

# АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА МЕТОДОМ МОНТЕ — КАРЛО

С. С. Артемьев, А. А. Иванов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 519.676

В работе методом Монте — Карло исследуются решения стохастического дифференциального уравнения в частных производных Бюргерса. Расчёт частотных характеристик для решений нелинейных систем СДУ проводится с помощью обобщённого явного метода Эйлера. Приводятся результаты численных экспериментов, проведённых на кластере НКС — 30Т Сибирского Суперкомпьютерного Центра при ИВМиМГ СО РАН с использованием комплекса программ AMIKS

**Ключевые слова:** стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, обобщённый метод Эйлера, метод Монте — Карло, параллельные алгоритмы, уравнение Бюргерса, частотный портрет решения, частотное временное сечение

## Введение

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (СДУЧП) возникают во многих областях науки и прежде всего в физике. Велико и разнообразие типов используемых уравнений: от линейных уравнений со случайными коэффициентами до нелинейных уравнений со случайными внешними силами. В данной работе с помощью метода Монте — Карло исследуются решения стохастического дифференциального уравнения Бюргерса. Первоначально параболическое уравнение Бюргерса (или одномерное уравнение Навье-Стокса) было предложено в качестве модели для описания движения жидкости [1]. Впоследствии оказалось, что эта модель хорошо описывает динамику нелинейно-диссипативных сред различной физической природы, а также помогает при изучении широкого класса процессов в гидродинамике, нелинейной акустике и физике плазмы [2]. В некоторых частных случаях удаётся получить точные решения нелинейного уравнения Бюргерса, однако в общем виде точное решение не найдено [3]. Если в правую часть уравнения Бюргерса добавить источник, то оно будет описывать динамику физической системы с "подкачкой" энергии, находящуюся во внешнем поле. А если в качестве источника рассматривать случайные внешние или внутренние возмущения, то перейдем от обыкновенного дифференциального уравнения к стохастическому. После дискретизации пространственных производных в СДУЧП получаем систему СДУ с сотнями и тысячами уравнений. Универсальным способом численного анализа решений систем СДУ большой размерности является метод Монте — Карло. Моделирую на компьютере ансамбль независимых между собой траекторий решения СДУ, можно рассчитать любые требуемые статистические и частотные характеристики от решения.

Практика вычислений показала, что моментные функции и даже плотности распределений не дают полной информации о поведении во времени решений нелинейных систем СДУ [4]. Более информативными являются частотные обобщения решений, в которых учитывается вся статистика моделируемого ансамбля траекторий. Для анализа свойств решений в данной работе предложены новые частотные характеристики: частотный портрет решения и частотное временное сечение. Рассчитываемые характеристики решений СДУЧП, прежде всего, должны показать реакцию динамической системы на случайные возмущения, т.е. степень отклонения стохастических решений от детерминированных, а также наличие общих закономерностей в поведении моделируемых траекторий решений СДУЧП, должны дать возможность проведения сравнений при параметрическом анализе решений.

В настоящей работе обсуждаются результаты численного статистического моделирования решений стохастического уравнения Бюргерса, проведенного на кластере НКС — 30Т Сибирского Суперкомпьютерного Центра при ИВМ и МГ СО РАН с помощью комплекса программ AMIKS [5].

## 1 Стохастическое уравнение Бюргерса и частотные характеристики для анализа решений СДУЧП

Стохастическое уравнение Бюргерса со случайными начально-краевыми условиями запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= -\mu u \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + F(t, x, u), t \in [0, T], x \in [0, 1], \\ u(0, x) &= \varphi(x), \\ u(t, 0) &= \psi_0(t), \\ u(t, 1) &= \psi_1(t).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $F(t, x, u)$  — нестационарное случайное поле, характеристики которого будем задавать на уровне дискретной схемы. При  $\varepsilon = 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv 0$  из уравнение Бюргерса получаем уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -\mu u \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}.\tag{2}$$

При  $\mu = 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv 0$  получаем уравнение диффузии:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}.\tag{3}$$

После дискретизации пространственных производных в уравнении (1) получим, например, следующую систему СДУ Ито с аддитивными винеровскими приращениями

$$du_m(t) = (-\mu u_m(t) \frac{u_{m+1}(t) - u_{m-1}(t)}{2h_x} + \varepsilon^2 \frac{u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)}{h_x^2} + F_m(t))dt + \sigma_m dw_m(t), \quad m = 1, \dots, M.\tag{4}$$

В основе определения СДУ Ито лежит понятие винеровского процесса  $w(t)$  со свойствами: гауссовский, с независимыми приращениями,  $w(0) = 0$ ,  $EW(t) = 0$  для всех  $t > 0$ ,  $EW(t)w(s) = \min(t, s)$ ,  $t > 0, s > 0$ . В системе СДУ (4) можно в качестве  $w_m(t)$  задавать любой процесс с независимыми приращениями с любыми законами распределения. Задача Коши для системы СДУ Ито (4) включает случайные или детерминированные начальные значения и временной интервал интегрирования.

Простейшим численным методом для решения систем СДУ Ито вида:

$$dy(t) = f(t, y)dt + \sigma(t, y)dw(t), y(t_0) = y_0,\tag{5}$$

является обобщенный явный метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \sqrt{h}\sigma(t_n, y_n)\xi_{n+1}.\tag{6}$$

Здесь  $y_{n+1}$  — численное решение в узле сетки  $t_{n+1} = t_n + h$ ,  $\{\xi_{n+1}\}_0^{N-1}$  — последовательность независимых между собой стандартных гауссовых векторов с независимыми компонентами.

Отметим, что в данной работе не обсуждается вопрос о точности аппроксимации дискретной схемой непрерывной стохастической модели (1), так как в непрерывной модели не определены характеристики случайного поля  $F(t, x, u)$ . Кроме того, при случайных начальных данных  $\varphi(x)$  или наличии некоторых входных шумов с интенсивностями  $\sigma_m \neq 0$  вопрос об аппроксимации производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  выражением

$\frac{u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)}{h_x^2}$  не стоит, так как в этом случае числитель не зависит от величины  $h_x$ .

Изучение СДУЧП с помощью метода Монте — Карло является достаточно новым направлением в науке. Для того чтобы анализировать и понимать некоторые свойства решений изучаемых СДУЧП, ставится задача по разработке новых информативных частотных характеристик решения, с помощью которых было бы удобно иллюстрировать и анализировать динамику исследуемых стохастических процессов. После

разработки подобных характеристик проводится их апробация на тестовых задачах. Ниже вводятся новые частотные характеристики для анализа решения СДУЧП методом Монте — Карло, которые должны способствовать более полному пониманию эффектов, присутствующих в изучаемом реальном процессе. При должной постановке дискретной модели, а так же соотношении реального эксперимента модельному — новые характеристики могут способствовать в прогнозировании некоторых событий в будущем для изучаемого физического процесса.

Пусть с помощью метода Монте — Карло получен ансамбль из  $L$  траекторий решения системы СДУ (4). По результатам расчетов имеем массив значений  $\{U_{mn}^{(e)}\}$ , где  $m$  — номер компоненты системы СДУ,  $n$  — номер временного узла  $t_n$ ,  $e$  — номер смоделированной траектории решения. Далее в двумерной области строится сетка, в каждую ячейку которой попадёт определённое количество значений  $\{U_{mn}^{(e)}\}$ . Размер и место двумерной сетки выбирается так, чтобы продемонстрировать графически нужный участок поведения решения СДУ.

Введём обозначение  $\nu_{pq}$  — количество значений  $\{U_{mn}^{(e)}\}$ , попавших в ячейку  $S_{pq}$  сетки. Тогда:

1. ЧПР — частотный портрет решения.

$$\nu_{pq} = \sum_{e,m} \chi_{mn}^{(e)}, \quad n = 1, \dots, N, \quad \chi_{mn}^{(e)} \text{ — индикатор события (принимает значение либо 0, либо 1) } U_{mn}^{(e)} \in S_{pq},$$

$S_{pq}$  — ячейки из прямоугольника  $[U_1, U_2] \times [T_1, T_2]$ . Здесь  $p$  — число разбиений отрезка  $[U_1, U_2]$ ,  $q$  — число разбиений отрезка  $[T_1, T_2]$ . Отрезок  $[U_1, U_2]$  задаётся произвольным, а отрезок  $[T_1, T_2]$  должен целиком лежать в отрезке  $[0, T]$ . Шаги  $t_n$  (шаг интегрирования метода Эйлера) и  $t_q$  (шаг сетки по времени) следует синхронизировать:  $t_q = z t_n$ ,  $z$  — целое,  $z \geq 1$ .

2. ЧВС — частотное временное сечение.

$\nu_{pq} = \sum_e \chi_{mn}^{(e)}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n$  — номер фиксированного узла сетки по времени  $t_n$ . Здесь  $S_{pq}$  — ячейки из прямоугольника  $[U_1, U_2] \times [X_1, X_2]$ , отрезок  $[X_1, X_2]$  должен целиком лежать в отрезке  $[0, 1]$ . При расчёте ЧВС для набора значений  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  возможен просмотр в режиме «кино».

## 2 Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились с помощью модифицированной программы AMIKS, в которой добавлены новые расчётные характеристики: ЧПР и ЧВС.

### Тест 1.

Численные расчёты системы СДУ (4) проводились на интервале интегрирования  $[0, 10]$  с шагом по времени  $h_t = 10^{-4}$  и с шагом по пространству  $h_x = 10^{-3}$  на интервале  $[0, 1]$ , при  $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ ,  $\mu = 0$ ,  $F(t, x, u) \equiv 0$  (СДУ диффузии) с одинаковыми интенсивностями аддитивных шумов  $\sigma_m = 1, m = 1, \dots, 1000$ ,  $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ ,  $\psi_0(t) = 0.6 \sin(\pi t)$ ,  $\psi_1(t) = -0.3t$ . Уравнение (3) является так же уравнением теплопроводности и показывает распределение температуры в стержне в заданный момент времени. Для расчёта ЧВС на сетке  $1500 \times 1000$  моделировалось  $3 \cdot 10^6$  траекторий на 84 процессорах кластера. Время счёта составило около пяти часов.

На рис. 1 слева приведен график решения детерминированного уравнения диффузии ( $\sigma_m = 0$  для всех  $m$ ) при заданных выше параметрах и начально-краевых условиях при  $t = 2$ . На графика видно как влияют

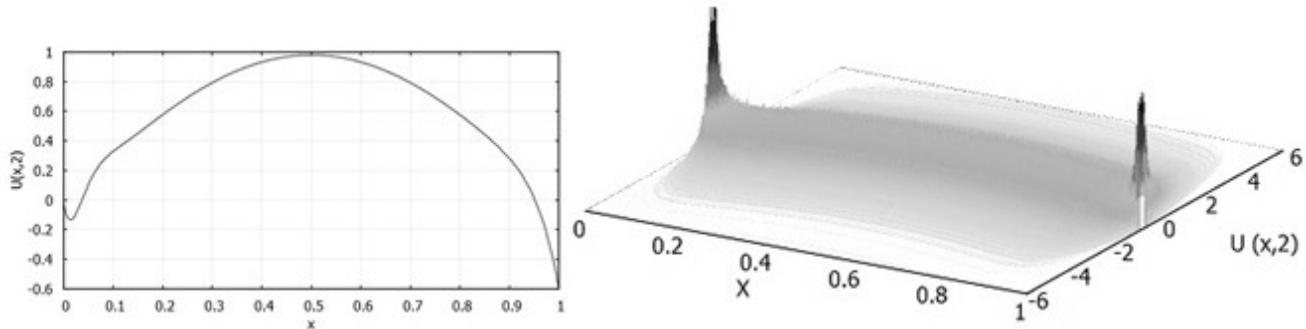


Рис. 1: Детерминированное временное сечение и график ЧВС при  $t = 2$

начально-краевые условия на решение детерминированного уравнения. На рис. 1 справа приведен соответствующий график ЧВС, вид сбоку. Из графика ЧВС видно, как происходит распределение значений в фиксированный момент времени  $n=20000$ .

В соответствии с определением ЧВС, “вершина холма” соответствует наиболее часто встречающимся значениям  $\{U_{m,20000}^{(e)}\}$ . “Ширина холма у основания” показывает диапазон разброса значений  $\{U_{m,20000}^{(e)}\}$  за счёт аддитивного входного шума.

### Тест 2.

Численные расчёты системы СДУ (4) аналогичны тесту 1, кроме  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $\mu = 10^{-3}$  (СДУ Хопфа) с мультипликативными шумами  $\sigma_m = 0.5U_m$ ,  $m = 1, \dots, 1000$ .

На рис. 2 слева приведен график детерминированной поверхности решения уравнения Хопфа, на рис. 2 справа график ЧПР (вид сверху). Из графика ЧПР видно, что начиная с момента времени  $t = 0.5$  некоторые моделируемые траектории начинают расти, и впоследствии они выходят за границы рассматриваемой области. Такой эффект вызван наличием мультипликативного шума, тогда как из графика детерминированной поверхности видно, что роста компонент решения нет.

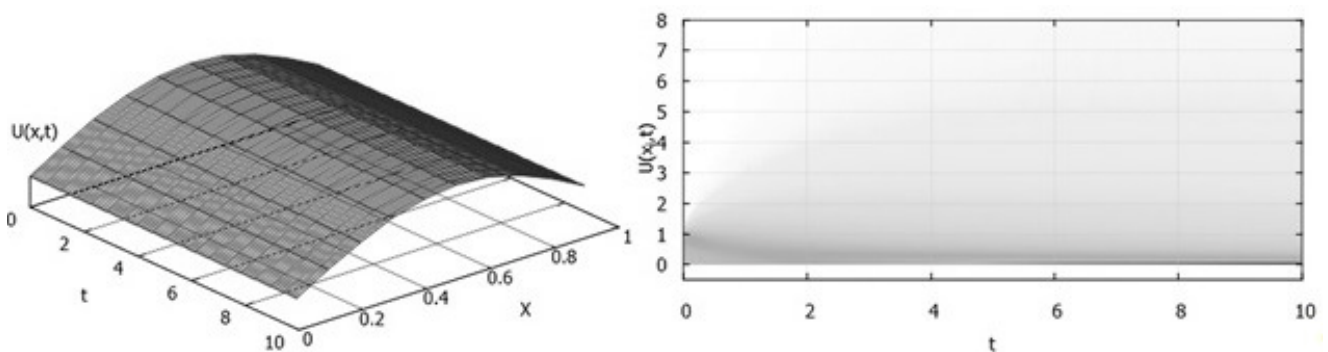


Рис. 2: Детерминированная поверхность решения и график ЧПР

На рис. 3 слева приведен график решения детерминированного уравнения Хопфа при  $t = 2$ . На рис. 3 справа приведен соответствующий график ЧВС (вид сбоку). Сравнение рис.1 и рис. 3 (детерминированных графиков и графиков ЧВС при  $t = 2$ ) показывает различный характер поведения решения уравнения диффузии и Хопфа. Заметим, что для уравнения Хопфа, в отличие от уравнения диффузии явного влияния начально-краевых условий не видно. Так же заметим, что все значения  $U_{m,20000}^{(e)}$  лежат в положительной области, хотя для тех же значений параметров, для уравнения диффузии значения  $U_{m,20000}^{(e)}$  лежат как в положительной, так и в отрицательной области.

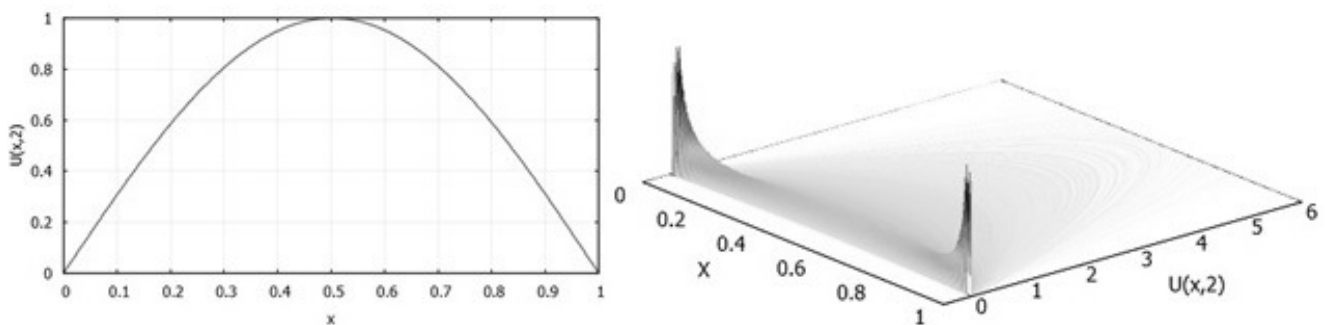


Рис. 3: Детерминированное временное сечение и график ЧВС при  $t = 2$

Как известно, квазилинейное уравнение Хопфа описывает разрывные течения или течения с ударными волнами [6]. В какой то момент времени  $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$  начинает стремиться к бесконечности. В связи с этим, при увеличении параметра  $\mu$ , длины интервала интегрирования  $[0, T]$  или величины интенсивности мульт-

типликативных шумов возникает неограниченный рост некоторых моделируемых траекторий решения, что приводит к остановке счёта.

### Тест 3.

Численные расчёты системы СДУ (4) аналогичны тесту 1 кроме  $\mu = 1$ ,  $F(t, x) = \frac{\sin(2\pi t)}{10x}$  (СДУ Бюргерса с источником), с интенсивностями аддитивных шумов  $\sigma_1 = \sigma_{1000} = 100$ ,  $\sigma_j = 0, j = 2, \dots, 999$ ,  $\varphi(x) = \alpha$ , где  $\alpha$  случайная величина, равномерно распределённая на интервале  $[0, 1]$   $\psi_0(t) = 0.1$ ,  $\psi_1(t) = -0.1$ .

На рис. 4 слева приведён график решения детерминированного уравнения Бюргерса, справа соответствующий ЧПР (вид сбоку), имеющий осциллирующий характер из-за внешнего детерминированного источника  $F(t, x)$ . Пики на графике ЧПР показывают наиболее частые значения решения в соответствующие моменты времени, и разброс значений, вызванный аддитивным шумом на всём интервале интегрирования.

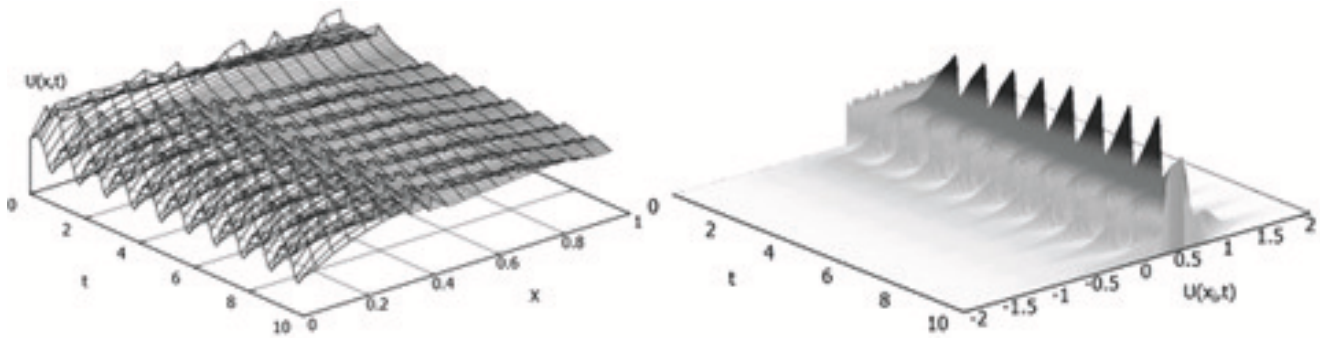


Рис. 4: Детерминированная поверхность решения и график ЧПР

На рис. 5 слева приведён график детерминированного временного сечения слева и график ЧВС (вид сверху) справа при  $t = 2$ . Сравнение левого и правого графиков дает информацию о степени разброса значений  $\{U_{m,20000}^{(e)}\}$ , вызванного аддитивными шумами в крайних компонентах системы СДУ (4) ( $m=1$  и  $m=1000$ ). Отметим, что графики слева и справа визуально схожи, хотя по своей сути рассчитываются совершенно различным образом. Подобный эффект наблюдался при моделировании стохастических колебаний в [4].

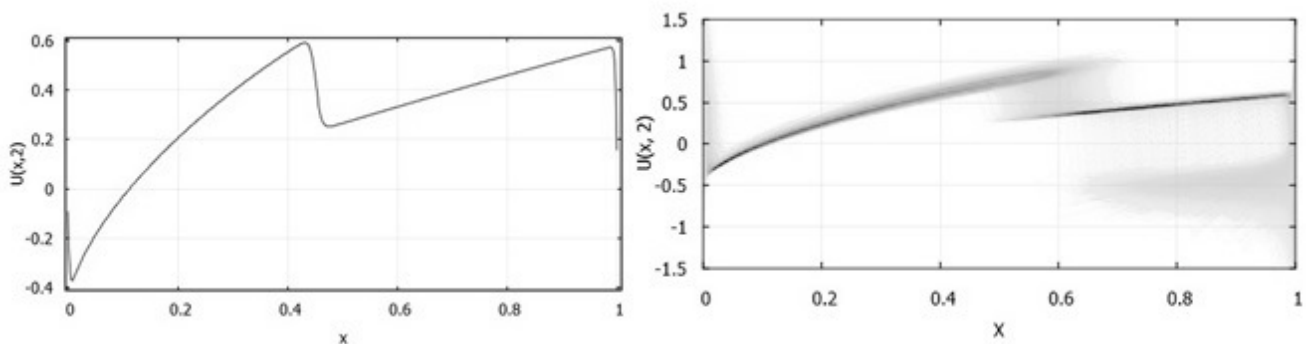


Рис. 5: Детерминированное временное сечение и график ЧВС при  $t = 2$

## Заключение

В данной работе было исследовано поведение численных решений стохастического уравнения Бюргерса при различных параметрах модели. Для анализа решений были разработаны и построены частотный портрет решения и частотное временное сечение. На приведенных рисунках можно оценить степень влияния внешних и внутренних случайных возмущений на решение детерминированного уравнения Бюргерса. Для расчетов использовался модернизированный комплекс АМІКС, в который были включены частотные характеристики для анализа решений СДУ в частных производных.

## Список литературы

- [1] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. Adv. Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–199.
- [2] Su C.S., Gardner C.S. Derivation of the Kortweg-de-Vries equation and Burgers equation. J. Math Phys., 1969, Vol.10, p. 536–539
- [3] Петровский С.В. Точные решения уравнения Бюргерса с источником. Журнал технической физики, 1999, том 69, вып. 8, с. 10–14
- [4] Артемьев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Якунин М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Анализ стохастических колебаний методом Монте—Карло на суперкомпьютерах. Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2016. 293 с.
- [5] Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ АМІКС для численного решения СДУ методом Монте—Карло на суперкомпьютерах. “Вычислительные технологии”, 2017г. (в редакции)
- [6] Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. Учебное пособие. — М.: МГУ, 1999.

*Артемьев Сергей Семёнович — д.ф.-м.н., профессор Новосибирского Государственного Университета,  
зав. лабораторией Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: ssa@osmf.ssc.ru;*

*Иванов Александр Александрович — м.н.с. Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: brrr@mail.ru.*

*Дата поступления — 30 мая 2017 г.*