

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О ВИБРАЦИИ ШТАМПОВ, ПЛОСКИХ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПОЛОСТЕЙ

А. В. Павлова

*Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар*

УДК 539.3

Работа посвящена развитию методов решения интегральных уравнений (ИУ) и систем ИУ смешанных динамических задач теории упругости, задаваемых в односвязных областях сложной формы. Представлено обобщение метода фиктивного поглощения на случай невыпуклой в плане области, занимаемой дефектом или штампом. Указанный метод позволяет описывать решения не только внутри, но и в окрестности границ области контакта и может быть использован при решении контактных задач о вибрации штампов, полостей или жестких включений произвольной в плане формы. Для областей сложной конфигурации предполагается возможным представление их в виде объединения выпуклых ограниченных замкнутых областей, возможно с общими граничными множествами. Предлагается модификация метода в части подбора базисных функций, присутствующие в решении лишь под знаками операторов, в качестве последних выбираются производные дельта-функций, что упрощает построение решения.

**Ключевые слова:** метод фиктивного поглощения, интегральное уравнение, осциллирующее ядро, область сложной конфигурации, факторизация.

Построение моделей поведения деформируемых сред, в том числе структурно-неоднородных, подверженных вибрационным воздействиям, приводит к смешанным динамическим задачам. Для исследования последних необходимо дальнейшее развитие подходов к решению систем интегральных уравнений, порождаемых такими задачами.

Метод фиктивного поглощения может быть применен для решения интегральных уравнений (ИУ) и систем ИУ смешанных динамических задач теории упругости, задаваемых в односвязных областях сложной формы. К подобным уравнениям приводят контактные задачи о колебании штампов на поверхности упругой среды, а также вибрации внутренних дефектов: полостей и плоских жестких включений, имеющих произвольную форму.

В основе развиваемого подхода, названного методом фиктивного поглощения [1, 2], лежит преобразование символа ядра ИУ или матрицы-символа системы ИУ (СИУ), позволяющее перейти от решения ИУ с медленно убывающим и сильно осциллирующим ядром к ИУ с экспоненциально убывающими с ростом аргумента ядром. Задачам для обладающих сильным затуханием сред соответствует именно такое поведение ядер ИУ. А для решения интегральных уравнений подобных задач имеется большое количество хорошо зарекомендовавших себя приближенных методов.

Применение метода фиктивного поглощения дает возможность выделять составляющие решения с осцилляцией, оставляя неосциллирующую функцию в качестве неизвестной. Далее решение исходной задачи строится посредством обратных преобразований. Предлагаемая схема метода, в отличие от развитой в [2], использует в качестве базисных функций производные  $\delta$ -функций Дирака с носителями в граничных множествах рассматриваемых областей. Более сложный вид используемых функций обеспечивает в данном случае представление решения в более удобной форме.

Рассмотрим общую схему метода для решения СИУ в области произвольной конфигурации  $\Omega$ . При этом полагается, что область контакта  $\Omega$ , возможно, невыпуклая, представляет собой объединение выпуклых

ограниченных замкнутых областей  $\Omega = \bigcup_{m=1}^M D_m$ ,  $M < \infty$ . Общими у  $D_m$  могут быть лишь граничные множества  $S_k$ . Тогда вместо уравнения можно рассматривать систему

$$\mathbf{K}_m q_m = \sum_{m=1}^M K_m q_m = f_s(x_1, x_2), \quad s = \overline{1, M}, \quad (1)$$

$$K_m q_m = \iint_{D_m} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (x_1, x_2) \in D_m,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_1 x_1 - i\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2.$$

Во внутренних точках соответствующих областей  $O_m \in D_m$  с координатами  $a_m, b_m$  введем локальные системы координат  $x_1^m O_m x_2^m$ , оси которых параллельны осям  $x_1 O x_2$ . Уравнения границ  $S_m$  в системе  $x_1 O x_2$  описываются функциями  $R_m = R_m(\psi)$ .

В соответствии со схемой метода фиктивного поглощения [1, 2] строится функция

$$K_0(\alpha) = K(\alpha)^{-1}(\alpha), \quad \Pi(\alpha) = E_N(\alpha^2) Q_N^{-1}(\alpha^2) \equiv \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1}.$$

Здесь через  $p_k$  и  $z_k$  соответственно обозначены полюса и нули  $K(\alpha)$ ,  $p_k, z_k \in R$ ,  $K_0(\alpha)$  соответствует символу ядра уравнения для среды с сильным поглощением.

Далее решение ищется в форме  $q(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2)$ , где вводится следующая вспомогательная функция  $\varphi$ :

$$\varphi^s(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N G_k(-\Delta) \int_0^{2\pi} \delta[x_1 - a_s - R_s(\psi) \cos \psi] \delta[x_2 - b_s - R_s(\psi) \sin \psi] g_{ks}(\psi) d\psi,$$

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2),$$

$\Delta$  — двумерный оператор Лапласа,  $g_{ks}$  — некоторые подлежащие определению однозначные функции.

Здесь используется модификация метода фиктивного поглощения в части выбора базисных вспомогательных функций. Прделав ряд преобразований, решение (1) можно представить в виде

$$q(x_1, x_2) = V^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) V [\varphi_2 + K_0^{-1} f(x_1, x_2) - K_0^{-1} P_{[\Omega]} K_0 \varphi_2], \quad (2)$$

$$\varphi_2 = V^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M E_N(p_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} e^{i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)} \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) e^{i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)} d\psi, \quad (3)$$

$V, V^{-1}$  — соответственно операторы прямого и обратного двумерного преобразований Фурье,  $P_{[\Omega]}$  — проектор на область  $\Omega$ .

Дополнительное выделение у функции  $\varphi_2$  составляющих с носителем в области  $D_s$   $\varphi_{2s}^+ = \varphi_2(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in D_s$ , и вне ее  $\varphi_{2s}^- = \varphi_2(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_2^- = \varphi_2(x_1, x_2) - \sum_{s=1}^M \varphi_{2s}^+$ ,  $s = \overline{1, M}$ , позволяет проделать дальнейшие упрощения в (3). Обозначив  $q_s(x_1, x_2) \equiv q(x_1, x_2, D_s) = q(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in D_s$ , (2) можно переписать следующим образом:

$$q(x_1, x_2, D_s) = V^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) F(\alpha_1, \alpha_2, D_s),$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = V P_{[D_s]} [K_0^{-1} f - K_0^{-1} P_{[\Omega]} K_0 \varphi_2^-] + V \varphi_{2s}^-.$$

Подлежащие определению  $g_{ks}$  находятся из системы [1]

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2, \quad n = \overline{1, N}.$$

Описанная модификация метода фиктивного поглощения для решения ИУ в областях сложной конфигурации применима для решения СИУ

$$\mathbf{K}_m \mathbf{q}_m = \sum_{m=1}^M \iint_{D_m} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \mathbf{q}_m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \mathbf{f}_s(x_1, x_2), \quad (4)$$

$$(x_1, x_2) \in D_m, \quad s = \overline{1, M},$$

$$\mathbf{k}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_1 x_1 - i\alpha_2 x_2) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Решение строится в предположении, что система разрешима для вектора-функции  $\mathbf{f}(x_1, x_2) \in {}^1(\Omega)$ , контуры интегрирования  $\Gamma_1, \Gamma_2$  определяются условиями излучения, а элементы  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^N$  обладают свойствами, описанными в [1, 2], в частности  $K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$  допускают представление вида, где

$$K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=1}^{m(i,j)} P_{ij}^k(\alpha_1, \alpha_2) R_{ij}^k(\alpha), \quad m(i, j) < \infty,$$

полиномы  $P_{ij}^k(\alpha_1, \alpha_2)$  зависят от переменных  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  $R_{ij}^k(\alpha)$  — такие аналитические функции переменной  $\alpha$ , что  $\det \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta(\alpha)$ .

Следуя схеме метода фиктивного поглощения [1], построим матрицу-функцию

$$\mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{\Pi}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Здесь матрица-функция  $\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2) \approx \mathbf{E} + \mathbf{O}(\alpha^{-1})$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица, у элементов матрицы  $\mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2)$  на вещественной оси нет особенностей и она имеет такое же асимптотическое поведение на бесконечности, что и  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ . Решение СИУ отыскивается в виде  $\mathbf{q}(x_1, x_2) = \mathbf{p}(x_1, x_2) + \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{p} = \{p_n\}$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_n\}$ , где  $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^M \boldsymbol{\varphi}^s(x_1, x_2)$ . При этом необходимо потребовать, чтобы компоненты  $\boldsymbol{\varphi}$  удовлетворяли условиям  $V\boldsymbol{\varphi}^s(x_1, x_2) = V\mathbf{q}(x_1, x_2, D_s)$  при  $(\alpha_1, \alpha_2) \in P_{jn}$ ,  $P_{jn}$  — полярные множества  $\Pi_{ij}$  элементов  $\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2)$ . Тогда  $P_n(\alpha_1, \alpha_2) = Vp_n(x_1, x_2) = 0$  для  $(\alpha_1, \alpha_2) \in P_{jn}$ .

Введя неизвестную  $\mathbf{t}(x_1, x_2) = V^{-1}\mathbf{\Pi}(\alpha, N)V\mathbf{p}(x_1, x_2)$ , следуя схеме метода, получим

$$K_0 \mathbf{t} = \mathbf{f}(x_1, x_2) - K_0 V^{-1} \mathbf{\Pi}(\alpha, N) V \boldsymbol{\varphi},$$

где матрица-символ ядра оператора  $K_0$  представляется как  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}\mathbf{\Pi}^{-1}$ .

Разделяя классическую  $\boldsymbol{\varphi}_2$  (имеющую носитель во всей плоскости) и обобщенную  $\boldsymbol{\varphi}_0$  (с носителем в  $\Omega$ ) составляющие  $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{t}$  можно представить в виде

$$\mathbf{t}(x_1, x_2) = K_0^{-1} \mathbf{f}(x_1, x_2) - \boldsymbol{\varphi}_0(x_1, x_2) - K_0^{-1} P_{[\Omega]} K_0 \boldsymbol{\varphi}_2^-.$$

Используя представление

$$\boldsymbol{\varphi}_2^- = \boldsymbol{\varphi}_2(x_1, x_2) - \sum_{s=1}^M \boldsymbol{\varphi}_{2s}^+, \quad \boldsymbol{\varphi}_{2s}^- = \boldsymbol{\varphi}_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \notin D_s, \quad \boldsymbol{\varphi}_{2s}^+ = \boldsymbol{\varphi}_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D_s,$$

решение СИУ (4) можно выразить

$$\mathbf{q}(x_1, x_2, D_s) = V^{-1} \mathbf{\Pi}^{-1}(\alpha, N) \{VP_{[D_s]} [K_0^{-1} \mathbf{f} - K_0^{-1} P_{[\Omega]} K_0 \boldsymbol{\varphi}_2^-] + V\boldsymbol{\varphi}_{2s}^+\}.$$

При этом должны выполняться условия [1]

$$VP_{[D_s]} [K_0^{-1} \mathbf{f} - K_0^{-1} P_{[\Omega]} K_0 \boldsymbol{\varphi}_2^-] + V\boldsymbol{\varphi}_{2s}^+ = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_{jn},$$

где  $Z_{jn}$  — нулевые множества  $\Pi_{ij}$  элементов  $\mathbf{\Pi}(\alpha_1, \alpha_2)$ .

В окончательном решении, как и в случае решения ИУ, введенная вектор-функция  $\boldsymbol{\varphi}$  присутствует только под знаками интегральных операторов. Введенные неизвестные на стыковочных границах  $D_s$  взаимно уничтожаются.

В работе [3] описанная модификация метода фиктивного поглощения применена для решения интегрального уравнения задачи об установившихся колебаниях круглого штампа на поверхности упругого слоя при наличии системы вертикальных включений, а в работе [4] — для задачи, описывающей вибрации упругого слоя под действием поверхностной нагрузки и системы жестких горизонтальных включений, в осесимметричной постановке.

Элементы матриц-символов ядер интегральных уравнений для задач об установившихся колебаниях полугораниченной упругой среды, вызванных вибрациями внутренних полостей-трещин или покрытий, моделируемых пластинами Кирхгофа, не удовлетворяют условию убывания на бесконечности. В таких случаях можно осуществить регуляризацию  $K$ , например, вынося из обеих частей уравнения дифференциальный оператор. Такое преобразование уравнения приводит к ИУ с классической функцией ядра, решение которого строится в соответствии с описанной схемой.

## Список литературы

- [1] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 26 с.
- [2] Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
- [3] Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С. К моделированию взаимодействия фундамента с деформируемой грунтовой средой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2015. № 3. С. 44–51.
- [4] Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С. К исследованию реакции деформируемой грунтовой среды на воздействие поверхностного и внутренних вибрационных источников // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2016. № 3. С. 37–43.

*Павлова Алла Владимировна — д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета;  
e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.  
Дата поступления — 12 мая 2017 г.*