

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКОМБИНАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК ПРИ НАЛИЧИИ ДИФФУЗИИ И ДРЕЙФОВОЙ СКОРОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ВНЕШНИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

К. К. Сабельфельд^{1,2}, А. Е. Киреева¹

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 51.73, 519.245

В работе реализована стохастическая модель рекомбинации электронов и дырок при наличии диффузии и дрейфовой скорости частиц. Описана математическая модель изучаемого процесса, основанная на разработанной ранее К.К. Сабельфельдом модели рекомбинации электронов и дырок в неоднородном полупроводнике. Приведены алгоритмы метода Монте — Карло для моделирования диффузии и дрейфа частиц. Представлены результаты вычислительных экспериментов. С помощью построенной модели рекомбинации изучено влияние модуля и направления вектора скорости дрейфа электронов и дырок на интенсивность аннигиляции частиц.

Ключевые слова: рекомбинация, полупроводник, диффузия, дрейф, стохастическое моделирование, метод Монте — Карло, алгоритм блуждания по сферам.

Введение

Широкозонный полупроводник нитрид галлия (GaN) представляет большой интерес в области разработок полевых транзисторов и современной оптоэлектроники [1]. Исследование процессов, протекающих в неоднородных полупроводниках, способствует расширению области их применения и созданию новых полупроводниковых материалов с улучшенными характеристиками. В полупроводниковом материале всегда имеются различные дефекты и дислокации в атомной решетке. Пространственная вариация неоднородностей порождает упругие напряжения, что создает электрический потенциал и дрейфовую скорость электронов и дырок в этом потенциале. Временная зависимость фотолюминесценции от дрейфа и диффузии численно исследуется в [2] для одномерного случая.

В [3, 4, 5] разработана стохастическая модель рекомбинации электронов и дырок в неоднородном полупроводнике GaN . В этих работах рассматривается двумерный полупроводник, в котором присутствуют дефекты — центры нерадиационной рекомбинации. В начальный момент времени с помощью фемтосекундного лазера в полупроводнике создаётся избыток электронов и дырок, которые аннигилируют друг с другом путём туннелирования, при непосредственном столкновении вследствие диффузии и при взаимодействии в рекомбинационных центрах. Все эти процессы включены в интегро-дифференциальную стохастическую модель, предложенную в [3, 4, 5].

На основе модели рекомбинации [3, 4, 5] в данной работе моделируется рекомбинация электронов и дырок вследствие диффузии и дрейфа в трёхмерном полупроводнике. Диффузия и дрейф частиц описываются с помощью уравнения “drift-diffusion-reaction”, алгоритм решения которого представлен в [6]. С помощью реализованной модели рекомбинации частиц при наличии их диффузии и дрейфа изучается влияние модуля и направления вектора дрейфа на скорость аннигиляции.

1 Математическая модель рекомбинации электронов и дырок в полупроводнике

Пространственные неоднородности в объёме полупроводника порождают упругие напряжения, создающие электрический потенциал φ и дрейфовую скорость электронов и дырок в этом потенциале, которая записывается в виде $\mathbf{V} = \mu \cdot \nabla \varphi$, где μ — подвижность, связанная с коэффициентом диффузии соотношением Эйнштейна $D = \mu \cdot k \cdot T$, здесь k — постоянная Больцмана, T — температура. При малых напряжениях потенциал линейно пропорционален напряжению, и мы имеем постоянный профиль дрейфовой скорости. Результирующая средняя дрейфовая скорость также может иметь ненулевое постоянное значение. Постоянная дрейфовая скорость может порождаться и внешним электрическим полем. Относительный эффект от дрейфового и диффузионного движения характеризуется числом Пекле, которое можно записать в следующем виде $Pe = L \cdot \mathbf{V} / D$, где $L = \sqrt{D\tau}$ — длина диффузии, τ — среднее время жизни подвижной частицы.

В соответствие с алгоритмом рекомбинации электронов и дырок, предложенным в [3, 4, 5], в начальный момент времени $t = 0$ электроны (n) и дырки (p) случайно распределяются в объёме G с равномерной плотностью распределения: $d(\mathbf{r}) = \{1/|G|, \text{ если } \mathbf{r} \in G; 0, \text{ если } \mathbf{r} \notin G\}$, где \mathbf{r} обозначает пространственную координату. Электроны и дырки могут диффундировать в объёме G с константами диффузии D_n и D_p и перемещаться с векторами скорости \mathbf{V}_n и \mathbf{V}_p . В данной работе предполагается, что модули векторов скорости электронов и дырок одинаковые: $|\mathbf{V}_n| = |\mathbf{V}_p| = |\mathbf{V}|$. Встретившиеся при перемещении электроны и дырки аннигилируют друг с другом с коэффициентом β . В чисто диффузионном случае β получен Смолуховским, и имеет вид $\beta = (r_n + r_p)(D_n + D_p)$, где r_n (нм) и r_p (нм) — радиусы электронов и дырок. В том случае, когда вклад во взаимодействие дают также и регулярные скорости частиц, задача оценки β существенно усложняется. Однако в алгоритме стохастического моделирования рекомбинации электронов и дырок явные выражения для коэффициента β не нужны, что является замечательным свойством этого метода. Более того, на основе стохастического моделирования коэффициент β может быть вычислен.

Изменение плотности электронов $\rho_n(\mathbf{r}; t)$ и дырок $\rho_p(\mathbf{r}; t)$ описывается следующим уравнением Смолуховского:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n(\mathbf{r}; t)}{\partial t} &= D_n \cdot \Delta \rho_n(\mathbf{r}; t) + \mathbf{V}_n \cdot \nabla \rho_n(\mathbf{r}; t) - \beta \cdot \rho_n(\mathbf{r}; t) \rho_p(\mathbf{r}; t), \\ \frac{\partial \rho_p(\mathbf{r}; t)}{\partial t} &= D_p \cdot \Delta \rho_p(\mathbf{r}; t) + \mathbf{V}_p \cdot \nabla \rho_p(\mathbf{r}; t) - \beta \cdot \rho_p(\mathbf{r}; t) \rho_n(\mathbf{r}; t). \end{aligned} \quad (1)$$

Аннигиляция электрона и дырки сопровождается выделением энергии в виде фотона. В модели поток фотонов вычисляется по формуле: $\phi(t) = \left\langle \int \frac{1}{|G|} d\mathbf{r} \int \beta \rho_n(\mathbf{r}; t) \rho_p(\mathbf{r} + \mathbf{x}; t) d\mathbf{x} \right\rangle$, где угловые скобки обозначают математическое ожидание по начальным распределениям частиц, $|G|$ — объём области G .

2 Моделирование диффузии и дрейфа частиц с помощью метода Монте — Карло

Процессы, описываемые уравнением (1): диффузия, дрейф и рекомбинация электронов и дырок, в данной работе моделируются с помощью метода Монте — Карло на основе алгоритма диффузионно-дрейфового блуждания по сферам, предложенного в [6].

Процесс диффузионно-дрейфового блуждания по сферам для частицы с координатой \mathbf{x}_0 в начальный момент времени t_0 определяется цепью Маркова $\{\mathbf{x}_k, \tau_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k R_k$ — случайная точка выхода частицы на сферу $S_k(\mathbf{x}_k, R_k)$ с центром в точке \mathbf{x}_k и радиусом R_k , $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \dots\}$ — это последовательность независимых изотропных векторов единичной длины, τ_k — случайное время выхода частицы на сферу S_k . Таким образом, чтобы построить очередную точку $\{\mathbf{x}_{k+1}, \tau_{k+1}\}$ вокруг частицы строится сфера $S_k(\mathbf{x}_k, R_k)$, радиус R_k которой выбирается таким образом, чтобы внутри сферы не было частиц других типов, с которыми данная частица может вступить во взаимодействие. Например, внутри сферы, построенной вокруг электрона, не должно быть дырок. Для выбранного радиуса R_k моделируются случайная точка \mathbf{x}_{k+1} на сфере и случайное время τ_{k+1} выхода частицы из сферы. Частица перемещается в точку \mathbf{x}_{k+1} , а время моделирования увеличивается: $t = t + \tau_{k+1}$.

Рассмотрим сферическую систему координат, центр которой совпадает с центром сферы $S(0, R)$, а ось Z сонаправлена с вектором скорости дрейфа \mathbf{V} . Плотность распределения точек на поверхности сферы при

диффузионно-дрейфовом смещении частиц получена в [6] и для выбранной системы координат имеет вид:

$$p_{\kappa}(\theta, \varphi) = \frac{\kappa \cdot \sin \theta \cdot \exp\{\kappa \cos \theta\}}{4\pi \sinh \kappa}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{V}| \cdot R}{2D}.$$

где θ и φ — это зенитный и азимутальный углы случайно выбранного направления.

В [6] также приведен алгоритм моделирования случайной точки выхода частицы на сферу. Координаты случайной точки на сфере вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= R \cdot \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= R \cdot \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где смещение в направлении скорости дрейфа $\cos \theta$ определяется выражением:

$$\cos \theta = 1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \log[1 - (1 - e^{-2\kappa}) \cdot rand], \quad (4)$$

здесь $rand$ — случайное число, равномерно распределенное на интервале $[0; 1]$. Значение $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Азимутальный угол φ распределен равномерно на интервале $[0; 2\pi]$.

Время, которое понадобится частице, чтобы достичь сферы $S(0, R)$, имеет плотность распределения, представленную в виде бесконечного знакопеременного ряда, [6]:

$$p_t(\tau) = \frac{2}{Q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^2 n^2 D}{R^2} \exp \left\{ - \left(\frac{\pi^2 n^2 D}{R^2} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{4D} \right) \cdot \tau \right\}, \quad (5)$$

$$Q = \frac{(\mathbf{V}R)/(2D)}{\sinh((\mathbf{V}R)/(2D))}.$$

Эффективным методом для моделирования случайных величин с плотностью распределения такого вида является алгоритм Девроя, представляющий собой метод исключения для знакопеременных рядов [7]. Суть этого метода заключается в следующем.

Плотность распределения представляется в виде произведения мажорирующей функции $h(\tau)$ и знакопеременного ряда:

$$\begin{aligned} p_t(\tau) &= h(\tau) \cdot [1 - a_1(\tau) + a_2(\tau) - a_3(\tau) + \dots] = \\ &= \frac{2}{Q} \frac{\pi^2 D}{R^2} \exp \left\{ - \left(\frac{\pi^2 D}{R^2} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{4D} \right) \cdot \tau \right\} \cdot \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 \exp \left\{ \frac{\pi^2 D}{R^2} (1 - n^2) \cdot \tau \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Случайная величина τ моделируется с помощью Алгоритма 1:

1. Сгенерировать τ с плотностью распределения $c \cdot h$, где c — нормализующая константа. Для плотности распределения $p_t(\tau)$ (5) плотность $c \cdot h$ имеет следующий вид:

$$c \cdot h = \left(\frac{\pi^2 D}{R^2} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{4D} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{\pi^2 D}{R^2} + \frac{|\mathbf{V}|^2}{4D} \right) \cdot \tau \right\}; \quad (7)$$

Сгенерировать случайное число U , равномерно распределенное на интервале $[0; 1]$;

Присвоить $n = 0$, $S = 0$.

2. $n = n + 1$, $S = S + a_n(\tau)$. Если $U \geq S$, выйти с текущим значением τ .
3. $n = n + 1$, $S = S - a_n(\tau)$. Если $U < S$, перейти на шаг 1.
4. Перейти на шаг 2.

Зная точку и время выхода частицы на сферу, можно сформулировать Алгоритм 2 моделирования диффузии, дрейфа и рекомбинации электронов и дырок:

1. В начальный момент времени t_0 генерируются координаты n_i для $C_n(t_0)$ электронов и координаты p_i для $C_p(t_0)$ дырок. Координаты частиц распределяются в объёме G случайно, равномерно и независимо.
2. Для каждого электрона n_i , $i = 1, \dots, C_n(t_k)$ (дырки p_i , $i = 1, \dots, C_p(t_k)$), здесь $C_n(t_k)$, $C_p(t_k)$ — это количество электронов и дырок на текущем временном шаге t_k :
 - вычисляется расстояние до ближайшей дырки (электрона) — r_i^{np} ;
 - запоминается порядковый номер m ближайшей дырки (электрона);
 - строится сфера с радиусом $R_i = r_i^{np}$;
 - в соответствии с Алгоритмом 1 разыгрывается случайное время τ_i выхода электрона (дырки) из построенной сферы $S(n_i, R_i)$ ($S(p_i, R_i)$).
3. Вычисляются вероятности случайных событий: перемещения электрона $P_n = C_n(t_k) \cdot D_n$ и перемещения дырки $P_p = C_p(t_k) \cdot D_p$.
4. С вероятностями P_n , P_p выбирается одно из событий: перемещение электрона или дырки.
5. Для выбранного события, например, для перемещения электрона:
 - выбирается электрон с минимальным временем выхода из сферы $\tau_{min} = \min(\tau_i)$, $i = 1, \dots, C_n(t_k)$, и запоминается порядковый номер l выбранного электрона;
 - по формуле (3) генерируется случайная точка на сфере $S(n_l, R_l)$, построенной для выбранного электрона, и электрон перемещается в эту точку;
 - вычисляется расстояние r от электрона n_l до ближайшей дырки p_m . Если $r < \epsilon$, где ϵ — достаточно малое число, то частицы аннигилируют: $C_n(t_{k+1}) = C_n(t_k) - 1$, $C_p(t_{k+1}) = C_p(t_k) - 1$, и образуется фотон $C_{photon}(t_{k+1}) = C_{photon}(t_k) + 1$;
 - время моделирования увеличивается $t_{k+1} = t_k + \tau_{min}/C_n(t_k)$, $k = k + 1$.
6. Если $C_n(t_k) > 0$, $C_p(t_k) > 0$, и время моделирования меньше заданного $t_k < T_{fin}$, то переход на шаг 2.

На каждом временном шаге t_k вычисляются плотности электронов $\rho_n(t_k) = C_n(t_k)/|G|$ и дырок $\rho_p(t_k) = C_p(t_k)/|G|$, где $|G|$ — это объём области G . Поток фотонов вычисляется как число фотонов, образовавшихся за промежуток времени $[t_{k-1}; t_k]$: $\phi(t_k) = C_{photon}(t_k)/(t_k - t_{k-1})$.

В соответствии с законом больших чисел [8] значения характеристик $\rho_n(t_k)$, $\rho_p(t_k)$, $\phi(t_k)$ оцениваются на основе их математических ожиданий, для этого Алгоритм 2 выполняется для различных начальных распределений координат электронов и дырок M раз, и вычисленные значения характеристик усредняются.

3 Результаты моделирования рекомбинации электронов и дырок в полупроводнике

С помощью Алгоритма 2, описанного выше, выполнено моделирование рекомбинации электронов и дырок вследствие диффузии и дрейфа. Вычисления проводились на ресурсах ЦКП Сибирский Суперкомпьютерный Центр СО РАН*. В качестве модельных параметров выбраны значения начального количества частиц $C_n(t_0)$, $C_p(t_0)$, размер области $|G|$, коэффициенты диффузии D_n , D_p , модули векторов скорости $|V_n|$, $|V_p|$ и их направления V_n^{dir} , V_p^{dir} . Число экспериментов M с различными начальными распределениями координат частиц, выполняемых для вычисления значений характеристик, равно 100. Для сопоставления результатов моделирования рекомбинации с данными физических экспериментов в качестве единиц измерения используются нанометры (нм) и наносекунды (нс). При моделировании используются периодические граничные условия.

Зависимость скорости рекомбинации частиц от значений коэффициентов диффузии D_n , D_p изучена в [9], поэтому в данной работе основной задачей является исследование влияния скорости дрейфа на процесс аннигиляции электронов и дырок. Рассмотрим рекомбинацию частиц вследствие диффузии и дрейфа для следующих значений модельных параметров: $C_n(0) = C_p(0) = 1000$, $|G| = 100 \times 100 \times 100$ нм,

* <http://www2.sccc.ru/>

$D_n = 0.5$, $D_p = 0.1$ $\text{нм}^2 \cdot \text{нс}^{-1}$. Вектор скорости дрейфа электронов направлен вдоль оси абсцисс O_x , а вектор скорости дрейфа дырок направлен в противоположном направлении, против оси O_x . Модули векторов скорости дрейфа электронов и дырок вычисляются как функции от коэффициентов диффузии и общего коэффициента скорости c : $|V_n| = c \cdot D_n$, $|V_p| = c \cdot D_p$. Значение ϵ -окрестности, определяющее радиус сферы, внутри которой происходит аннигиляция электрона и дырки, выбрано равным 0.5.

В соответствии с алгоритмом кинетического метода Монте — Карло, на каждом шаге случайно выбранная частица перемещается в случайную точку. При этом расстояние, на которое она переместилась, не должно быть очень большим, чтобы обеспечить равномерное движение всех частиц. Для выполнения этого условия максимальный размер радиуса сферы, на которую частица может перейти за один шаг, ограничен значением $R_{max} = 0.5$ нм.

Значения плотности электронов $\rho_n(t)$ и потока фотонов $\phi(t)$ для различных значений коэффициента скорости c представлены на рис. 1.

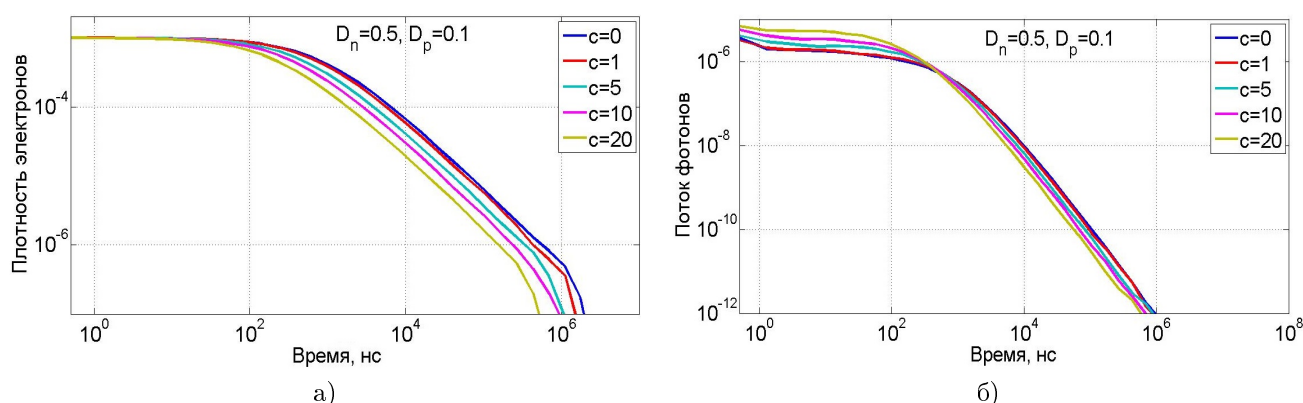


Рис. 1: Изменение плотности электронов (а) и потока фотонов (б) при увеличении коэффициента скорости дрейфа c

Как показано на рис. 1 при малых значениях коэффициента скорости $c < 1$ графики плотности электронов и потока фотонов практически совпадают с графиками для случая чистой диффузии. Увеличение коэффициента скорости дрейфа до $c = 5$ оказывает заметное влияние на интенсивность рекомбинации электронов и дырок. При дальнейшем росте c скорость рекомбинации также возрастает. Такое поведение объясняется тем, что сечение взаимодействия электронов и дырок определяется двумя составляющими: диффузионной $D_n + D_p$ и дрейфовой $V_n - V_p = c \cdot (D_n - D_p)$. При малых значениях модуля скорости дрейфа режим аннигиляции частиц остаётся преимущественно диффузионным. Тогда как для больших значений скорости дрейфа $c \geq 5$ рекомбинация частиц ускоряется за счёт совместного диффузионно-дрейфового режима.

Как определено в разделе 1, число Пекле характеризует отношение диффузионной и дрейфовой составляющей движения $Pe = L \cdot \mathbf{V}/D$. Длина диффузии $L = \sqrt{D\tau}$ определяется с помощью вычислительного эксперимента. Для этого в процессе моделирования для каждой частицы вычисляется время жизни, т.е. время до её аннигиляции. Затем определяется среднее время жизни всех частиц τ , длины диффузии L_n , L_p и число Пекле Pe_n , Pe_p для электронов и дырок. Значения характеристик, полученные для графиков $\rho_n(t)$ и $\phi(t)$, представленных на рис. 1, приведены в таблице 1. При увеличении скорости дрейфа время жизни частиц и длина диффузии уменьшаются, а число Пекле возрастает. Таким образом, большие значения числа Пекле соответствуют преобладанию дрейфовой составляющей в движении частиц.

Влияние направления скорости дрейфа электронов и дырок изучалось для одинаковых значений коэффициентов диффузии $D_n = D_p = 0.5$ $\text{нм}^2 \cdot \text{нс}^{-1}$ и модулей скорости $|V_n| = |V_p| = c \cdot 0.5$ нм/нс. На рис. 2 представлены графики плотности электронов $\rho_n(t)$ и потока фотонов $\phi(t)$ для сонаправленных ($V_n^{dir} = V_p^{dir}$) и противоположно направленных ($V_n^{dir} = -V_p^{dir}$) векторов дрейфа электронов и дырок V_n и V_p для двух значений коэффициента скорости: $c = 1$ и $c = 10$. Значения характеристик $\rho_n(t)$ и $\phi(t)$ заметно различаются при сонаправленном и противоположно направленном движении частиц как для малых, так и для больших значений коэффициента скорости c . Скорость рекомбинации частиц получилась выше при одинаковом направлении векторов дрейфа электронов и дырок, однако этот результат требует дополнительной проверки.

Таблица 1: Значения характеристик, вычисленные для $D_n = 0.5$, $D_p = 0.1$ и различных значений коэффициента скорости c

c	τ	L_n	L_p	Pe_n	Pe_p
0	2481,84	35,23	15,75	0	0
1	2160,86	32,87	14,70	32,87	14,70
5	1484,33	27,24	12,18	136,21	60,92
10	1096,88	23,42	10,47	234,19	104,73
20	697,28	18,67	8,35	373,44	167,01

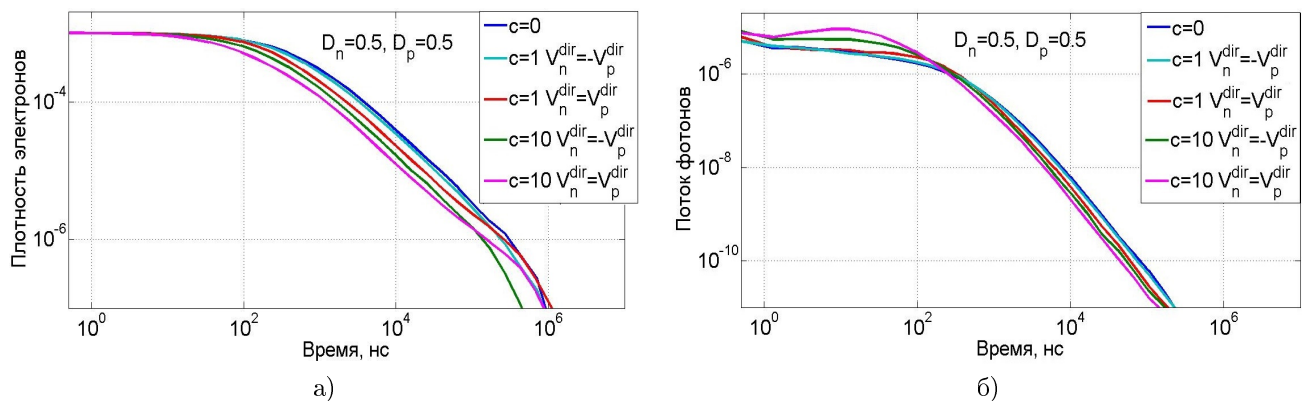


Рис. 2: Изменение плотности электронов (а) и потока фотонов (б) для одинаковых $V_n^{dir} = V_p^{dir}$ и противоположных $V_n^{dir} = -V_p^{dir}$ направлений векторов скорости электронов и дырок

Заключение

В работе реализована стохастическая модель рекомбинации электронов и дырок при наличии диффузии и дрейфовой скорости в неоднородном полупроводнике. В рамках построенной модели изучено влияние модуля и направления вектора скорости дрейфа электронов и дырок на интенсивность аннигиляции частиц. Обнаружено, что при увеличении модуля вектора скорости процесс рекомбинации частиц ускоряется. Направление векторов скорости дрейфа электронов и дырок относительно друг друга оказывает заметное влияние на интенсивность аннигиляции частиц. В данной модели рекомбинации при сонаправленном дрейфе электронов и дырок скорость рекомбинации выше, чем при противоположно направленном дрейфе частиц, однако этот результат требует более тщательной проверки и проведения дополнительных численных экспериментов. Кроме того, в процессе моделирования вычислялись среднее время жизни частиц, длина диффузии и число Пекле. При увеличении скорости дрейфа время жизни частиц и длина диффузии уменьшаются, а число Пекле возрастает. Полученный результат соответствует физическому определению числа Пекле, характеризующему относительный эффект от дрейфового и диффузионного движения частиц.

Список литературы

- [1] Gorgis A., Flissikowski T., Brandt O., Cheze C., Geelhaar L., Riechert H., and Grahn H.T. Time-resolved photoluminescence spectroscopy of individual GaN nanowires // Physical review B. 2012. V. 86, 041302(R).
- [2] Kanevce A., Levi D.H. and Kuciauskas D. The role of drift, diffusion, and recombination in time-resolved photoluminescence of CdTe solar cells determined through numerical simulation // Prog. Photovolt: Res. Appl. 2014. V. 22, P. 1138–1146.
- [3] Sabelfeld K.K., Brandt O., Kaganer V.M. Stochastic model for the fluctuation-limited reaction-diffusion kinetics in inhomogeneous media based on the nonlinear Smoluchowski equations // J. Math. Chem. 2015. V. 53, iss. 2. P. 651–669.

- [4] Kolodko A. A. and Sabelfeld K. K. Stochastic Lagrangian model for spatially inhomogeneous Smoluchowski equation governing coagulating and diffusing particles // Monte Carlo Methods and Applications. 2001. V. 7, iss. 3–4. P. 223–228.
- [5] Kolodko A., Sabelfeld K. and Wagner W. A stochastic method for solving Smoluchowski's coagulation equation // Mathematics and Computers in Simulation. 1999. V. 49, iss. 1–2. P. 57–79.
- [6] Sabelfeld K. K. Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems // Submitted to Journal of Computational Physics, 2017.
- [7] Devroye L. The Series Method for Random Variate Generation and Its Application to the Kolmogorov-Smirnov Distribution // American Journal of Mathematical and Management Sciences. 1981. V. 1. P. 359–379.
- [8] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2-е изд., дополн., 1982. 296 С.
- [9] Сабельфельд К.К., Киреева А.Е. Стохастическое моделирование рекомбинации электронов и дырок в 2D и 3D неоднородных полупроводниках, часть 2: результаты моделирования // Автометрия. 2017. Т. 53, № 2, С. 117–124.

*Сабельфельд Карл Карлович — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
e-mail: karl@osmf.sccc.ru;*

*Киреева Анастасия Евгеньевна — к.ф.-м.н., науч. сотр. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: kireeva@ssd.sccc.ru.*

Дата поступления — 10 июля 2017 г.