

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ АЭРОЗОЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ ПО НАЗЕМНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. С. Корда¹, С. А. Ухинов^{1,2}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.676+535.361:535.51

Рассматривается задача восстановления матрицы аэрозольного рассеяния атмосферы по наблюдениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца. Предложены итерационные алгоритмы, основанные на измерениях первых трех компонент вектора Стокса и численном статистическом моделировании переноса поляризованного излучения. Для обоснования сходимости методов разработан алгоритм расчета матриц Якоби операторов перехода итерационных методов. Проведены тестовые расчеты, показывающие сходимость методов при определенных параметрах среды. Численно исследовано влияние ошибки начальных данных на восстановление компонент матрицы рассеяния.

Ключевые слова: методы Монте — Карло, перенос излучения, матрица рассеяния, поляризация излучения, обратные задачи.

Введение

Рассматривается процесс переноса поляризованного излучения в рассеивающей и поглощающей среде. Для описания поляризационных свойств света воспользуемся способом, предложенным Дж. Г. Стоксом в 1852 г., который является наиболее распространенным и удобным. Стоксом были введены четыре параметра: I , Q , U , V , имеющие размерность интенсивности, определяющие в совокупности интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения. Они будут рассматриваться как компоненты вектор-параметра Стокса $\Phi = (I, Q, U, V)^T$ в четырехмерном функциональном пространстве. Для них выполняются соотношения: $I \geq 0$, $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$. Естественный свет является неполяризованным, т.е. $Q = U = V = 0$. Для эллиптически поляризованного света $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Для стационарных задач компоненты стоксовских вектор-функций зависят от пяти переменных: $\Phi = \Phi(x)$, $x \in X$, где $X = R \times \Omega$, $R \subseteq \mathbf{R}^3$ — пространство координат, $\Omega = \{\omega \in \mathbf{R}^3 : |\omega| = 1\}$ — пространство единичных векторов направлений. В основе математической модели переноса поляризованного излучения лежит феноменологическое предположение о том, что с каждым “фотоном” ассоциируется вектор Стокса, который при рассеянии преобразуется заданной матрицей рассеяния (см., например, [3]).

Стационарное интегро-дифференциальное векторное уравнение переноса поляризованного излучения имеет следующий вид:

$$\omega \nabla \Phi + \sigma \Phi = \int_{\Omega} \sigma_s P(\omega', \omega, r) \Phi(r, \omega') d\omega' + \mathbf{f}_0(r, \omega),$$

или $\mathbf{L}\Phi + \sigma\Phi = \mathbf{S}\Phi + \mathbf{f}_0$, где σ_s — сечение (коэффициент) рассеяния, $\sigma = \sigma_s + \sigma_c$, σ_c — сечение поглощения; \mathbf{f}_0 — вектор-функция источника излучения, $P(\omega', \omega, r)$ — матричная функция рассеяния, которая определяется соотношением $P(\omega', \omega, r) = L(\pi - i_2)R(\omega', \omega, r)L(-i_1)$, где L — специальная матрица поворота, $R = \{r_{ij}\}$ — матрица рассеяния [3]; i_1 и i_2 — углы между плоскостью рассеяния ω, ω' и плоскостями ω', s и

ω , s соответственно, s — единичный вектор, определяющий плоскость отсчета параметров электромагнитной волны [3], обычно равный $(0, 0, 1)$ в плоскопараллельной геометрии среды и $r/|r|$ — в сферической.

Для изотропной среды матрица рассеяния имеет блочно-диагональный вид:

$$R(\mu, r) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & -r_{43} & r_{44} \end{pmatrix},$$

где $\mu = (\omega', \omega)$ — косинус угла рассеяния. Когда рассеивающие частицы являются однородными сферами, добавляются дополнительные условия симметричности $r_{11} = r_{22}, r_{12} = r_{21}, r_{33} = r_{44}, r_{34} = r_{43}$, то есть, в данном случае матрица рассеяния определяется четырьмя компонентами. Если в среде присутствуют оба типа рассеяния, матрица R представляется как средневзвешенное от соответствующих матриц молекулярного рассеяния R_m и аэрозольного рассеяния R_a :

$$R(\mu, r) = \frac{R_a(\mu, r)\sigma_a(r) + R_m(\mu)\sigma_m(r)}{\sigma_a(r) + \sigma_m(r)}, \quad (1)$$

где σ_a, σ_m — сечения аэрозольного и молекулярного рассеяния соответственно, $\sigma_s = \sigma_a + \sigma_m$.

1 Постановка задачи и условные обозначения.

В настоящей работе ставится задача восстановления матрицы рассеяния по наблюдениям вектора Стокса в альмукантарате Солнца, то есть в различных направлениях ω_i , составляющих с зенитом тот же угол θ_s , что и направление на Солнце. Были разработаны алгоритмы восстановления компонент $r_{11}(\mu)$ и $r_{12}(\mu)$ матрицы $R(\mu)$, получены формулы для расчета матриц Якоби операторов перехода построенных методов и проведены вычисления для различных параметров среды и численное исследование сходимости методов. Ранее в работах [1, 5, 6] рассматривалась задача восстановления индикатрисы рассеяния атмосферы $r_{11}(\mu)$ по наземным наблюдениям яркости неба в альмукантарате Солнца.

Для решения данной задачи, помимо наблюдений вектора Стокса, необходимо иметь оптические параметры среды (сечения поглощения, аэрозольного и молекулярного рассеяния, альбеда подстилающей поверхности) на момент проведения эксперимента. Далее будем предполагать, что эти параметры нам известны.

Наблюдение ведется с поверхности Земли в K направлениях ω_i^* , каждое из которых задается зенитным углом θ_s и азимутальным углом φ_i : $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K) = (0, \varphi_2, \dots, 180)$. То есть, первое из этих направлений обращено к Солнцу $\omega_1^* = -\omega_s$. Обозначим $\theta_1, \dots, \theta_K$ — углы однократного рассеяния, т.е. θ_i — это угол между i -тым и первым направлением: $0^\circ = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_K = 2\theta_s < 180^\circ$. Для увеличения интервала изменения углов однократного рассеяния, естественно выбирать варианты наблюдения, где угол θ_s близок к 90° . С другой стороны возникает проблема, что при выборе таких наклонных направлений удобная для расчетов плоская модель атмосферы не подходит. Оптимальным вариантом является выбора угол θ_s в пределах от 72° до 82° . На промежутке $[-1, 1]$ выбираются узлы $\mu_1 = 1 > \mu_2 > \dots > \mu_{\bar{K}} = -1$ таким образом, что $\mu_i = \cos \theta_i = (\omega_s, -\omega_i^*)$, $i = 1, \dots, K$; число узлов $\bar{K} > K$, оставшиеся узлы $\mu_{K+1} > \dots > \mu_{\bar{K}} = -1$ выбираются независимо от направлений наблюдения.

Индикатриса рассеяния $\tilde{g}_1(\mu) = r_{11}(\mu)$ и вторая компонента матрицы рассеяния $\tilde{g}_2(\mu) = r_{12}(\mu)$ задаются в этих узлах,

$$\tilde{g}_1(\mu_i) = g_{1,i}, \tilde{g}_2(\mu_i) = g_{2,i}, \quad i = 1, \dots, \bar{K},$$

а в промежуточных точках интерполируются линейно с помощью базовых кусочно-линейных функций. Обозначим $g = (g_1, g_2)$ — расширенный вектор значений компонент матрицы рассеяния.

Поскольку $\tilde{g}_1(\mu)$ является индикатрисой, то есть функцией плотности распределения случайного косинуса μ угла рассеяния, для нее должны выполняться условия:

$$\tilde{g}_1(\mu) \geq 0, \quad \int_{-1}^1 \tilde{g}_1(\mu) d\mu = 1.$$

В нашем случае, то есть для индикатрисы, полученной с помощью линейной интерполяции между узлами μ_i , эти условия можно записать так:

$$\tilde{g}_1(\mu_i) \geq 0, i = 1, \dots, \bar{K}, \quad \sum_{i=1}^{\bar{K}-1} (\mu_i - \mu_{i+1})(\tilde{g}_1(\mu_i) + \tilde{g}_1(\mu_{i+1}))/2 = 1.$$

Матрица рассеяния представляется как средневзвешенное от матриц молекулярного и аэрозольного рассеяния, соответственно полная индикатриса и вторая компонента матрицы рассеяния также представляют собой средневзвешенное от соответствующих компонент искомого матрицы аэрозольного рассеяния и известной матрицы молекулярного рассеяния. Из представления (1) имеем $r_{1i}(\mu) = \frac{\sigma_a}{\sigma_s} r_{1i,a}(\mu) + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} r_{1i,m}(\mu)$; $r_{11,m}(\mu) = \frac{3}{8}(1 + \mu^2)$, $r_{12,m}(\mu) = -\frac{3}{8}(1 - \mu^2)$ — первая и вторая компоненты известной молекулярной (рэлеевской) матрицы рассеяния, $r_{11,a}(\mu)$, $r_{12,a}(\mu)$ — искомые компоненты аэрозольной матрицы рассеяния, построенные по вектору значений $\{g_i\}_{i=1}^K$; $F_i(g) = (F_{1,i}, F_{2,i}, F_{3,i}, F_{4,i})$ — вектор Стокса в направлении наблюдения ω_i ; $F_i(g) = F_i^{(1)}(g) + F_i^{(2)}(g) + F_i^{(A)}(g)$; $F_i^{(1)}(g)$ — вектор Стокса однократно рассеянного излучения; $F_i^{(A)}(g)$ — вектор Стокса “подсветки” подстилающей поверхностью; $F_i^{(2)}(g)$ — вектор Стокса многократно рассеянного излучения при нулевом альбедо А; F_i^* — измеренный вектор Стокса, $i = 1, \dots, K$.

Параметры Стокса однократно рассеянного излучения вычисляются аналитически, т.к. во всех направлениях наблюдения атмосферная толща одинакова:

$$F_{1,i}^{(1)} = C r_{11}(\mu_i), F_{2,i}^{(1)} = C \cos 2i_2(\mu_i) r_{12}(\mu_i), F_{3,i}^{(1)} = C \sin 2i_2(\mu_i) r_{12}(\mu_i). \quad (2)$$

Здесь i_2 — угол между плоскостью рассеяния $-\omega_i, -\omega_s$ и плоскостью ω_i, s ; $s = (0, 0, 1)$, $\mu = (\omega_s, \omega_i)$; $\cos i_2(\mu_i) = -\frac{\cos \theta_s}{\sin \theta_s} \sqrt{\frac{1 - \mu_i}{1 + \mu_i}}$; $C = \frac{\tau_s}{2\pi\mu_0} \exp(-\frac{\tau}{\mu_0})$, где $\mu_0 = \cos \theta_s$ — параметр альмукантарата, τ — полная оптическая толщина атмосферы, то есть $\tau = \int_0^H \sigma(z) dz$, τ_s — оптическая толщина атмосферы по-рассеянию, H — высота атмосферы. Заметим, что в данном случае $\tau_s = \tau_m + \tau_a$, где τ_m и τ_a — оптические толщины по молекулярному и аэрозольному типам рассеяния соответственно.

2 Методы решения

Восстановление матрицы рассеяния проводится в два этапа. Теоретически, возможно построить алгоритм для одновременного восстановления первой и второй компонент, однако, на практике он получается очень неустойчивым и расходится из-за ошибок вычисления. Поэтому, оптимально сначала найти приближение первой компоненты матрицы рассеяния, полагая вторую нулевой, а затем, с уже вычисленной первой компонентой найти приближение второй. Заметим, что вектор Стокса однократно рассеянного излучения (2) зависит только от первой и второй компонент матрицы рассеяния, соответственно, для тонкого слоя, то есть в приближении однократного рассеяния в котором решается задача, вектор Стокса слабо зависит от третьей и четвертой компонент матрицы рассеяния, что подтверждается численными расчетами. Исходя из этого, полагаем блок матрицы, соответствующий третьей и четвертой компоненте, равным единичной матрице. Итак, на первом этапе восстанавливается индикатриса рассеяния с помощью одного из приведенных ниже методов. На этом шаге неизвестная матрица аэрозольного рассеяния R_a полагается диагональной и изотропной, то есть поляризация излучения аэрозолем не учитывается:

$$R_a(\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{a,1}(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{a,1}(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Аддитивный метод восстановления индикатрисы [1]:

$$g_1^{(k+1)} = C^{-1} [F^* - F_2(g_1^{(k)}) - F_A(g_1^{(k)})] = G_{ad}(g_1^{(k)}). \quad (4)$$

Уточненный (сравнительно с [4], [7]) мультипликативный метод:

$$g_1^{(k+1)} = \frac{F_1(g_1^{(k)})}{C} \cdot \frac{F^*}{F(g_1^{(k)})} = G_{mult}(g_1^{(k)}). \quad (5)$$

Если функция $F_1(g)/F(g)$ не зависит от g , что в какой-то степени выполняется при $A = 0$ и достаточно малом τ , то мультипликативный метод сходится за один шаг. Для аддитивного метода так же имеет место сходимость при $F(g) - F_1(g) \equiv const$.

Заметим, что величина $F_A(g)$ слабо зависит от g из геометрических соображений. Исходя из этого в [8] был предложен *комбинированный метод*:

$$g_1^{(k+1)} = \frac{F_1(g_1^{(k)})}{C} \cdot \frac{F^* - F_A(g_1^{(k)})}{F(g_1^{(k)}) - F_A(g_1^{(k)})} = G(g_1^{(k)}). \quad (6)$$

Он сходится за один шаг, если $F_A(g)$ и $F_1(g)/[F(g) - F_A(g)]$ не зависят от g_1 . Здесь в соотношениях (4), (5), (6) и далее все операции покомпонентные.

Поляризация излучения молекулами воздуха учитывается полностью с помощью известной матрицы рэлеевского рассеяния. Полная матрица рассеяния $R(\mu)$ строится как средневзвешенное от матрицы молекулярного рассеяния и матрицы аэрозольного рассеяния. Рассмотрим процесс восстановления индикатрисы по шагам:

П.0. Нормировкой первой компоненты вектора Стокса “измеренных яркостей” F^* получаем первое приближение вектора узловых значений индикатрисы рассеяния: $g_1^{(k)} = C^{-1}F_1^*, k = 0$.

П.1. Выделяем приближение вектора узловых значений индикатрисы аэрозольного рассеяния из приближенного вектора узловых значений полной индикатрисы:

$$g_{a,1,i}^{(k)} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a} g_{1,i}^{(k)} - \frac{\sigma_m}{\sigma_a} r_{11,m}(\mu_i).$$

С помощью интерполяции кусочно-линейными функциями и последующей нормировки по этому вектору строится индикатриса $\tilde{g}_{1,a}(\mu)$ и матрица рассеяния $R(\mu)$. Решаем прямую задачу с помощью локальной векторной оценки “по направлению” метода Монте — Карло с полученной матрицей рассеяния $R(\mu)$, таким образом, находим вектора $F(g^{(k)}), F_1(g^{(k)}), F_A(g^{(k)}), F_2(g^{(k)})$.

П.2. Вычисляем следующее приближение $g_1^{(k+1)}$ по формуле, соответствующей выбранному методу (4), (5), (6). Идем на П.1. и продолжаем процесс до сходимости итераций в пределах точности вычислений.

На втором этапе переходим к восстановлению второй компоненты $r_{12}(\mu) = \tilde{g}_2(\mu)$ матрицы рассеяния. Полагаем, что при этом неизвестная матрица аэрозольного рассеяния имеет блочно-диагональный вид:

$$R_a(\mu) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{a,1}(\mu) & \tilde{g}_{a,2}(\mu) & 0 & 0 \\ \tilde{g}_{a,2}(\mu) & \tilde{g}_{a,1}(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для решения этой задачи на основе представления (2) были построены следующие алгоритмы.

Аддитивный метод по второй или третьей компоненте:

$$g_{2,i}^{(k+1)} = \frac{F_{2,i}^* - F_{2,i}(g_2^{(k)}) + g_{2,i}^{(k)} C \cos 2i_2(\mu_i)}{C \cos 2i_2(\mu_i)} = G_{ad,2}(g_2^{(k)}). \quad (8)$$

$$g_{2,i}^{(k+1)} = \frac{F_{3,i}^* - F_{3,i}(g_2^{(k)}) + g_{2,i}^{(k)} C \sin 2i_2(\mu_i)}{C \sin 2i_2(\mu_i)} = G_{ad,3}(g_2^{(k)}). \quad (9)$$

Комбинированный метод по второй/третьей компоненте вектора Стокса ($m=2$ или $m=3$):

$$g_{2,i}^{(k+1)} = g_{2,i}^{(k)} \cdot \frac{F_{m,i}^* - F_{m,i}^{(A)}(g_2^{(k)})}{F_{m,i}(g_2^{(k)}) - F_{m,i}^{(A)}(g_2^{(k)})} = G_m(g_{2,i}^{(k)}). \quad (10)$$

Полная матрица рассеяния $R(\mu)$ строится как так же, как при восстановлении индикатрисы рассеяния. Алгоритм решения:

П. 0. Из второй компоненте вектора Стокса “измеренных яркостей” F^* получаем начальное приближение $g_2^{(k)}, k = 0$ вектора узловых значений второй компоненты матрицы рассеяния: $g_{2,i}^{(k)} = \frac{F_{2,i}^*}{C \cos 2i_2(\mu_i)}$.

П. 1. Из приближенного значения вектора узловых значений второй компоненты матрицы рассеяния выделяем приближение вектора узловых значений второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния:

$$g_{a,2,i}^{(k)} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a} g_{2,i}^{(k)} - \frac{\sigma_m}{\sigma_a} r_{12,m}(\mu_i).$$

По этому вектору с помощью линейной интерполяции строится функция $\tilde{g}_{2,a}(\mu)$ и матрица $R(\mu)$. Для второй компоненты матрицы рассеяния нет условий нормировки, как в случае восстановления индикатрисы, однако, из физических соображений полагаем, что $r_{12}(\mu)$ монотонно убывает в хвосте и не имеет резких скачков, поэтому при их появлении в процессе расчетов значения в этих узлах полагаются равными 0. Как и в случае восстановления индикатрисы рассеяния, решаем прямую задачу методом Монте—Карло с полученной матрицей рассеяния и вычисляем F, F_A, F_1, F_2 . Здесь так же, как и при восстановлении первой компоненты матрицы, применяется локальная векторная оценка “по направлению” метода Монте—Карло.

П. 2. Вычисляем следующее приближение $g_2^{(k+1)}$ по формуле, соответствующей выбранному методу (8), (9), (10). Далее идем на П.1 и продолжаем итерации до сходимости или расходимости алгоритма.

3 Результаты

Для всех приведенных методов восстановления $r_{11}(\mu)$ и $r_{12}(\mu)$ были проведены тестовые расчеты, показавшие сходимость методов при определенных параметрах среды, см. Рис.1.

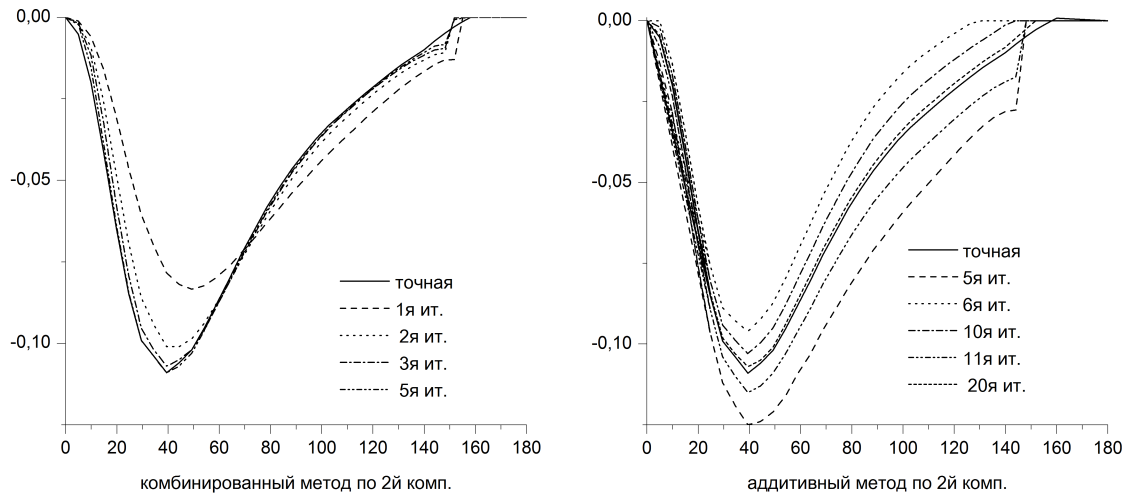


Рис. 1: Результаты восстановления компоненты $r_{12}(\mu)$ по 2-ой компоненте комбинированным (слева) и аддитивным (справа) методами; $A=0.5$, $\tau_a = 0.15$, $\tau_m = 0.05$.

Для обоснования сходимости итерационного метода, то есть для существования неподвижной точки g^* и сходимости к ней итераций $g^{(k)}$, достаточно выполнения условия, что спектральный радиус матрицы Якоби оператора перехода G меньше единицы [2, 5]. В [5] приводятся формулы для расчета $G'(g^*)$ для методов восстановления индикатрисы рассеяния, то есть для оператора перехода методов, определяющихся формулами (4), (5), (6). В данной работе были получены аналогичные формулы для методов восстановления второй компоненты матрицы рассеяния, определяющихся формулами (8), (9), (10). Формулы расчета матриц Якоби были получены с помощью дифференцирования векторных оценок метода Монте—Карло. Затем были проведены расчеты спектральных радиусов, что позволило численно проверить сходимость методов.

Таблица 1: Спектральный радиус и норма для матриц Якоби операторов перехода итерационных методов восстановления $r_{12}(\mu)$. $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$

τ_a	Метод восстановления					
	Комб. m=2		Комб. m=3.		Аддитивный	
	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма	Сп.рад.	Норма
0,5	0,957	1,503	0,875	1,524	3,856	4,266
0,3	0,953	1,235	0,653	1,799	1,821	2,002
0,15	0,868	0,967	0,701	1,630	0,907	0,983
0,05	0,856	0,898	0,762	0,786	0,414	0,460

В Таблице 1 приведены результаты расчетов спектрального радиуса и нормы матриц Якоби при $\tau_m = 0.05$, $A = 0.5$ для методов восстановления второй компоненты матрицы рассеяния. Отметим, методы восстановления второй компоненты матрицы рассеяния более чувствительны к увеличению оптической толщины слоя, то есть сходимость методов восстановления $r_{12}(\mu)$ имеет место для более тонких слоев, чем методов восстановления индикатрисы рассеяния. И так же, как для методов восстановления индикатрисы рассеяния, для очень тонких оптических толщин аддитивный метод сходится быстрее, однако при увеличении толщины слоя он начинает расходиться, в то время как комбинированный и мультипликативный методы сходятся.

Так же было проведено исследование зависимости сходимости методов от ошибки измерений. Для всех приведенных методов были проведены тестовые расчеты, при которых сначала задача решалась по точным начальным данным, полученным решением прямой задачи, а затем по начальным данным с добавленной случайной ошибкой, распределенной по нормальному закону. Методы восстановления индикатрисы оказались более устойчивы к ошибкам начальных данных, для них расчеты показали, что случайная погрешность 1% в начальных данных дает до 1% погрешности в начальных узлах, где индикатриса принимает максимальные значения, и до 8–10% в хвосте, где значения индикатрисы малы и погрешность восстановления значительно больше. Методы восстановления второй компоненты матрицы рассеяния r_{12} также показали устойчивость, однако они более чувствительны к ошибкам начальных данных. Например, для комбинированного метода по 2-ой компоненте погрешность начальных данных 1% дает в среднем 3% погрешности, а для аддитивного метода — 5–7%.

Список литературы

- [1] Антюфеев В. С., Михайлов Г. А., Лифшиц Г. Ш., Иванов А. И. Определение аэрозольных индикатрис рассеяния безоблачной атмосферы в спектральных областях $0.55 \div 2.4$ мкм. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. N 2. С. 146–155. СО АН СССР, 1988.
- [2] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
- [3] Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976. [Engl.transl.: Springer - Verlag, 1980]
- [4] Антюфеев В. С., Назаралиев М. А. Обратные задачи атмосферной оптики. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988.
- [5] Ухинов С. А., Чимаева А. С. Обоснование сходимости для алгоритмов метода Монте — Карло восстановления индикатрисы рассеяния с учетом поляризации. // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 2011. Т. 14. N 1. С. 101–114.
- [6] Chimaeva A.S., Mikhailov G.A., Ukhiniov S. A. Monte Carlo algorithms for reconstructing a scattering phase function with polarization taken into account // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009. Vol. 24. N 5. P. 455–465.
- [7] Михайлов Г. А. Некоторые задачи теории и приложений методов Монте — Карло. Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН СССР, 1978.

- [8] Михайлов Г. А., Ухинов С. А., Чимаева А. С. Алгоритмы метода Монте—Карло для восстановления индикатрисы рассеяния с учетом поляризации. // Доклады Академии Наук, 2008, том 423, №2, с. 161–164.
- [9] Ухинов С. А., Чимаева А. С. Определение второй компоненты матрицы аэрозольного рассеяния по наземным измерениям поляризованного излучения в альмукантарате Солнца методом Монте—Карло // Сб. материалов междунар. конф. «Кубатурные формулы, методы Монте—Карло и их приложения», 4–7 июля 2011, Красноярск. С. 111–115.

*Анна Сергеевна Корда — к.ф.-м.н., мл. науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: asc@ostf.ssc.ru;*

*Сергей Анатольевич Ухинов — д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Института вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: sau@sscc.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.