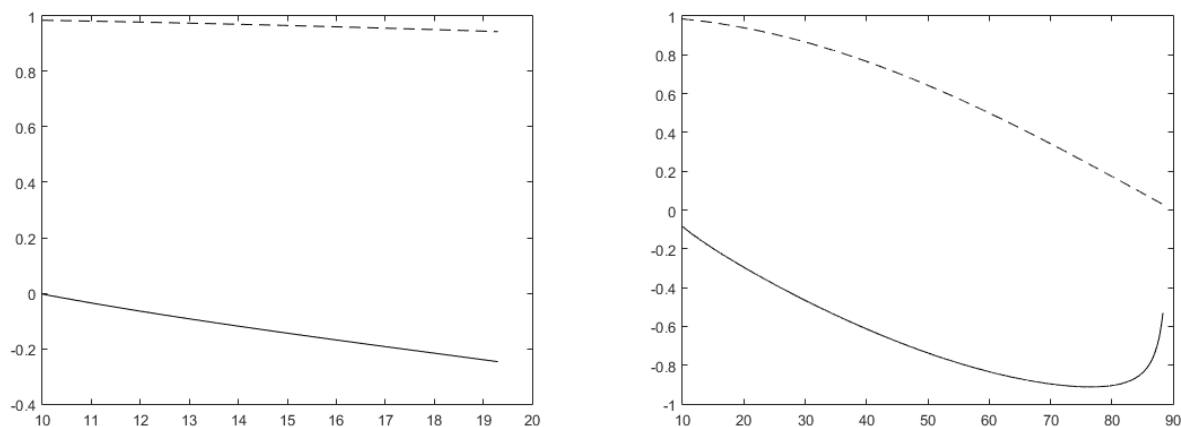


Рис. 4: Графики безразмерных функций $\hat{u}(s)$ (прерывистая линия), $\hat{v}(s)$ (сплошная линия), $a < s < b$, при $b = 19.29^\circ$ (слева), $b = 88.34^\circ$ (справа).

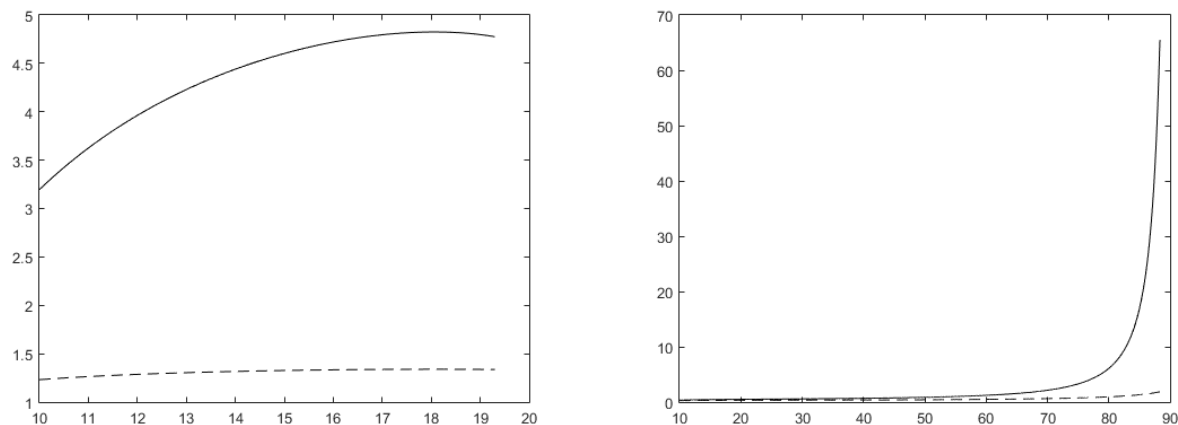


Рис. 5: Графики безразмерных функций $\hat{\rho}(s)$ (прерывистая линия), $\hat{p}(s)$ (сплошная линия), $a < s < b$, при $b = 19.29^\circ$ (слева), $b = 88.34^\circ$ (справа).

Список литературы

- [1] Блохин А.М., Голдин А.Ю. Построение промежуточных областей для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса // Журн. тех. физ. Т. 86. № 12, 2016, с. 49–55.
- [2] Блохин А.М., Бибердорф Э.А. Численное решение задачи о стационарном обтекании конуса реальным газом // Журн. выч. техн., Т.20, № 2, 2015, с. 29–43.

Элина Арнольдовна Бибердорф — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН; доцент Новосибирского государственного университета; e-mail: biberdorf@ngs.ru;

Александр Михайлович Блохин — д.ф.-м.н., зав. лаб. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН; зав. кафедрой Новосибирского государственного университета; e-mail: blokhin@math.nsc.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.