

РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПОЛНЫХ ТЕНЗОРНЫХ МАГНИТНО-ГРАДИЕНТНЫХ ДАННЫХ

Я. Ван¹, Д. В. Лукьяненко², А. Г. Ягола²

¹*Институт геологии и геофизики Китайской академии наук, 100029, Пекин, Китай*

²*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
119991, Москва, Россия*

УДК 519.6

Рассматриваются особенности численной реализации решения трехмерной обратной задачи обращения полных тензорных магнитно-градиентных данных, которая моделируется системой трехмерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно вектор-функций. Для решения этой некорректно поставленной задачи применяется алгоритм, основанный на минимизации функционала Тихонова методом сопряженных градиентов с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки. Эта обратная задача возникает, например, в геофизике для восстановления магнитного поля подземных объектов по результатам измерений на поверхности Земли.

Ключевые слова: магнитостатика, обратные задачи, некорректно поставленные задачи, метод регуляризации.

Введение

Математические модели в магнитостатике, связывающие плотность магнитного момента ограниченного тела и его магнитную индукцию достаточно хорошо известны (например, [1, 2, 3, 4, 5]). Менее известны математические модели магнитостатики, связывающие объёмную (или поверхностную) плотность магнитного момента тела с полным тензором градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ), измеряемым в некоторой удаленной от тела области [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Китайским участником работы вместе со своими коллегами из Института геологии и геофизики Китайской академии наук было установлено [13], что тензор градиентов компонент магнитной индукции в таких моделях обладает большей чувствительностью к тонкой структуре распределения магнитного момента, чем сама магнитная индукция. Поэтому измерения тензора ГКМИ представляются более перспективными для интерпретации магнитных полей с помощью решения обратных задач. Модели, включающие тензор ГКМИ, могут быть рассмотрены в различных вариантах: линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных, для двумерных и трехмерных магнитных полей. Все эти модели порождают обратные задачи нахождения плотности магнитного момента по тензору ГКМИ в различных постановках задачи. В этой работе рассматривается наиболее перспективная для интерпретации постановка: необходимо обратить полные магнитно-градиентные данные в трёхмерной области с целью восстановления объёмной намагниченности. Подобная обратная задачи магнитостатики описывается операторным уравнением первого рода, которое в общем случае представляет собой некорректно поставленную задачу. Она может как иметь неединственное решение, так и не иметь классического решения вообще. При этом она, как правило, неустойчива по отношению к ошибкам измерения входных данных (компонент тензора ГКМИ). Эти трудности преодолеваются с помощью применения специальных методов решения таких некорректно поставленных задач — регуляризирующих алгоритмов (РА). Важнейшим классом регуляризирующих алгоритмов является семейство вариационных РА. Наиболее известен из них метод регуляризации А. Н. Тихонова. Часто используется также обобщенный метод невязки (ОМН).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-51-53002-ГФЕН-а). Тестовые расчеты выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [12]

В данной работе рассмотрены особенности реализации решения трёхмерной обратной задачи обращения полных тензорных магнитно-градиентных данных.

1 Полный тензор градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ)

Для начала введём понятие полного тензора градиентов компонент магнитной индукции \mathbf{B}_{tensor} (ГКМИ), который в отличие от индукции магнитного поля $\mathbf{B}_{field\ dipole}$ (которая имеет 3 компоненты) имеет 9 компонент и может быть записан в следующей матричной форме:

$$\mathbf{B}_{tensor} = [B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial B_y} & \frac{\partial B_x}{\partial B_z} & \frac{\partial B_x}{\partial B_z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial B_y} & \frac{\partial B_y}{\partial B_z} & \frac{\partial B_y}{\partial B_z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial B_y} & \frac{\partial B_z}{\partial B_z} & \frac{\partial B_z}{\partial B_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix},$$

где $\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$, $\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}$, $\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial y}$ и $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$.

2 Трёхмерная модель полных тензорных магнитно-градиентных данных

Уравнение, описывающее магнитное поле $\mathbf{B}_{field\ dipole}$, индуцируемое магнитным диполем \mathbf{m} , имеет вид:

$$\mathbf{B}_{field\ dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right),$$

где $\mathbf{m} = m_x\mathbf{i} + m_y\mathbf{j} + m_z\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = (x - x_s)\mathbf{i} + (y - y_s)\mathbf{j} + (z - z_s)\mathbf{k}$, $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ — расстояние между точкой (x_s, y_s, z_s) , которая соответствует расположению измеряющего поле $\mathbf{B}_{field\ dipole}$ триаксиального сенсора, и точкой (x, y, z) , в которой расположен магнитный диполь \mathbf{m} , μ_0 — величина магнитной проницаемости в вакууме.

Преобразовав $\mathbf{B}_{field\ dipole}$ к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{field\ dipole} &= B_{x\ dipole}\mathbf{i} + B_{y\ dipole}\mathbf{j} + B_{z\ dipole}\mathbf{k} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(x - x_s)}{r^5} - \frac{m_x}{r^3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(y - y_s)}{r^5} - \frac{m_y}{r^3} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(z - z_s)}{r^5} - \frac{m_z}{r^3} \right) \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

и переобозначив переменные как $i = x, y, z$ и $p = (p_x, p_y, p_z) = (x_s, y_s, z_s)$, мы можем записать выражения для компонент вектора $\mathbf{B}_{field\ dipole}$ в следующем виде:

$$B_{i\ dipole} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)}{r^5} - \frac{m_i}{r^3} \right).$$

Беря производные от $B_{i\ dipole}$ по пространственным переменным $i = x, y, z$ и $j = x, y, z \neq i$, мы можем получить следующие выражения для диагональных и недиагональных элементов тензора градиентов компонент магнитной индукции \mathbf{B}_{tensor} (ГКМИ):

$$\begin{aligned} B_{ii} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{6m_i(i - p_i)}{r^5} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(i - p_i)}{r^7} \right), \\ B_{ij} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3m_i(j - p_j)}{r^5} + \frac{3m_j(i - p_i)}{r^5} - \frac{15(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})(i - p_i)(j - p_j)}{r^7} \right). \end{aligned}$$

Таким образом для всего рассматриваемого объекта, по объёму которого V мы хотим восстановить плотность магнитного момента \mathbf{M} ($\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$), мы получаем следующие трёхмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{field\ dipole} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right) dv, \\ B_{ii} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{6m_i(i-p_i)}{r^5} + \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{15(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})(i-p_i)(i-p_i)}{r^7} \right) dv, \\ B_{ij} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{3m_i(j-p_j)}{r^5} + \frac{3m_j(i-p_i)}{r^5} - \frac{15(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})(i-p_i)(j-p_j)}{r^7} \right) dv, \end{aligned}$$

которые могут быть переписаны в виде следующей системы из двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{field\ dipole}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_1(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv, \\ \mathbf{B}_{tensor\ dipole}(x_s, y_s, z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{K}_2(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \mathbf{M}(x, y, z) dv, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{B}_{field\ dipole} = [B_x \ B_y \ B_z]^T$ и $\mathbf{B}_{tensor\ dipole} = [B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$, а ядра интегральных уравнений \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 имеют вид

$$\mathbf{K}_1(x - x_s, y - y_s, z - z_s) = \frac{1}{r^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - r^2 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(x - x_s, y - y_s, z - z_s) &= \\ &= \frac{3}{r^7} \begin{bmatrix} (x - x_s)[3r^2 - 5(x - x_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & (z - z_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] \\ (y - y_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & (x - x_s)[r^2 - 5(y - y_s)^2] & -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) \\ (z - z_s)[r^2 - 5(x - x_s)^2] & -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) & (x - x_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] \\ -5(x - x_s)(y - y_s)(z - z_s) & (z - z_s)[r^2 - 5(y - y_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] \\ (x - x_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] & (y - y_s)[r^2 - 5(z - z_s)^2] & (z - z_s)[3r^2 - 5(z - z_s)^2] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если мы предположим, что $V \subset P = \{(x, y, z) : L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$ и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом $Q = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r) : L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\}$, мы можем переписать систему (1) в следующем операторном виде

$$\mathbf{A} \mathbf{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(s, t, r), \quad (2)$$

где $\mathbf{B}(s, t, r)$ и $\mathbf{M}(x, y, z)$ — векторные функции: $\mathbf{B} = [B_x \ B_y \ B_z \ B_{xx} \ B_{xy} \ B_{xz} \ B_{yz} \ B_{zz}]^T$ и $\mathbf{M} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$, а ядро $\mathbf{K}(s, t, r, x, y, z)$ является матричной функцией: $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]^T$ ($\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1]^T$ в том случае, если мы хотим провести обращение без использования полного тензора ГКМИ для сравнения двух подходов).

Далее будем предполагать, что $\mathbf{M} \in W_2^2(P)$, $\mathbf{B} \in L_2(Q)$, а оператор \mathbf{A} с ядром \mathbf{K} непрерывен и однозначен. Нормы правой части уравнения (2) и решения вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|_{L_2} &= \sqrt{\|B_x\|_{L_2}^2 + \|B_y\|_{L_2}^2 + \|B_z\|_{L_2}^2 + \|B_{xx}\|_{L_2}^2 + \|B_{xy}\|_{L_2}^2 + \|B_{xz}\|_{L_2}^2 + \|B_{yz}\|_{L_2}^2 + \|B_{zz}\|_{L_2}^2}, \\ \|\mathbf{M}\|_{W_2^2} &= \sqrt{\|M_x\|_{W_2^2}^2 + \|M_y\|_{W_2^2}^2 + \|M_z\|_{W_2^2}^2}. \end{aligned}$$

Пусть вместо точно известных $\bar{\mathbf{B}}$ и оператора \mathbf{A} известны их приближенные значения \mathbf{B}_δ и \mathbf{A}_h , такие, что $\|\mathbf{B}_\delta - \bar{\mathbf{B}}\|_{L_2} \leq \delta$, $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_h\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$. При выписанных условиях задача является некорректной, для ее

решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала А. Н. Тихонова

$$F^\alpha[\mathbf{M}] = \|\mathbf{A}_h \mathbf{M} - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|\mathbf{M}\|_{W_2^2}^2. \quad (3)$$

Для любого $\alpha > 0$ существует единственная экстремаль функционала Тихонова \mathbf{M}_η^α , $\eta = \{\delta, h\}$, реализующая минимум $F^\alpha[\mathbf{M}]$. Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм конечномерного обобщенного принципа невязки [14, 15]. При выборе параметра $\alpha = \alpha(\eta)$ по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) = \|\mathbf{A}_h \mathbf{M}_\eta^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h \|\mathbf{M}_\eta^\alpha\|_{W_2^2} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

\mathbf{M}_η^α стремиться при $\eta \rightarrow 0$ к точному решению задачи в норме W_2^2 , а, следовательно, и равномерно на P .

В качестве метода минимизации функционала А. Н. Тихонова применяется метод сопряженных градиентов.

3 Результаты модельных численных экспериментов

На рисунке 2 представлены результаты обработки как только магнитных данных, так и полных тензорных магнитно-градиентных данных, которые соответствуют модельному решению, изображённому на рисунке 1. Для тестовых расчётов мы использовали область интегрирования $[x = 0-1000; y = -1-1; z = -500-0]$ (м) с сетками $(N_x, N_y, N_z) = (30, 1, 20)$, и две серии измерений 1) $[x = 0-1000; y = -10-10; z = 0-2]$ (м) (что соответствует измерениям «у земли» на высотах 0 и 2 метра в случае, когда нету возможности поднять в воздух измерительное оборудование) и 2) $[x = 0-1000; y = -200-200; z = 0-1000]$ (м) (что соответствует измерения «у земли и в воздухе» на высотах 0 и 1000 метров, когда есть возможность поднять измерительное оборудование на значительную высоту с помощью авиационной техники) с сетками $(N_s, N_t, N_r) = (200, 2, 2)$. Во всех случаях нам необходимо было восстановить 1800 параметров по 6400 измерениям. Как видно на приведённых результатах расчётов, использование полного тензора ГКМИ помогает существенно улучшить результаты расчётов, улучшив локализацию в пространстве восстанавливаемых параметров намагниченности.

Заключение

Использование при восстановлении параметров намагниченности полного тензора градиентов компонент магнитной индукции, измеряемого в некоторой удаленной от тела области, существенно улучшает результат решения соответствующих обратных некорректно поставленных обратных задач магнитостатики.

Список литературы

- [1] P. G. Lelievre and D. W. Oldenburg Magnetic forward modelling and inversion for high susceptibility // Geophysical Journal International 166 (2006), pp. 76–90.
- [2] Y. G. Li and D. W. Oldenburg 3-D inversion of magnetic data // Geophysics 61 (1996), pp. 394–408.
- [3] A. Pignatelli, I. Nicolosi and M. Chiappini An alternative 3D inversion method for magnetic anomalies with depth resolution // Annals of Geophysics 49 (2006), pp. 1021–1027.
- [4] Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A. Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. V.18, N.9, p. 1013–1029.
- [5] Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Применение многопроцессорных систем для решения трёхмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т.11, N.2, стр. 156–163.
- [6] A. Christensen and S. Rajagopalan The magnetic vector and gradient tensor in mineral and oil exploration // Preview 84 (2000), pp. 77.

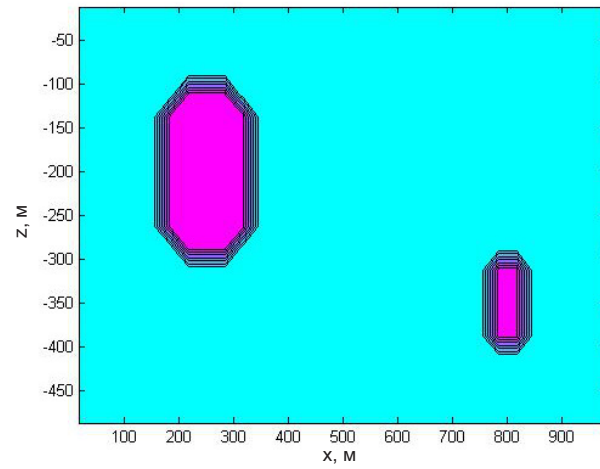


Рис. 1: Модельное решение для модуля вектора \mathbf{M} на сетке $(N_x, N_y, N_z) = (30, 1, 20)$.

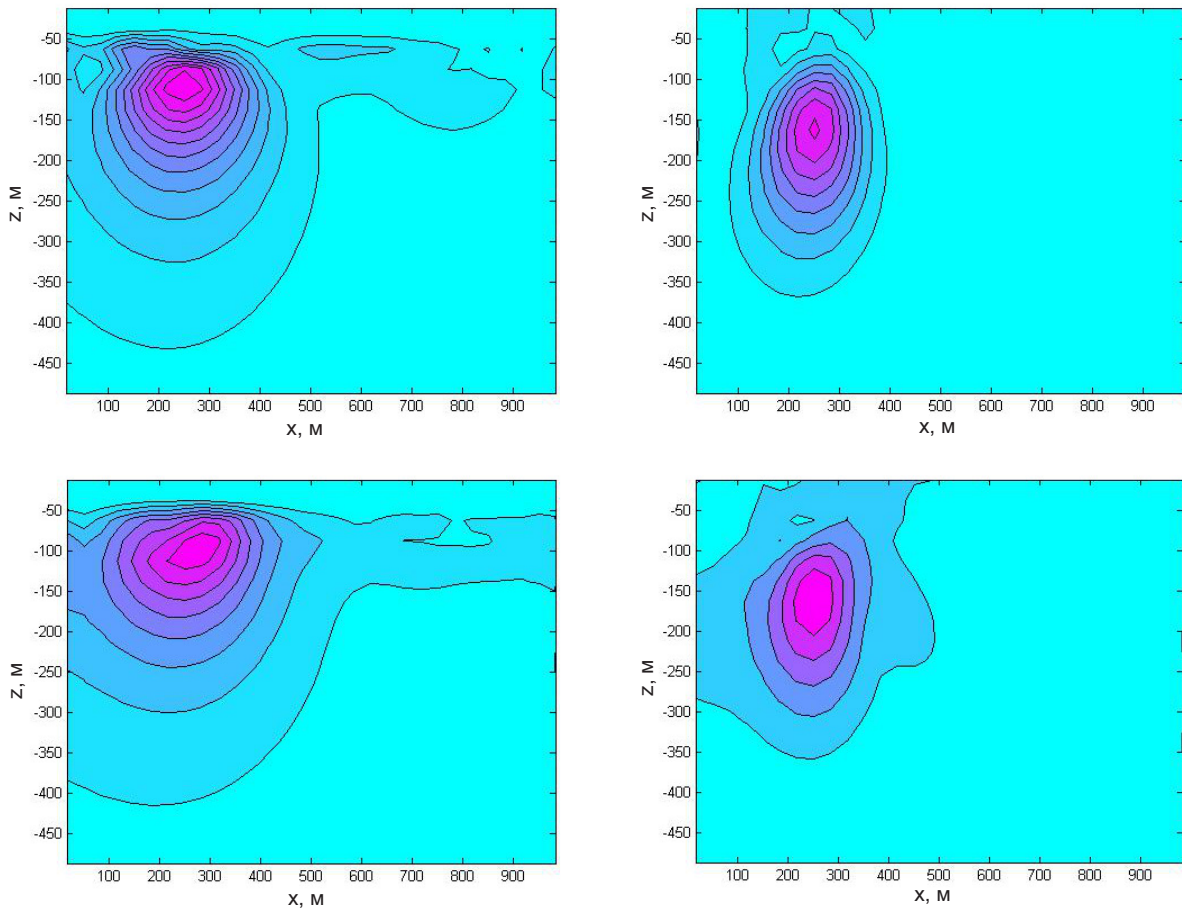


Рис. 2: Результаты расчётов для модельного примера. Левая пара картинок соответствует ситуации, когда все измерения проводились только «у земли», правая пара – измерения производились «у земли и в воздухе». Верхняя пара картинок – при вычислениях использован полный тензор градиентов компонент магнитной индукции (ГКМИ), нижняя пара – классический подход (обрабатывались только результаты измерения индуцированного магнитного поля).

- [7] P. Heath, G. Heinson, and S. Greenhalgh Some comments on potential field tensor data // Exploration Geophysics 34 (2003), pp. 57–62.
- [8] M. Schiffer, M. Queitsch, R. Stolz, A. Chwala, W. Krech, H.-G. Meyer and N. Kukowski Calibration of SQUID vector magnetometers in full tensor gradiometry systems // Geophys. J. Int. 198 (2014), pp. 954–964.
- [9] P. W. Schmidt and D. A. Clark Advantages of measuring the magnetic gradient tensor // Preview 85 (2000), pp. 26–30.
- [10] P. W. Schmidt, D. A. Clark, K. E. Leslie, M. Bick, and D. L. Tilbrook GETMAG-a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration // Exploration Geophysics 35 (2004), pp. 297–305.
- [11] M. S. Zhdanov, H. Z. Cai and G. A. Wilson 3D inversion of SQUID magnetic tensor data // Geology and Geosciences 1 (2012), pp. 1–5.
- [12] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов" // Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы" N 7, 2012. С. 36–39.
- [13] Shuangxi Ji, Yanfei Wang and Anqi Zou Regularizing inversion of susceptibility with projection onto convex set using full tensor magnetic gradient data // Inverse Problems in Science & Engineering. 2016. Т.4, стр. 323–326.
- [14] Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. 6, N.1. стр. 170–175.
- [15] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
- [16] Ягола А. Г., Степанова И. Э., Титаренко В. Н., Ван Я. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином, 2014.
- [17] Лукьяненко Д. В., Ягола А. Г. Использование многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода. // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012, т. 18, № 1.
- [18] Я. Ван, Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола. Регуляризованное обращение полных тензорных магнитно-градиентных данных // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал), 2016, т. 17, № 1, с. 13-20.
- [19] D. V. Lukyanenko, A. G. Yagola. Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 2016, v. 4, N 3, pp. 4-14.

*Янфей Ван — PhD, профессор Института геологии и геофизики Китайской академии наук;
e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn;*

*Дмитрий Витальевич Лукьяненко — к.ф.-м.н., доцент кафедры математики
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова;
e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru;*

*Анатолий Григорьевич Ягола — д.ф.-м.н., профессор кафедры математики
физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова;
e-mail: yagola@physics.msu.ru.*

Дата поступления — 29 мая 2017 г.