

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОРЕЗОНАТОРА

Д. О. Пиманов<sup>1</sup>, С. И. Фадеев<sup>1,2</sup>, Э. Г. Косцов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск

<sup>3</sup>Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 517.927.4

Рассматривается математическая модель микрорезонатора, в котором происходят колебания недеформируемой платформы с заданной массой на пружине под воздействием упругой силы пружины, силы трения и периодически меняющейся силы электростатического притяжения. В связи с этим формулируется нелинейная краевая задача для уравнения второго порядка с условием периодичности. Для численного исследования краевой задачи применяется метод продолжения решения по параметру на основе дифференциальных прогонок метода множественной стрельбы. Показано, что в зависимости от частоты изменения силы электростатического притяжения возможно возникновение хаотических колебаний по сценарию Фейгенбаума через удвоение периода.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, краевая задача, метод множественной стрельбы, продолжение по параметру, электростатическое притяжение, бифуркация удвоения периода, каскад Фейгенбаума.

## Введение

Работа посвящена исследованию свойств решения дифференциального уравнения, имеющего вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + \Omega y = \frac{q \cos^2 t}{(1-y)^2}, \quad (1)$$

где  $b$ ,  $\Omega$  и  $q$  — неотрицательные параметры. Уравнение (1) описывает в безразмерных переменных колебания материальной точки единичной массы, присоединенной к пружине с коэффициентом жёсткости  $\Omega$ , в среде с коэффициентом сопротивления  $b$ . Вид правой части уравнения, где  $q$  — параметр, обусловлен тем, что на материальную точку воздействует электростатическая сила притяжения, периодически меняющаяся во времени по закону  $\cos^2 t$ .

В приложениях уравнение (1) используется как одномерная модель микрорезонатора, в котором недеформируемая платформа на пружине играет роль подвижного электрода, отделенного микрозазором от неподвижного электрода. Как известно, в случае малости зазора между электродами сила электростатического притяжения определяется из теории плоского конденсатора. В безразмерных переменных уравнения (1) сила электростатического притяжения обратно пропорциональна  $(1-y)^2$  и прямо пропорциональна квадрату разности потенциалов. Под воздействием периодически меняющейся разности потенциалов возбуждаются колебания платформы в среде с сопротивлением  $[1, 2]$ .

Из физической интерпретации модели следует ожидать, что в зависимости от соотношения электростатической силы притяжения с указанной нелинейной зависимостью от  $y$  и упругой силы, пропорциональной  $y$ , возможны два типа поведения задачи Коши для уравнения (1). А именно, решение задачи Коши существует при всех  $t > 0$  в виде нелинейных колебаний, и решение существует на конечном интервале времени, на котором  $y$  стремится к единице. В этом случае нарушается работа резонатора из-за соударения электродов.

Учитывая периодичность правой части уравнения (1), будем искать периодическое решение уравнения (1) с периодом  $\pi$ . Пусть  $y(t) = y(t + \pi)$  — решение уравнения (1). Тогда функция  $y(t)$  на отрезке  $[0, \pi]$  является решением краевой задачи для уравнения (1) с условиями периодичности:

$$\begin{aligned} t \in [0, \pi], \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + \Omega y &= \frac{q \cos^2 t}{(1 - y)^2}, \\ y(0) &= y(\pi), \quad \frac{dy}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (1)

$$\begin{aligned} t > 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + \Omega y &= \frac{q \cos^2 t}{(1 - y)^2}, \\ y(0) &= \tilde{y}(0), \quad \frac{dy}{dt}(0) = \frac{d\tilde{y}}{dt}(0), \end{aligned} \quad (3)$$

где начальные данные  $\tilde{y}(0)$ ,  $d\tilde{y}/dt(0)$  взяты из решения краевой задачи (2) при  $t = 0$ , определяет  $\pi$ -периодические колебания при  $t > 0$ .

Отметим, что применяемый в данной работе метод численного решения краевой задачи (2) никак не связан с устойчивостью по начальным данным решения задачи Коши (3). В случае устойчивости график решения задачи Коши будет совпадать с  $y(t)$  на каждом из отрезков  $[k\pi, (k + 1)\pi]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Однако, если решение неустойчиво, то, численное решение задачи Коши будет описывать колебания, график которых отличен от  $y(t)$ . Более того, возможны случаи, когда численное решение задачи Коши будет стремиться к 1 на конечном интервале по времени, свидетельствуя об отсутствии ограниченных колебаний.

Для численного исследования зависимости решения краевой задачи (2) от параметров модели используются дифференциальные прогонки на заданном разбиении отрезка  $[0, \pi]$  в методе множественной стрельбы. При этом сеточные значения решения краевой задачи находятся из системы нелинейных уравнений с параметром, определяемой на решениях серии задач Коши в методе множественной стрельбы. Зависимость сеточных значений от параметров изучается методом продолжения решения по параметру, позволяющим учесть возможность появления множественности решений в некоторой области изменения параметров. Из множественности решений краевой задачи (2) при одной и той же совокупности параметров следует существование различных периодических решений уравнения (1).

## 1 Численное исследование нелинейной краевой задачи методом продолжения решения по параметру

Приведем краткое описание численного метода исследования зависимости от параметра решения нелинейной краевой задачи, имеющей более общую, чем (2), формулировку. Используемый в данной работе метод был разработан в 90-х годах в Институте математики им. академика Сергея Львовича Соболева [3, 4]. Отметим, что на разработку метода оказали непосредственное влияние известные публикации Сергея Константиновича Годунова, относящиеся к методам решения линейных краевых задач.

Рассмотрим на конечном отрезке  $[A, B]$  по  $t$  нелинейную краевую задачу для системы из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями достаточно общего вида:

$$t \in [A, B], \quad \frac{dw}{dt} = f(t, w, q), \quad g(w(A), w(B), q) = 0, \quad (4)$$

где  $w$ ,  $f$  и  $g$  — векторы с компонентами  $w_k$ ,  $f_k$  и  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , соответственно,  $q$  — скалярный параметр. Вектор-функции  $f(t, w, q)$  и  $g(w(A), w(B), q)$  определены как достаточно гладкие по совокупности аргументов. Предполагается, что при некотором значении параметра  $q$  краевая задача (4) хорошо обусловлена и имеет непрерывно дифференцируемое решение.

Заметим, что для поиска  $T$ -периодических решений уравнения

$$\frac{dw}{dt} = f(t, w, q), \quad f(t, w, q) = f(t + T, w, q),$$

краевые условия задачи (4), называемые условиями периодичности, имеют вид:  $w(0) = w(T)$ . В частном случае, который следует из (2), с учётом обозначений  $w_1 = y$ ,  $w_2 = dy/dt$ , имеем:

$$\begin{aligned} t \in [0, \pi], \quad \frac{dw_1}{dt} = w_2, \quad \frac{dw_2}{dt} = \frac{q \cos^2(t)}{(1 - w_1)^2} - \Omega w_1 - b w_2, \\ w_1(0) = w_1(\pi), \quad w_2(0) = w_2(\pi). \end{aligned}$$

Для организации продолжения решения по параметру краевая задача рассматривается совместно с краевой задачей, определяющей производную решения по параметру. Пусть  $w(t, q)$  — решение (4). При этом производная решения по параметру  $q$  определяется как решение линейной краевой задачи:

$$\begin{aligned} t \in [A, B], \quad \nu = \frac{\partial w}{\partial q}, \quad \frac{d\nu}{dt} = f_w(t, w(t, q), q)\nu + f_q(t, w(t, q), q), \\ g_{w(A)}\nu(A) + g_{w(B)}\nu(B) + g_q = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Метод множественной стрельбы на основе дифференциальных прогонок по существу является способом представления проблемы в виде системы нелинейных уравнений относительно сеточных значений решения краевой задачи (4) на заданной сетке. Далее решение полученной системы нелинейных уравнений изучается в зависимости от параметра  $q$  методом продолжения по параметру.

Введём в рассмотрение сетку:

$$A = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = B, \quad h_i = t_{i+1} - t_i, \quad (6)$$

обозначив через  $p^k$  решение краевой задачи в  $k$ -ом узле сетки:  $p^k = w(t_k, q)$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ . Пусть  $w(t, p^k, q)$  — решение задачи Коши

$$t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{dw}{dt} = f(t, w, q), \quad w(t_k) = p^k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Из непрерывности решения краевой задачи на отрезке  $[A, B]$ , а также с учётом краевого условия, следует, что формально сеточные значения решения краевой задачи (4) можно рассматривать как решение системы нелинейных уравнений:

$$k = 1, \dots, m, \quad \psi_k = w(t_{k+1}, p^k, q) - p^{k+1} = 0, \quad \psi_{m+1} = g(p^1, p^{m+1}, q) = 0, \quad (8)$$

векторная запись которой имеет вид:

$$\Psi(P, q) = 0, \quad (9)$$

где  $P$  и  $\Psi$  — составные векторы, составленные из компонент векторов  $p^1, p^2, \dots, p^{m+1}$  и  $\psi_1(P, q), \psi_2(P, q), \dots, \psi_{m+1}(P, q)$  соответственно.

Обозначим через  $\Gamma$  пространственную кривую в пространстве  $(P, q)$ , определяемую системой (9). Как известно, использование метода продолжения решения по параметру для построения  $\Gamma$  связано с вычислением матрицы  $G = [\Psi_P(P, q), \Psi_q(P, q)]$ . Приведём описание серии задач Коши для вычисления элементов матрицы  $G$ .

Непосредственно из системы (8) и краевых условий задачи (4) следует, что матрица  $\Psi_P(P, q)$  имеет вид:

$$\Psi_P = \begin{bmatrix} W(t_2, p^1, q) & -I & & & \\ & W(t_3, p^2, q) & -I & & \\ & & W(t_4, p^3, q) & -I & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & W(t_{m+1}, p^m, q) & -I \\ g_{p^1}(p^1, p^{m+1}, q) & & & & g_{p^{m+1}}(p^1, p^{m+1}, q) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $W(t, p^k, q) = dw/dp^k(t, p^k, q)$  — фундаментальная матрица решений, определяемая задачей Коши на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  для однородного матричного уравнения с матричной функцией  $f_w(t, w(t, p^k, q), q)$ :

$$k = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{dW}{dt} = f_w(t, w(t, p^k, q), q)W, \quad W(t_k, p^k, q) = I.$$

Для определения столбца  $\Psi_q(P, q)$  матрицы  $G$  воспользуемся тем же методом множественной стрельбы, применив его к краевой задаче (5). Обозначим через  $r^k$  сеточное значение решения краевой задачи (5) в  $k$ -ом узле сетки (6):  $k = 1, 2, \dots, m+1$ ,  $r^k = dp^k/dq$ . Рассмотрим на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  задачу Коши для линейного уравнения:

$$\begin{aligned} t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \frac{d\nu}{dt} &= f_w(t, w(t, p^k, q), q)\nu + f_q(t, w(t, p^k, q), q), \\ \nu(t_k) &= r^k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $\nu = \nu(t, p^k, q)$  — решение задачи Коши (10). Воспользуемся представлением решения в виде:

$$\nu(t, p^k, q) = W(t, p^k, q)r^k + \nu_0(t, p^k, q),$$

где  $\nu_0(t, p^k, q)$  — решение задачи Коши для уравнения (10) с нулевым начальным условием.

Из непрерывности решения краевой задачи (5) на отрезке  $[A, B]$ , а также учета краевого условия, следует, что формально сеточные значения решения краевой задачи (5) представляют решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= W(t_{k+1}, p^k, q)r^k - r^{k+1} + \nu_0(t_{k+1}, p^k, q) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \varphi_{m+1} &= g_{p^1}(p^1, p^{m+1}, q)r^1 + g_{p^{m+1}}(p^1, p^{m+1}, q)r^{m+1} + g_q(p^1, p^{m+1}, q) = 0. \end{aligned}$$

или, используя векторную запись системы,

$$\Psi_P(P(q), q)P_q + \Psi_q(P(q), q) = 0,$$

где  $P_q$  и  $\Psi_q$  составные векторы, составленные из компонент векторов  $r^1, r^2, \dots, r^{m+1}$  и  $\nu_0(t_2, p^1, q), \nu_0(t_3, p^2, q), \dots, \nu_0(t_{m+1}, p^m, q), g_q(p_1, p_{m+1}, q)$  соответственно.

На этом завершается описание численного исследования нелинейной краевой задачи (4) методом продолжения решения по параметру, в котором выражения  $\Psi$ ,  $\Psi_P$  и  $\Psi_q$  определяются на итерациях по Ньютону. Отметим, что метод учитывает возможность прохождения пространственной кривой  $\Gamma$  через точки поворота, в которых  $\det[\Psi_P(P, q)] = 0$ . Для вычисления решения краевой задачи в промежуточных точках сетки используется решение задачи Коши (7). Таким образом, если система уравнений (9) относительно сеточных значений краевой задачи имеет несколько решение в некоторой области изменения параметра  $q$ , то тем же свойством обладает и решение краевой задачи.

## 2 Периодическое решение задачи Коши, определяемое из решения краевой задачи с условиями периодичности

Пусть при некотором значении параметра  $q$  известно решение  $w(t, q)$  краевой задачи (4) с условиями периодичности на отрезке  $[0, T]$ :

$$\frac{dw}{dt} = f(t, w, q), \quad f(t, w, q) = f(t + T, w, q), \quad w(0) = w(T). \quad (11)$$

Тогда  $w(t, q)$  описывает  $T$ -периодическое решение задачи Коши для уравнения

$$t > 0, \quad \frac{dw}{dt} = f(t, w, q), \quad f(t, w, q) = f(t + T, w, q), \quad w(0) = w_0, \quad (12)$$

если в качестве  $w_0$  начального условия задачи Коши выбирается решение краевой задачи (11) при  $t = 0$ :  $w_0 = w(0, q)$ . Кроме того, необходимо, чтобы решение задачи Коши было устойчиво по Ляпунову.

Для определения устойчивости периодического решения используются собственные числа матрицы монодромии — матрицанта однородного уравнения с матрицей  $f_w(t, w(t, q), q)$ , вычисленного при  $t = T$ . Согласно теории Флоке–Ляпунова, если все собственные числа матрицы монодромии расположены в круге единичного радиуса комплексной плоскости, то имеет место устойчивость периодического решения задачи Коши (12). Периодическое решение не устойчиво, если модуль хотя бы одного собственного числа оказался больше единицы. В других случаях устойчивость определяется непосредственным интегрированием задачи Коши (12) [5].

Заметим, что в методе множественной стрельбы, основанном на дифференциальных прогонках, матрица монодромии вычисляется одновременно с прогонкой на последнем шаге.

Пример применения метода продолжения по параметру  $q$  приведен на рис. 1. Здесь представлена зависимость решения краевой задачи от параметра в виде графика (диаграммы)  $y(0)$  от  $q$ , построенного при  $\Omega = 1.5$ ,  $b = 0$ . Как следует из рисунка, в области положительных значений параметра, расположенной левее точки поворота графика, краевая задача имеет два решения. Решения, относящиеся к верхней части графика (пунктирная кривая серого цвета), определяют неустойчивые периодические решения задачи Коши (3). Кроме того, существует область изменения параметра  $q$ , в которой периодические решения, представленные в нижней части графика, также неустойчивы. Точки кривой черного цвета соответствуют устойчивым периодическим решениям. Как показывает численное интегрирование, неустойчивые решения задачи Коши (3) с начальными данными, взятыми из решения краевой задачи (2), могут либо стремиться на ограниченном временном отрезке к точке, в которой  $y = 1$ , либо описывать колебания, отличные от периодических, которые остаются ограниченными при  $t > 0$ .

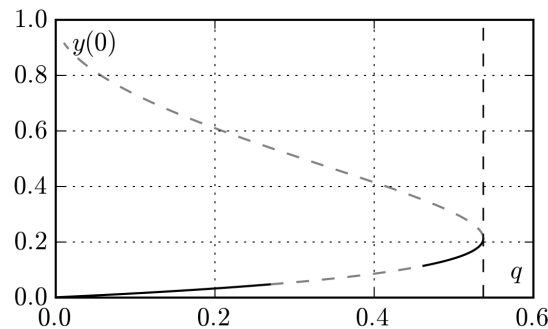


Рис. 1: Пример диаграммы множественности решений краевой задачи (2) при  $\Omega = 1.5$ ,  $b = 0$  в виде графика зависимости  $y(0)$  от параметра  $q$ . Диаграмма сопровождается определением устойчивости периодических решений задачи Коши (3) с начальными условиями, взятыми с решения краевой задачи при  $t = 0$ . Участки графика чёрного цвета представляют устойчивые периодические решения. Серым цветом отмечены участки графика с неустойчивыми периодическими решениями.

### 3 Резонансные кривые, удвоение периода и хаос

Пусть  $\tilde{y}(t)$  — устойчивое  $\pi$ -периодическое решение задачи Коши (3), совпадающее при  $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$  и  $d\tilde{y}/dt(0) = \tilde{y}'_0$  с решением краевой задачи (2) на периоде. Как показывает вычислительный эксперимент, при учете сопротивления решение задачи Коши (3) с начальными данными, взятыми в некоторой окрестности  $\tilde{y}_0, \tilde{y}'_0$ , стремиться с ростом  $t$  к  $\tilde{y}(t)$ . При этом амплитуда колебаний  $a$  может быть найдена из решения краевой задачи (2). Применение метода продолжения решения краевой задачи (2) по параметру  $\Omega$  позволяет построить зависимость амплитуды  $a$  от  $\Omega$ .

На рис. 2 изображены резонансные кривые задачи Коши при  $b = 0.1$  с начальными данными из окрестности решения краевой задачи при  $t = 0$ : кривая 1 построена при  $q = 0.15$ , кривые 2 и 3 — при  $q = 0.25$ . Из графика кривой 1 следует, что решение краевой задачи существует при  $\Omega > \Omega_1 = 0.476$ . Как показывают вычисления, периодические решения задачи Коши (3), определяемые из решения краевой задачи (2), устойчивы при всех  $\Omega > \Omega_1$ . Резонансное значение амплитуды колебаний достигается при  $\Omega = \Omega_r = 4.25$ .

Графики кривых 2 и 3 показывают, что краевая задача имеет решения для  $\Omega$ , расположенных правее точки поворота при  $\Omega_2 = 0.763$ . Как оказалось, при  $1.22 = \Omega_3 < \Omega < \Omega_4 = 1.42$  и  $4.5 = \Omega_5 < \Omega < \Omega_6 = 4.81$  решения краевой задачи (2) определяют только неустойчивые периодические решения (3). Таким образом в точках  $\Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$  и  $\Omega_6$  происходит бифуркация устойчивости  $\pi$ -периодических решений. Отметим, что на интервале  $\Omega \in (\Omega_4, \Omega_5)$  амплитуда устойчивых периодических решений возрастает. Затем при  $\Omega > \Omega_5$  периодические решения теряют устойчивость, а решение задачи Коши стремится к значению  $y = 1$  на конечном интервале времени. Правее точки поворота при  $\Omega = \Omega_6$  краевая задача имеет решение, которое определяет устойчивые колебания при всех  $\Omega > \Omega_6$ .

Дальнейшее исследование периодических решений, принадлежащих кривой 2, показывает, что на интервале  $\Omega \in (\Omega_3, \Omega_4)$  имеет место каскад бифуркаций удвоения периода. В точке  $\Omega = \Omega_3$  рождается устойчивое

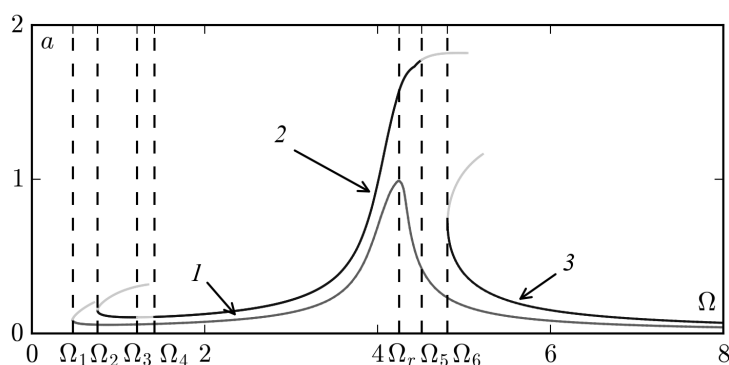


Рис. 2: Примеры резонансных кривых задачи Коши с начальными данными из окрестности решения краевой задачи при  $t = 0$ ,  $b = 0.1$ . Здесь кривая 1 построена при  $q = 0.15$ , кривые 2 и 3 — при  $q = 0.25$ .

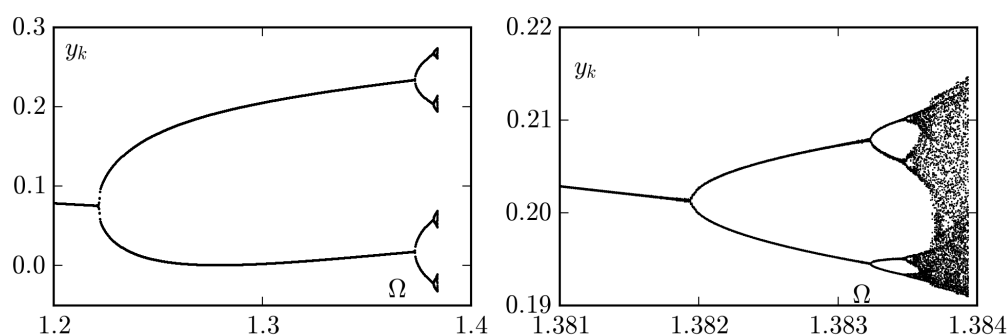


Рис. 3: На левом рисунке — бифуркационная диаграмма уравнения (1) при  $q = 0.25$ ,  $b = 0.1$ , значениям  $y_k$  соответствует выборка  $y(t)$  с помощью сечения Пуанкаре:  $y_k = y(\pi k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 256$ . На правом рисунке — фрагмент бифуркационной диаграммы в указанной области.

периодическое решение задачи Коши (3) с периодом  $2\pi$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\Omega$  в точке  $\Omega = 1.37293$  возникает решение задачи Коши с периодом  $4\pi$ . Эту последовательность точек бифуркации можно продолжить.

Полученный в численном эксперименте каскад бифуркаций удвоения периода на диаграмме рис. 3 иллюстрирует переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума [6]. В таблице 1 приведены численные оценки для первых шести значений  $\Omega^i$  последовательности Фейгенбаума и соответствующие значения  $\delta_i$ ,

$$\delta_i = \frac{\Omega^i - \Omega^{i-1}}{\Omega^{i+1} - \Omega^i}, \quad (13)$$

характеризующие скорость стремления  $\Omega^i$  к предельному значению. Значение  $\delta_i$  совпадает с постоянной Фейгенбаума  $\delta \approx 4.6692016$  с точностью до  $10^{-2}$  уже после шести удвоений периода.

Таблица 1: Точки бифуркации  $\Omega^i$  при  $q = 0.25$ ,  $b = 0.1$ , и соответствующие значения  $\delta_i$ , определяемые по формуле (13)

$i$	$\Omega^i$	$\delta_i$
1	1.21905	—
2	1.37293	17.098
3	1.38194	7.087
4	1.38321	4.704
5	1.38348	4.655
6	1.383537	—

Таким образом, ограниченные колебания в среде с сопротивлением могут стремиться со временем к пери-

одическим колебаниям с периодом  $2^n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , или порождать хаотические колебания. Кроме того, возможно возникновение периодических колебаний с периодом, отличным от  $2^n\pi$ . В частности, численно подтверждается существование колебаний с периодом  $3 \cdot 2^n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$

## Заключение

Использование метода продолжения по параметру для численного исследования зависимости решения краевой задачи от параметра позволило выявить множественность периодических решений уравнения (1) с периодами различной кратности и с бифуркацией устойчивости по начальным данным. При этом, возможно возникновение хаотических колебаний по сценарию Фейгенбаума через каскад бифуркаций удвоения периода.

## Список литературы

- [1] Косцов Э. Г., Фадеев С. И. Новые микроэлектромеханические резонаторы для гигагерцовых частот // Автометрия. 2013. Т. 49, № 2. С. 115–122.
- [2] Takamatsu, H., Sugiura, T. Nonlinear vibration of electrostatic MEMS under DC and AC applied voltage // Proc. of the 2005 Intern. Conf. on MEMS, NANO and Smart Systems, ICMENS 2005. Banff, Alberta, Canada, 2005. P. 423–424.
- [3] Когай В. В., Фадеев С. И., Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. матем. 2001. Т. 4, № 1. С. 83–101.
- [4] Фадеев С. И., Когай В. В. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2012. 278 с.
- [5] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
- [6] Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 312 с.

*Даниил Олегович Пиманов — аспирант Новосибирского государственного университета;  
e-mail: pimanov-daniil@yandex.ru;*

*Станислав Иванович Фадеев — д.ф.-м.н., проф., глав. науч. сотр. Института математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет;  
e-mail: fadееv@math.nsc.ru;*

*Косцов Эдуард Геннадьевич — д.ф.-м.н., зав. лаб. Института автоматики  
и электрометрии СО РАН;  
e-mail: kostsov@iae.nsk.su.*

*Дата поступления — 30 мая 2017 г.*