

ОБ УЧЕТЕ КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ ОБТЕКАЕМОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ ВИХРЕВОГО МЕТОДА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

К. С. Кузьмина, И. К. Марчевский

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, 105005, Москва

УДК 532.5

Рассмотрены вопросы построения численных схем повышенного порядка точности для решения граничного интегрального уравнения, возникающего при моделировании обтекания профилей вихревыми методами, относительно интенсивности вихревого слоя на границе профиля. Учтена криволинейность профиля: его форма аппроксимирована кубическими эрмитовыми сплайнами вместо прямолинейных панелей, которые обычно используются в вихревых методах. Решение на каждой криволинейной панели представлено в виде кусочно-линейной функции. Коэффициенты СЛАУ выражены определенными интегралами от известных функций. Для коэффициентов, численное интегрирование которых вызывает сложности, получены приближенные аналитические формулы. Разработанный метод обеспечивает 4-й порядок точности для средних величин интенсивностей вихревого слоя на панелях.

Ключевые слова: вихревой метод, интегральное уравнение, криволинейная граница, метод Галеркина

Введение

Бессеточные лагранжевы методы частиц, активно развиваемые как в нашей стране, так и за рубежом [1, 2, 3, 4], в ряде случаев позволяют эффективно решать многие актуальные практические задачи, среди которых отметим задачи аэрогидродинамики и аэрогидроупругости (метод дискретных вихрей — МДВ, метод вязких вихревых доменов — ВВД); моделирование вынужденной и свободной конвекции (метод вязких вихревых и тепловых доменов — ВВТД), а также сходные по математической постановке задачи электродинамики (расчет характеристик антенн), задачи рассеяния акустических и электромагнитных волн и др.

В основе указанных задач лежит решение граничного интегрального уравнения относительно искомой физической величины или ее потенциала. При этом граница обычно аппроксимируется ломаной или многоугольником (в двумерном случае) и «ломаной поверхностью» или многогранником (в пространственном случае), а интегральное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений с заполненной матрицей.

Методические исследования показали, что такой подход в ряде случаев не обеспечивает высокого порядка аппроксимации, что сказывается на качестве численного решения задачи в целом. Это особенно проявляется при существенно неравномерной сетке на поверхности.

Целью работы является разработка схемы аппроксимации интегрального уравнения, обеспечивающей высокий порядок точности, на примере расчета обтекания профиля с помощью вихревых методов.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о моделировании двумерного течения несжимаемой среды вокруг неподвижного недеформируемого профиля. Математически задача сводится к отысканию интенсивности вихревого слоя, расположенного на границе профиля и оказывающего на среду такое же влияние, как и профиль [5]. Интенсив-

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента (проект МК-7431.2016.8) в рамках государственного задания вузам (проектная часть, проект 9.2422.2017/ПЧ).

ность вихревого слоя $\gamma(\vec{r})$ может быть найдена как решение интегрального уравнения, которое выражает собой условие прилипания (для вязкой среды) или непротекания (в случае идеальной среды) на профиле.

Среди двух известных подходов [6] к решению данной задачи наиболее перспективным представляется тот, в основу которого положено условие равенства нулю касательной компоненты предельного значения скорости среды на профиле. Он приводит к интегральному уравнению 2-го рода

$$\frac{1}{2\pi} \oint_K Q_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) \gamma(\vec{\xi}) d\vec{\xi} - \frac{\gamma(\vec{r})}{2} = f_\tau(\vec{r}), \quad \vec{r} \in K. \quad (1)$$

с равномерно ограниченным (для гладких профилей) ядром вида

$$Q_\tau(\vec{r}, \vec{\xi}) = \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \cdot \vec{\tau}(\vec{r}),$$

где $\vec{\tau}(\vec{r})$ — орт касательной к профилю. Часто используемый альтернативный подход [6], имеющий в основе равенство нулю нормальной компоненты скорости среды, приводит к сингулярному уравнению 1-го рода с ядром Гильберта, интеграл в котором понимают в смысле главного значения по Коши [1].

Правая часть $f_\tau(\vec{r})$ уравнения (1) — известная функция, зависящая от формы профиля, скорости набегающего потока и распределения завихренности в области течения. Если рассматривается задача безвихревого обтекания, когда завихренность в потоке отсутствует, $f_\tau(\vec{r})$ имеет простой вид:

$$f_\tau(\vec{r}) = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{\tau}(\vec{r}), \quad (2)$$

где \vec{V}_∞ — скорость набегающего потока.

Уравнение (1) имеет бесконечное множество решений; для выделения единственного решения следует задать, например, величину суммарной завихренности на профиле [1], которая на практике обычно известна, исходя из физического смысла задачи:

$$\oint_K \gamma(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \Gamma. \quad (3)$$

Отметим, что требования о неподвижности и недеформируемости профиля несущественны; разрабатываемые схемы вихревых методов могут быть обобщены на случай произвольно движущегося профиля путем введения на его поверхности присоединенных слоев вихрей и источников [2, 7].

2 Расчетные схемы на профиле

2.1 Аппроксимация профиля прямолинейными панелями

Наиболее простым способом аппроксимации формы профиля является его замена многоугольником, состоящим из прямолинейных панелей. При этом на каждом прямолинейном участке границы (панели) распределение интенсивности вихревого слоя принимается, как правило, кусочно-постоянным или кусочно-линейным.

Наиболее точные из «кусочно-постоянных» схем обеспечивают второй порядок точности для величин средних интенсивностей вихревого слоя на панелях и первый порядок точности в норме L_1 . «Кусочно-линейные» схемы оказываются незначительно более точными по отношению к средним интенсивностям вихревого слоя, но обеспечивают второй порядок точности в норме L_1 . При этом точность резко снижается, если длины соседних панелей оказываются сильно различающимися.

Математически это объясняется тем, что вместо гладкого участка профиля в расчетах фактически приходится иметь дело с угловой точкой (рис. 1), в окрестности которой ядро уравнения (1) перестает быть ограниченным, а точное решение для такой геометрии профиля может иметь «нефизичную» особенность в угловой точке.



Рис. 1: Участок границы профиля и две прямолинейные панели, образующие угол

В случае равномерного или близкого к равномерному разбиению профиля на панели подобные особенности ядра на концах панелей компенсируют друг друга, тогда как при существенно различающихся длинах соседних панелей их влияние заметно сказывается на правильности вычисления коэффициентов соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Следует также отметить, что при близком к равномерному разбиению профиля на панели наиболее продуктивным в смысле точности получаемого результата оказывается подход к решению уравнений (1), (3), имеющий в основе идеи разрывного метода Галеркина [10]. В соответствии с ним решение на каждой панели является комбинацией базисных функций — постоянной и линейной с нулевым средним. Коэффициенты разложения находятся из решения СЛАУ, которая выражает условие ортогональности невязки этим же базисным функциям, которые выступают, таким образом, и в качестве проекционных. При этом на границах панелей решение оказывается разрывным.

В качестве недостатка такого подхода следует отметить удвоение числа искомых величин и, соответственно, размерности соответствующей СЛАУ.

2.2 Аппроксимация профиля с учетом криволинейности панелей

В работе [9] предложена схема, учитывающая криволинейность границы профиля путем его аппроксимации гладкой кривой. Данная схема обеспечивает 4-й порядок точности для средних величин интенсивности вихревого слоя на криволинейных панелях, но является чрезвычайно трудоемкой для практического применения. В данной работе рассмотрим упрощенную схему, обеспечивающую тот же уровень точности решения граничного интегрального уравнения.

Пусть \vec{C}_i , $i = 1, \dots, N$, — радиус-векторы вершин профиля; отрезки $C_i C_{i+1}$ назовем хордами профиля. Как и в работе [9], профиль над i -й хордой аппроксимируется гладкой кривой, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\vec{r}_i(t) = \vec{C}_i + L_i^0 (t \vec{\tau}_i^0 + p_i(t) \vec{n}_i^0), \quad t \in [0; 1], \quad (4)$$

где значения $t = 0$ и $t = 1$ соответствуют началу и концу панели; L_i^0 — длина i -й хорды; $\vec{\tau}_i^0$ и \vec{n}_i^0 — орты касательной и нормали к i -й хорде профиля. В качестве $p_i(t)$ рассмотрим кубическую функцию

$$p_i(t) = \alpha_i t(t-1) + \beta_i t(t-1/2)(t-1), \quad (5)$$

где коэффициенты α_i и β_i находятся из условия совпадения касательных к исходной кривой и к криволинейной панели в ее концах (рис. 2) и вычисляются следующим образом:

$$\alpha_i = -\frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi_i + \operatorname{tg} \psi_i), \quad \beta_i = (\operatorname{tg} \varphi_i - \operatorname{tg} \psi_i).$$

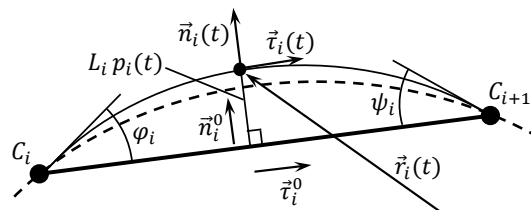


Рис. 2: Криволинейная панель и i -я хорда профиля

Отметим, что если участок исходного профиля над i -й хордой представляет собой гладкую кривую класса C^4 , погрешность аппроксимации профиля будет величиной порядка $O(L_i^4)$.

2.3 Аппроксимация интегрального уравнения

Для построения расчетной схемы для поиска приближенного решения уравнений (1), (3) воспользуемся идеей разрывного метода Галеркина (DG) [10]. Для этого введем константные и линейные базисные функции $\varphi_0^i(t)$ и $\varphi_1^i(t)$, $i = 1, \dots, N$, каждая из которых отлична от нуля только на i -й панели:

$$\varphi_0^i(t) \equiv 1, \quad \varphi_1^i(t) = t - \frac{1}{2}, \quad t \in [0; 1]. \quad (6)$$

Решение на каждой панели будем искать в виде кусочно-линейной по t функции:

$$\gamma(\vec{r}_i(t)) = \gamma_i \varphi_0^i(t) + \delta_i \varphi_1^i(t), \quad t \in [0; 1], \quad i = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты разложения γ_i и δ_i можно найти из условия ортогональности невязки уравнения (1) базисным функциям $\varphi_0^k(t)$ и $\varphi_1^k(t)$.

Поскольку носителями базисных функций являются панели профиля, а условие ортогональности представляет собой равенство нулю интеграла от произведения невязки на эти базисные функции, можно рассмотреть невязку отдельно на i -й панели:

$$z_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left(\gamma_j \int_0^1 Q_\tau(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(\xi)) \varphi_0^j(\xi) J_j(\xi) d\xi + \delta_j \int_0^1 Q_\tau(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(\xi)) \varphi_1^j(\xi) J_j(\xi) d\xi \right) - \frac{\gamma_i \varphi_0^i(t) + \delta_i \varphi_1^i(t)}{2} - f_\tau(\vec{r}_i(t)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь якобиан $J_j(\xi)$ вычисляется в соответствии с используемой аппроксимацией (4), (5) и имеет вид

$$J_j(\xi) = \left\| \frac{d\vec{r}_j(\xi)}{d\xi} \right\| = L_j^0 \sqrt{1 + \left(\alpha_j (2\xi - 1) + \beta_j \left(3\xi^2 - 3\xi + \frac{1}{2} \right) \right)^2}.$$

Дискретный аналог уравнения (3) имеет вид

$$\sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\gamma_j \int_0^1 \varphi_0^j(t) J_j(\xi) d\xi}_{L_j} + \underbrace{\delta_j \int_0^1 \varphi_1^j(t) J_j(\xi) d\xi}_{L_j^*} \right) = \Gamma.$$

В итоге приходим к системе линейных алгебраических уравнений, в которую введена дополнительная регуляризирующая переменная R по аналогии с методикой, разработанной в [1]:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L & L^* & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma \end{pmatrix}.$$

Здесь блоки A^{pq} — квадратные матрицы размером $N \times N$; D^{pq} — диагональные матрицы, $p, q = 0, 1$; L и L^* — строки, составленные из длин панелей L_i и коэффициентов L_i^* ; I_N — столбец из единиц; O_N — столбец из нулей; γ и δ — столбцы искомых коэффициентов; b^0 и b^1 — столбцы, образующие правую часть системы.

Коэффициенты матриц A^{pq} , D^{pq} имеют вид

$$A_{ij}^{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_0^1 Q_\tau(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(\xi)) \varphi_q^j(\xi) J_j(\xi) d\xi \right) \varphi_p^i(t) J_i(t) dt,$$

$$D^{pq} = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 J_i(t) (\varphi_1^i(t))^{p+q} dt \right\}, \quad p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Наиболее простой способ вычисления внедиагональных коэффициентов матриц A^{pq} , обеспечивающий требуемую точность, — численное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса по 4 точкам.

Отметим, что вычислительная сложность процедуры вычисления интегралов может быть снижена: для расчета влияния панелей, расположенных далеко друг от друга, количество гауссовых точек может быть уменьшено. Более подробное исследование данного вопроса требует отдельного исследования и выходит за рамки данной работы.

В то же время точности предложенного алгоритма оказывается недостаточно, если рассматривается профиль с острой кромкой, когда соседние панели (ближайшие к кромке по обе стороны от нее) практически примыкают друг к другу. В этом случае требуется существенно большая точность интегрирования; этот вопрос также в данной работе не рассматривается.

Для диагональных элементов матриц A^{pq} имеются приближенные формулы:

$$A_{ii}^{00} \approx \left(\frac{\alpha_i}{2\pi} - \frac{\alpha_i^3}{12\pi} \right) L_i, \quad A_{ii}^{01} \approx \left(\frac{\beta_i}{24\pi} - \frac{\alpha_i^2 \beta_i}{144\pi} \right) L_i, \quad A_{ii}^{10} \approx \left(\frac{\beta_i}{12\pi} - \frac{23\alpha_i^2 \beta_i}{720\pi} \right) L_i, \quad A_{ii}^{11} \approx -\frac{\alpha_i^3}{144\pi} L_i.$$

Элементы матриц D^{pq} также можно вычислить приближенно по формулам

$$D_{ii}^{00} \approx -\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_i^2}{80} \right) L_i, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} \approx -\frac{\alpha_i \beta_i}{60} L_i, \quad D_{ii}^{11} \approx -\left(\frac{1}{24} + \frac{\alpha_i^2}{180} \right) L_i.$$

Длины панелей L_i и коэффициенты L_i^* с высокой точностью выражаются через длины хорд профиля L_i^0 по формулам

$$L_i \approx L_i^0 \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{6} + \frac{\beta_i^2}{40} \right), \quad L_i^* \approx L_i^0 \alpha_i \beta_i \left(\frac{1}{30} - \frac{\alpha_i^2}{70} \right).$$

Коэффициенты правой части вычисляются по формулам

$$b_i^p = \int_0^1 f_\tau(r_i(t)) \varphi_p^i(t) J_i(t) dt, \quad p = 0, 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

2.4 Оценка точности решения задачи

В некоторых частных случаях, например, для задачи о расчете обтекания эллиптического профиля [9], используя методы теории конформных отображений, можно найти точное аналитическое решение для распределения $\gamma^*(s)$ интенсивности вихревого слоя вдоль профиля (здесь s — некоторый параметр, которым может быть параметризована граница профиля).

После решения системы линейных алгебраических уравнений и отыскания значений неизвестных γ_i и δ_i , $i = 1, \dots, N$, распределение интенсивности вихревого слоя по панелям можно считать найденным. Приводя его к той же параметризации профиля, что и точное аналитическое решение, и сравнивая с ним в норме L_1 :

$$\|\Delta\gamma\|_{L_1} = \oint_K |\gamma(s) - \gamma^*(s)| dl_s,$$

можно установить, что ошибка убывает пропорционально квадрату длины панелей, т. е. предложенная схема обеспечивает второй порядок точности.

Однако в вихревых методах помимо самого распределения интенсивности вихревого слоя по профилю представляют интерес величины суммарной завихренности на панелях, вычисляемые по найденному численному решению следующим образом:

$$\Gamma_i = \int_0^1 (\gamma_i \varphi_0^i(t) + \delta_i \varphi_1^i(t)) J_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сравнивая их с интегралами Γ_i^* от точного аналитического решения, вычисляемыми вдоль панелей, получаем, что предложенная схема обеспечивает 5-й порядок точности, если под ошибкой понимать величину

$$\|\Delta\Gamma\|_{C^h} = \max_{i=1, \dots, N} |\Gamma_i - \Gamma_i^*|,$$

и 4-й порядок для средних значений интенсивности вихревого слоя на панелях:

$$\|\Delta\gamma\|_{C^h} = \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{\Gamma_i - \Gamma_i^*}{L_i} \right|,$$

3 Вычислительный эксперимент

На графике на рис. 3 приведены зависимости ошибки $\|\Delta\gamma\|_{C^h}$ от числа панелей при моделировании обтекания эллиптических профилей с различным соотношением осей при их разбиении на панели приблизительно равной длины. Видно, что разработанный численный метод обеспечивает 4-й порядок точности.

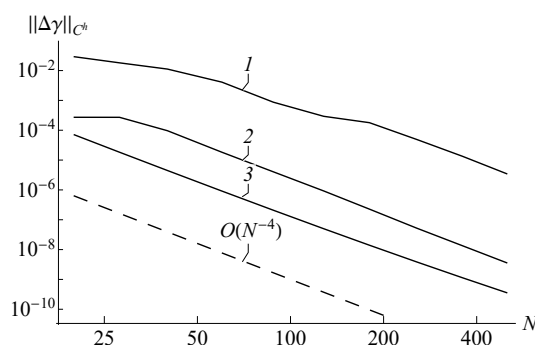


Рис. 3: Ошибка в определении средних величин интенсивности вихревого слоя по панелям в зависимости от их количества для эллиптических профилей с различным соотношением осей: 1 — 1:5; 2 — 1:2; 3 — 1:1; штриховая линия соответствует 4-му порядку точности (в логарифмическом масштабе)

Заключение

Разработана новая расчетная схема для решения граничного интегрального уравнения, возникающего при моделировании обтекания профилей вихревыми методами. Данная схема основана на учете кривизны профиля путем его аппроксимации с помощью эрмитовых сплайнов. Для численного решения интегрального уравнения использован подход, основанный на идеях разрывного метода Галеркина. Решение представляется в виде кусочно-линейной функции. Данный подход позволяет получить 2-й порядок точности в норме L_1 и 4-й порядок для средних интенсивностей вихревого слоя на панелях.

Список литературы

- [1] Лифанов И. К. Метод сингулярных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
- [2] Дынникова Г. Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. Москва, 2011. 269 с.
- [3] Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. Vortex methods. Theory and practice. Cambridge University Press, 2008. 314 p.
- [4] Lewis R. I. Vortex Element Methods For Fluid Dynamic Analysis Of Engineering Systems. Cambridge University Press, 2005. 592 p.
- [5] Жуковский Н. Е. О присоединенных вихрях // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1906. Т. XIII, вып. 2.
- [6] Kempka S. N., Glass M. W., Peery J. S., Strickland J. H. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA REPORT SAND96-0583 UC-700, 1996.
- [7] Kuzmina K. S., Marchevsky I. K. The modified numerical scheme for 2D flow-structure interaction simulation using meshless vortex element method // Proc. of 4th Intern. Conf. on Particle-Based Methods — PARTICLES 2015 (Barcelona). 2015. P. 680–692.
- [8] Кузьмина К. С., Марчевский И. К., Рятина Е. П. Расчетная схема вихревых методов второго порядка точности для моделирования обтекания профилей несжимаемым потоком // Известия вузов. Авиационная техника. 2017. В печати.
- [9] Кузьмина К. С., Марчевский И. К. Численная схема высокого порядка точности для определения интенсивности вихревого слоя при решении двумерных задач аэрогидродинамики вихревыми методами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 93–109.
- [10] Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. of Scientific Computing. 2001. V. 16. No. 3. P. 173–261.

*Ксения Сергеевна Кузьмина — аспирант, ассистент каф. «Прикладная математика»
Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана
e-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru;*

*Илья Константинович Марчевский — к.ф.-м.н., доцент каф. «Прикладная математика»
Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана
e-mail: iliamarchevsky@mail.ru.*

Дата поступления — 30 мая 2017 г.