

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

С. И. Кабанихин^{1,2,3}, М. А. Шишленин^{1,2,3}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск

³Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 519.63

В математических моделях биологии, экономики и социальных наук возникают коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными заданными внутри области. Искомые коэффициенты могут характеризовать такие важные характеристики как фондовооруженность, производительность труда, потребление, межличностные взаимодействия и т.д. Данные, заданные внутри области, как правило характеризуют либо некоторую референтную группу (социальный опрос), либо данные измеряемые на некотором временном-пространственном промежутке. В статье предлагается приближенный метод решения нелинейной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения, основанный на градиентном методе минимизации целевого функционала. Построен градиент функционала на основе решения соответствующих сопряженных задач.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, математические модели экономики, социальные процессы, параболическое уравнение, данные заданные внутри области.

1 Введение. Постановка задачи

В математических моделях биологии [5, 10, 15, 18], экономики [1, 7, 11], социальных наук [2–4] и экологии [16] возникают коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с данными заданными внутри области [8]. Искомые коэффициенты могут характеризовать такие важные характеристики как фондовооруженность, производительность труда, потребление, межличностные взаимодействия и т.д. Данные, заданные внутри области, как правило характеризуют либо некоторую референтную группу (социальный опрос), либо данные измеряемые на некотором временном-пространственном промежутке. В статье предлагается приближенный метод решения нелинейной обратной задачи для параболического уравнения основанный на градиентном методе минимизации целевого функционала. Построен градиент функционала на основе решения соответствующих сопряженных задач.

Пусть относительно решения $u(x, t)$ прямой задачи в области $\Omega = \{(x, t) : x \in (0, L), t \in (0, T)\}$

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

задана дополнительная информация на подмножестве области Ω :

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \omega \subseteq \Omega. \quad (4)$$

В обратной задаче (1)–(4) требуется определить коэффициенты уравнения $a(x, t)$, $b(x, t)$ и $c(x, t)$.

Обозначим $q(x, t) = (a(x, t), b(x, t), c(x, t))$. Решение коэффициентной обратной задачи (1)–(4) будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \iint_{\omega} (u(x, t; q) - f(x, t))^2 d\omega$$

методом простой итерации

$$q^{(k+1)}(t) = q^{(k)}(t) - \alpha J'(q^{(k)})(t).$$

Здесь $\alpha > 0$ параметр спуска, а градиент функционала определяется по формуле

$$J'(q)(x, t) = (u_{xx}(x, t)\psi(x, t), u_x(x, t)\psi(x, t), u(x, t)\psi(x, t)),$$

в которой $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи [6, 13, 14, 17]:

$$\begin{aligned} \psi_t + (a\psi)_{xx} - (b\psi)_x + c\psi &= 2\chi(x, t)[u(x, t) - f(x, t)], & (x, t) \in \Omega, \\ \psi(x, T) &= 0, & x \in \Omega, \\ [(a\psi)_x + \psi] \Big|_{x=0} &= [(a\psi)_x + \psi] \Big|_{x=L} = 0, & t \in (0, T). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, t) \in \omega; \\ 0, & \text{если } (x, t) \notin \omega. \end{cases}$$

Отметим, что можно существенно уменьшить число итераций, учитывая априорную информацию об искомом решении [9, 12].

Пусть область ω задается гладкой непрерывной кривой $x = \varphi(t)$, $t \in [0, T]$. Дополнительная информация задана в следующем виде:

$$u(\varphi(t), t) = f(t), \quad t \in (0, T).$$

В этом случае решение коэффициентной обратной задачи (1)–(4) будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \int_0^T (u(\varphi(t), t; q) - f(t))^2 dt.$$

Тогда уравнение (5) в сопряженной задаче примет следующий вид:

$$\psi_t + (a\psi)_{xx} - (b\psi)_x + c\psi = 2\delta(x - \varphi(t))[u(x, t) - f(t)], \quad (x, t) \in \Omega.$$

Здесь $\delta(x - \varphi(t))$ — дельта-функция Дирака.

Заключение

В статье предлагается приближенный метод решения нелинейной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения основанный на градиентном методе минимизации целевого функционала. Построен градиент функционала на основе решения соответствующих сопряженных задач.

Список литературы

- [1] Brock W.A., Malliaris A.G. Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics. Advanced Textbooks in Economics Editors C.J. Bliss, M.D. Intriligator. North-Holland. 1996.
- [2] Flierl G., Grunbaum D., Levin S., Olson D. From individual to aggregations: the interplay between behaviour and physics // J theor Biol. 1999. V. 196. P. 397–454.
- [3] Despland E., Simpson S.J. The role of food distribution and nutritional quality in behavioural phase change in the desert locust // Animal Behaviour. 2000. V. 59. P. 643–652.

- [4] Mogilner A., Edelstein-Keshet L. Mutual interactions, potentials, and individual distance in a social aggregation. Preprint, 2001.
- [5] Murray J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. Third Edition. Springer. 2002.
- [6] Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shishlenin M.A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, iss. 1. P. 87–109.
- [7] Wei-Bin Zhang. Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 68. Ritsumeikan Asia Pacific University, Japan. World Scientific. 2005.
- [8] Kabanikhin S.I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, iss. 4. P. 317–357.
- [9] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, iss. 7. P. 705–713.
- [10] Patel T., Mehta M.N., Pradhan Y.H. The Numerical Solution of Burger's Equation Arising into the Irradiation of Tumour Tissue in Biological Diffusing System by Homotopy Analysis Method // Asian Journal of Applied Sciences, 2012.
- [11] Садовничий В.А., Акаев А.А., Коротаев А.В., Малков С.Ю. Моделирование и прогнозирование мировой динамики. Москва. 2012.
- [12] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. с. 147–164.
- [13] Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. V. 21, iss. 6. P. 885–892.
- [14] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic equations from border part // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2014. V. 2, iss. 2. P. 81–91.
- [15] Пененко А.В., Николаев С.В., Голушко С.К., Ромащенко А.В., Кирилова И.А. Численные алгоритмы идентификации коэффициента диффузии в задачах тканевой инженерии // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11, № 2. С. 426–444.
- [16] Пененко А.В., Пененко В.В., Цветова Е.А. Последовательные алгоритмы усвоения данных в моделях мониторинга качества атмосферы на базе вариационного принципа со слабыми ограничениями // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 401–418.
- [17] Belonosov A., Shishlenin M. Regularization methods of the continuation problem for the parabolic equation // Lecture Notes in Computer Science. 2017. 10187 LNCS. P. 220–226.
- [18] Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. V. 54. P. 1339–1351.

*Сергей Игоревич Кабанихин — д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН,
 директор Института вычислительной математики
 и математической геофизики СО РАН;
 з.н.с. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
 Новосибирский государственный университет;
 e-mail: kabanikhin@sscc.ru;*
*Максим Александрович Шишленин — д.ф.-м.н.,
 с.н.с. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
 с.н.с. Института вычислительной математики
 и математической геофизики СО РАН;
 Новосибирский государственный университет;
 e-mail: mshishlenin@ngs.ru.*
Дата поступления — 31 мая 2017 г.