

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ БЛЕСКА ЗАТМЕННОЙ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ С АККРЕЦИОННЫМ ДИСКОМ

В. В. Лукин<sup>1,2</sup>, М. П. Галанин<sup>1,2</sup>, В. М. Чечеткин<sup>1,3</sup>, К. Л. Маланчев<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047, Москва*

<sup>2</sup> *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Москва*

<sup>3</sup> *Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123098, Москва*

<sup>4</sup> *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, 119234, Москва*

УДК 004.942

Рассмотрена математическая модель формирования аккреционного диска в затменной двойной звездной системе. Модель включает в себя систему уравнений трёхмерной газовой динамики для частично ионизованного невязкого газа с учетом гравитационного потенциала Роша и радиационного охлаждения вещества, записанную во вращающейся системе отсчета. Для численного исследования модели разработан параллельный программный комплекс, основанный на методе типа Годунова для тетраэдральных неструктурированных сеток и позволяющий строить синтетические кривые блеска по результатам газодинамического расчета. Исследован процесс формирования и эволюции аккреционного диска для параметров системы V1239 Her. Расчетные кривые блеска показывают хорошее соответствие с данными наблюдений.

**Ключевые слова:** аккреционный диск, методы типа Годунова, частично ионизованный газ, параллельные вычисления.

## Введение

Кривые блеска затменных двойных систем, наблюдаемых под большими углами между лучом зрения и осью вращения системы, демонстрируют ряд характерных особенностей, нуждающихся в теоретической интерпретации с учетом структуры течения плазмы в аккреционном диске. К таким особенностям, например, относится описанная в [1] переменность кривой блеска звезды V1239 Her до и после затмения аккретора донором. Наблюдения показывают (см. рис. 1), что кривая блеска помимо главного минимума (на орбитальной фазе  $\phi_{orb} = 0$ ) в 1.5 средней внезатменной магнитуды и вторичного ( $\phi_{orb} = 0.5$ ) — в 0.2 магнитуды, как правило, содержит предзатменный подъем блеска ( $\phi_{orb} \simeq -0.2$ ) на 0.2 магнитуды. Подобное поведение демонстрируют и многие другие затменные двойные системы, например [2].

Математическое моделирование кривых блеска для подобных систем при больших углах наклона оси вращения системы требует аккуратного расчета особенностей течения во внешних частях аккреционного диска, а также численного исследования параметров потока в месте контакта струи, истекающей со звезды донора, и аккреционного диска. Такое исследование может быть произведено в рамках модели трехмерной газовой динамики с учетом гравитационного поля и охлаждения газа за счет излучения, см., например, [3]. В частности, было показано, что взаимодействие струи и диска носит безударный характер и приводит к формированию протяженной структуры на границе диска (так называемая горячая линия).

В данной работе мы применим такой подход для интерпретации наблюдательных кривых блеска системы V1239 Her. Газодинамическая модель включает в себя холодную струю, истекающую из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  системы и в течение нескольких оборотов формирующую дисковую структуру вокруг аккретора. Для расчета кривой блеска использована функция охлаждения ионизованного водорода. В отличие от [3] и других аналогичных работ, мы используем не модель совершенного газа, а уравнения состояния частично ионизованного газа для более точного учета баланса внутренней и излученной энергии газа.

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-03073, 16-02-00656, 16-31-00302), Российского научного фонда (код проекта 14-12-00146).

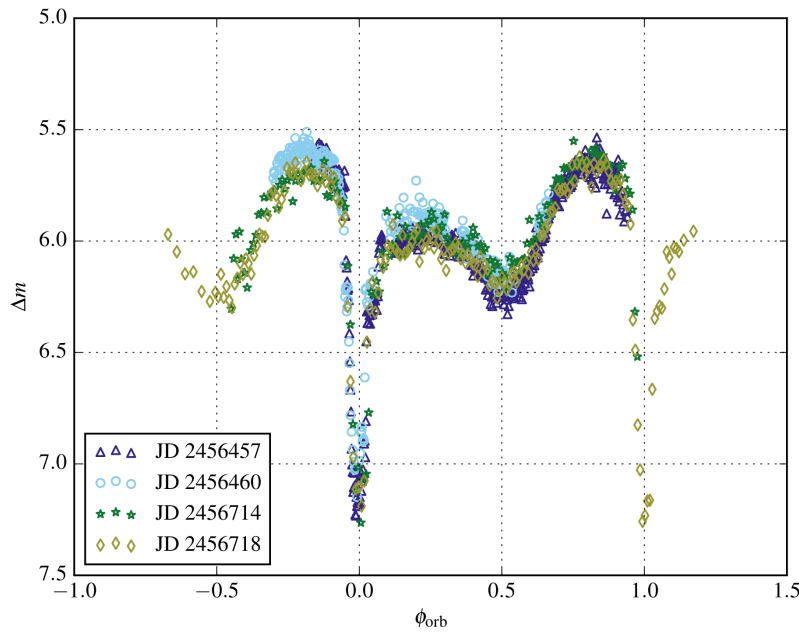


Рис. 1: Наблюдательные кривые системы V1239 Her в белом свете. Данные из [1].

## 1 Математическая модель

При формулировании математической модели истечения струи из внутренней точки Лагранжа и формирования аккреционного диска будем пользоваться следующими положениями.

- Поток частично ионизованной водородной плазмы описывается системой уравнений сжимаемой газовой динамики.
- Самогравитация газа, а также влияние магнитных полей в расчетах не учитывается.
- Плазма представляет собой идеальный невязкий газ, нагреваемый только в силу перехода гравитационной энергии аккрецирующей плазмы во внутреннюю энергию газа.
- Потери энергии происходят за счёт радиационного охлаждения оптически тонкой столкновительной плазмы. Излученная энергия служит мерой блеска системы, получаемого в наблюдениях.

Кривая блеска рассчитывается с использованием пространственного распределения функции радиационного охлаждения, проинтегрированного по лучу зрения до оптической толщи  $\tau = 2/3$ . Расчет оптической толщи при этом осуществляется также на основе трёхмерной структуры течения, что делает модель самосогласованной.

С учетом сделанных предположений система уравнений модели в неинерциальной системе координат, связанной с вращающейся звездной системой, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I}) = -\rho \vec{\nabla} \Phi + 2\rho \vec{v} \times \vec{\Omega}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} (e + p)) = -\rho \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{v} - \Lambda(\rho, i, T), \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность газа,  $\vec{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $e$  — полная энергия единицы объема,  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость вращения двойной системы,  $\Lambda(\rho, i, T)$  — радиационная функция охлаждения, гравитационный потенциал Роша

$$\Phi = -\frac{GM_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} - \frac{GM_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|} - \frac{1}{2} \|\vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)\|^2, \quad (4)$$

$\vec{r}$  — радиус-вектор элементарного объема,  $M_1, M_2$  — массы компонент,  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — их радиус-векторы,  $\vec{r}_c$  — радиус-вектор центра масс системы,  $G$  — гравитационная постоянная. Система уравнений газовой динамики замыкается уравнениями состояния частично ионизованного газа [4]:

$$e = \frac{3}{2}p + \rho \frac{Ry}{m_p} i + \frac{\rho \|\vec{v}\|^2}{2}, \quad p = \rho k T \frac{1+i}{m_p}, \quad (5)$$

$$i = \left[ 1 + p \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_e} \right)^{3/2} (kT)^{-5/2} e^{Ry/kT} \right]^{-1/2}, \quad (6)$$

где  $i$  — степень ионизации,  $T$  — температура,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия газа,  $k$  — постоянная Больцмана,  $Ry$  — постоянная Ридберга,  $m_p$  и  $m_e$  — массы протона и электрона соответственно.

В качестве функции охлаждения использована аппроксимация из [5].

Для проведения расчетов система уравнений (1)–(3) была обезразмерена на характерные масштабы: длина — расстояние между компонентами  $L = 0.945R_\odot$ , где  $R_\odot$  — радиус Солнца; масса — сумма масс донора и аккретора  $M_0 = M_d + M_a$ ,  $M_d = 0.223M_\odot$ ,  $M_a = 0.91M_\odot$ , температура  $T_0 = 3500$  К; плотность газа  $\rho_0 = 1.6 \cdot 10^{-8}$  г см $^{-3}$ . Остальные масштабы могут быть получены стандартным образом, в частности, масштаб времени — орбитальный период системы  $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM_0}}$ .

Начало неинерциальной системы отсчета находится в центре звезды-донора. Расчетная область представляет собой шаровый слой с центром в аккреторе, внешним радиусом  $r_o = 0.64485$  и внутренним (моделирующим поверхность аккретора)  $r_i = 0.01$ . Граничные условия на внутренней границе моделируют свободное падение вещества на аккретор, на внешней — вброс вещества плотностью  $\rho_s = 1$  и температурой  $T = 1$  с локальной звуковой скоростью в круговой окрестности точки  $L_1$  радиусом  $r_s = 0.01$  и исторические условия на остальной части границы. В начальный момент времени плазма в расчетной области вращается (покоится в инерциальной системе отсчета), имеет фоновую плотность  $\rho = 10^{-5}$  и температуру  $T = 10^{-4}$ .

## 2 Численный метод

Для моделирования течения плазмы разработана модификация явного конечно-разностного метода типа Годунова для тетраэдральных неструктурированных сеток. Схема является аддитивной и реализует расщепление по физическим процессам: на первом этапе интегрируется гиперболическая газовая часть системы (1)–(3), затем в импульс и энергию в каждой разностной ячейке вносится поправка, соответствующая действию гравитационных сил и сил инерции, и наконец для уравнения (3) проводится дополнительное интегрирование с дроблением шага для учета радиационного охлаждения вещества. Дробление шага в последнем случае необходимо, поскольку в рамках принятого приближения вещество считается оптически прозрачным для исходящего излучения. В этом случае скорость потери энергии на излучение оказывается существенно выше скорости протекания газодинамических процессов, причем за время газодинамического временного шага часть ячеек может успеть прийти к равновесному тепловому состоянию. Характерное соотношение газодинамического шага, определяемого условием Куранта с коэффициентом запаса  $CFL = 0.4$ , и размера подшага интегрирования функции охлаждения составляет один порядок.

Для интегрирования газодинамических слагаемых системы уравнений применяется конечнообъемный подход с постоянным распределением решения внутри расчетных ячеек (тетраэдров). На гранях тетраэдров потоки  $\vec{F} = (\rho v_\perp, \rho v_\perp^2 + p, \rho v_\perp v_{\parallel,1}, \rho v_\perp v_{\parallel,2}, v_\perp(e+p))^T$  консервативных переменных  $\vec{u} = (\rho, \rho\vec{v}, e)^T$  вычислялись при помощи модифицированного метода HLLC (Harten — Lax — van Leer — Contact) [6]:

$$\vec{F}^* = \begin{cases} \vec{F}^R, & S_R < 0, \\ \vec{F}^R + S_R(\vec{u}^{R*} - \vec{u}^R), & (S_* \leq 0) \wedge (S_R \geq 0), \\ \vec{F}^L + S_L(\vec{u}^{L*} - \vec{u}^L), & (S_L \leq 0) \wedge (S_* \geq 0), \\ \vec{F}^L, & S_L > 0. \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\vec{F}^R$  и  $\vec{F}^L$  — потоки, вычисленные по значениям решения с разных сторон от грани, скорости распро-

странения возмущений оцениваются по формулам

$$S_L = \min\{v_\perp^L - v_s^L, v_\perp^R - v_s^R\}, \quad (8)$$

$$S_R = \max\{v_\perp^L + v_s^L, v_\perp^R + v_s^R\}, \quad (9)$$

$$S_* = \frac{\rho^L v_\perp^L (S_L - v_\perp^L) - \rho^R v_\perp^R (S_R - v_\perp^R) + \bar{p}^R - \bar{p}^L}{\rho^L (S_L - v_\perp^L) - \rho^R (S_R - v_\perp^R)}, \quad (10)$$

а скорость звука в частично-ионизованном газе вычисляется по формуле

$$v_s^2 = \frac{5 + i(1-i) \left(\frac{5}{2} + \text{Ry}\right)^2}{3 + i(1-i) \left[\left(\frac{3}{2} + \text{Ry}\right)^2 + \frac{3}{2}\right]} \frac{p}{\rho}. \quad (11)$$

Отметим схожесть данного подход с моделью совершенного газа. В последнем случае скорость звука вычисляется по формуле

$$v_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (12)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Для газа со степенью ионизации  $i = 0$  или  $1$  формула (11) дает то же значение, что и (12) для одноатомного газа с  $\gamma = 5/3$ . Для промежуточных значений степени ионизации  $i$  коэффициент при  $p/\rho$  в уравнении (11) становится меньше  $5/3$ , что можно интерпретировать как большую сжимаемость частично ионизованной плазмы по сравнению с совершенным газом.

Дополнительная сложность расчетов связана с вычислением термодинамических параметров состояния в газа в каждой расчетной ячейке на каждом шаге интегрирования как гиперболической части системы уравнений, так и функции радиационного охлаждения. Для этого необходимо решить систему нелинейных уравнений (5)–(6) относительно переменных  $p$ ,  $T$  и  $i$  при заданных  $e$ ,  $\rho$  и  $\vec{v}$ . Подстановка уравнений (5) в (6) позволяет прийти к одному нелинейному уравнению вида  $f(i) = 0$ , где функция  $f$  в зависимости от величины внутренней энергии газа либо имеет корень на границе отрезка  $[0, 1]$  (для малых и больших значений внутренней энергии соответственно), либо имеет корень внутри отрезка, который, в силу смены направления выпуклости функции в окрестности корня, не может быть эффективно найден методом Ньютона. Для решения системы в этом случае приходится применять более простые, но и более безотказные методы типа бисекции, требующие минимум 10 итераций для получения удовлетворительного приближения.

## 2.1 Параллельный алгоритм

Построенный численный метод в силу особенностей задачи является весьма требовательным к вычислительным ресурсам. Необходимость разрешить с хорошей точностью тонкий (максимальная толщина порядка 0.1) аккреционный диск даже с учетом локальных сгущений требует использования больших сеток. При этом расчет необходимо выполнять на большие внутренние времена задачи — от 20 орбитальных оборотов. Подобные времена диктуются временем установления течения в диске, выхода его на квазистационарный режим. В расчетах использовалась расчетная сетка из 560,000 ячеек с примерным шагом на поверхности аккретора 0.0025, в области взаимодействия струи и диска 0.02 и на максимальном удалении от диска 0.05. Количество временных слоев в газодинамическом расчете достигало 3–4 млн., не считая подшагов интегрирования функции охлаждения, которые еще на порядок увеличивают указанное число и, хотя и не требуют вычисления потоков (7), но являются затратными в силу сложности функции охлаждения и необходимости решать на каждом подшаге уравнения (5)–(6).

Для решения указанных проблем был разработан параллельный программный комплекс для расчета течений частично ионизованной плазмы на параллельных ЭВМ кластерного типа. Распараллеливание базируется на разбиении исходной области на подобласти с помощью программы Metis и использовании возможностей технологии MPI по прединициализации и группировке операций передачи данных между подобластями. Предварительная сортировка нумерации ячеек в подобластях позволила передавать данные наиболее эффективным образом, что сделало программный комплекс хорошо масштабируемым. Тестирование эффективности распараллеливания комплекса на кластере К-100 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН показало, что ускорение расчетов на 192 ядрах относительно 12 ядер составляет 13.2 раз, то есть эффективность распараллеливания — 82.5%. График ускорения расчетов с ростом числа ядер представлен на рис. 2.

## 2.2 Построение кривой блеска

Полный поток энергии  $F$ , наблюдаемый от системы вычисляется путем интегрирования видимой поверхностной структуры энерговыделения в аккреционном диске вдоль луча зрения наблюдателя:

$$F = \int_S I(x, y) \frac{dS}{d^2}, \quad (13)$$

где  $I(x, y)$  — интенсивность излучения в точке  $(x, y)$  картинной плоскости, перпендикулярной лучу зрения,  $d$  — расстояние до источника излучения. Интенсивность  $I(x, y)$  вычислялась как усредненное по гидродинамическому шагу значение функции охлаждения  $\bar{\Lambda}$  на глубине оптической толщи  $2/3$  от наблюдателя:

$$I(x, y) = \frac{\bar{\Lambda}(x, y, z^*)}{4\pi}, \quad (14)$$

$$z^* : \tau(x, y, z^*) = \int_0^{z^*} \alpha_{Pl}(x, y, z') dz' = \frac{2}{3},$$

где  $z$  — расстояние вдоль луча зрения,  $\tau$  — оптическая толщина между наблюдателем и расчетной ячейкой,  $\alpha_{Pl}$  — средний по Планку коэффициент поглощения. На поверхности звезды-донора задавалась фиксированная интенсивность излучения, соответствующая наблюдениям.

Важным упрощением является тот факт, что при рассчитанной излученной энергии в каждой расчетной ячейке усредненный по Планку коэффициент поглощения может быть получен из результатов газодинамического расчета по формуле

$$\alpha_{Pl}(\rho, T) = \frac{\Lambda(\rho, T)}{4\sigma_{SB}T^4}, \quad (15)$$

где  $\sigma_{SB}$  — постоянная Стефана – Больцмана. Подробности см. в [5].

Размер картинной плоскости выбирался подходящим под размеры наблюдаемой системы, плоскость разбивалась на  $750 \times 300$  (225,000) пикселей, и вычисление интеграла (13) производилось для 100 моментов времени (отличающихся по фазе вращения системы и по внутреннему времени задачи) на один орбитальный период. Луч зрения был наклонен на  $85^\circ$  относительно оси вращения системы. Интеграл (14) также вычислялся численно путем разбиения луча зрения на 3,000 интервалов. Для ускорения расчетов, поскольку блеск для каждой фазы может быть вычислен независимо, также было произведено распараллеливание построенного модуля программного комплекса.

## 3 Результаты расчетов

Установление квазистационарного режима течения в расчетной области происходит за 10 оборотов системы. Струя плазмы, истекающая из точки  $L_1$ , формирует вокруг аккретора структуру в виде тонкого аккреционного диска. На рис. 3 приведены распределения плотности и усредненной функции охлаждения газа в экваториальной плоскости диска спустя 17 оборотов после начала расчета. На графиках видны отошедшая

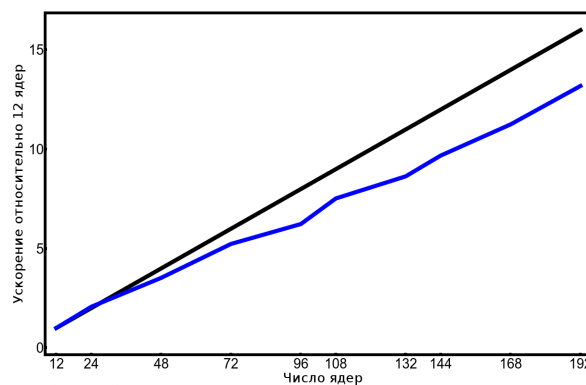


Рис. 2: Ускорение расчетов на кластере K-100.

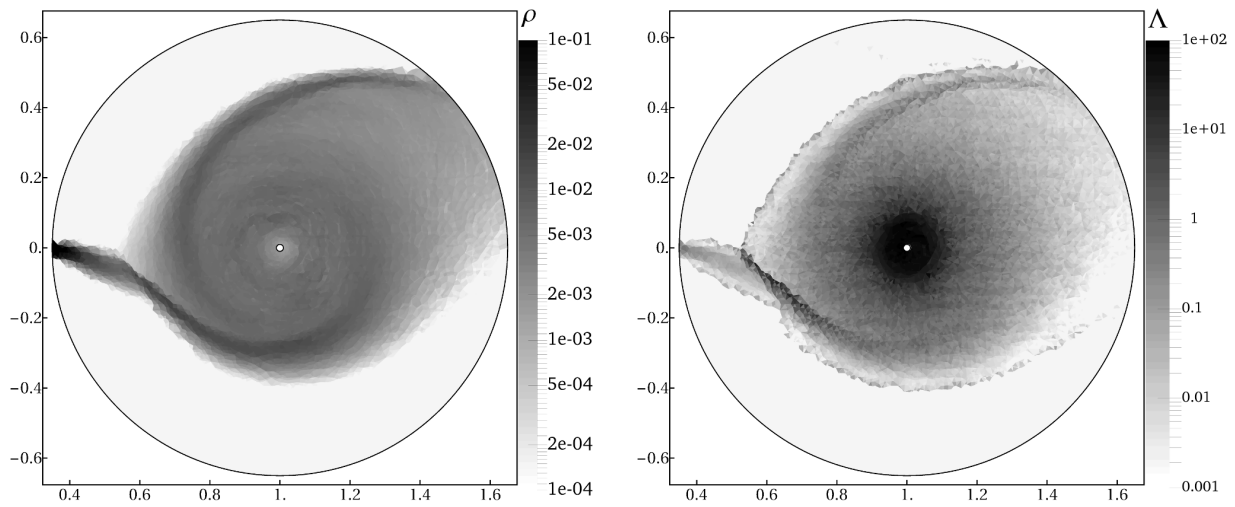


Рис. 3: Распределения плотности и усредненной функции охлаждения в момент времени  $t = 17$ .

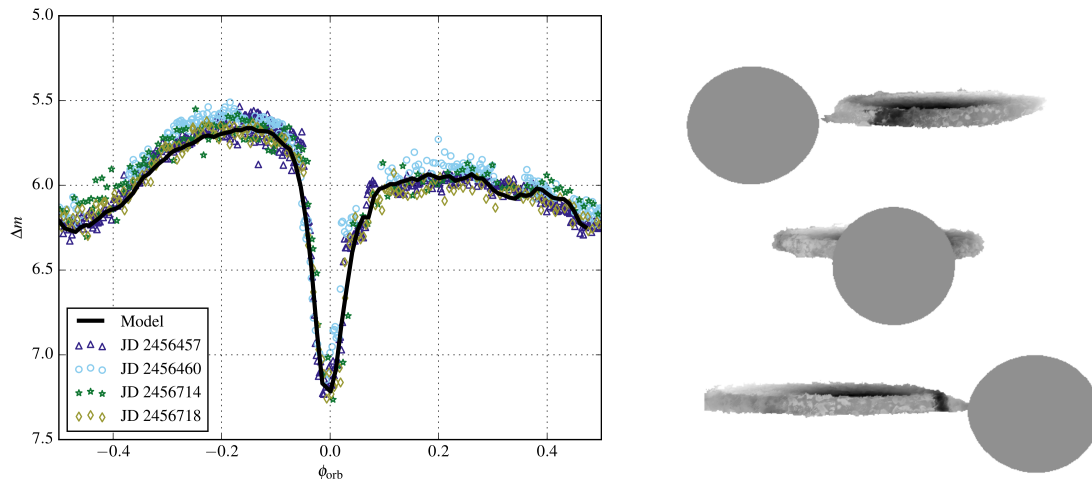


Рис. 4: Слева: синтетическая (черная линия) и наблюдательная (точки) кривые блеска для системы V1239 Her. Справа: изображение на синтетической картинной плоскости до, во время и после затмения, шкала аналогична рис. 3, справа.

ударная волна (в верхней части диска), переходящая в спиральную волну, аналогичную [7], и протяженная структура типа ударной волны в месте слияния струи и диска. Уплотнение и область высокого энергосделения в этом месте возникают из-за ударного характера проникновения вещества диска, совершившего оборот вокруг аккректора, в струю. Около 50% вещества, поступающего вместе со струей от донора, уходит за пределы расчетной области и выходит из системы через внешнюю точку Лагранжа. В отличие холодной неионизованной струи и горячего полностью ионизованного фона, диск является частично ионизованным, степень ионизации составляет примерно 20%.

По полученному газодинамическому решению была построена синтетическая кривая блеска для стационарного состояния звездной системы. На рис. 4, слева эта кривая приведена вместе с наблюдательными данными. Отметим высокую точность полученного результата, а также разрешение всех характерных особенностей кривой блеска — положения и магнитуд затмений, предзатменного подъема блеска, а также характерной полочки в конце основного затмения. Последние две особенности объясняются тем, что на общий блеск системы оказывает существенное влияние видимость яркой горячей линии в месте контакта струи и аккреционного диска, см. рис. 4, справа. Использование модели частично ионизованного газа делает толщину этой области несколько меньше аналогичных расчетов в модели совершенного газа, а следовательно, позволяет учесть влияние излученной в ней энергии на полный блеск системы.

## Заключение

В работе построена и исследована математическая модель течения газа в аккреционном диске затменной двойной системы V1239 Her. Модель включает в себя систему трехмерных уравнений динамики частично ионизованного газа с учетом гравитации и радиационного охлаждения вещества. Для численного решения построен алгоритм и соответствующий параллельный программный комплекс для расчетов на тетраэдральных неструктурированных сетках, включающий в себя модифицированную схему HLLC расчета газодинамических потоков, учет гравитационных сил и сил инерции, интегрирование функции радиационного охлаждения с уменьшенным шагом, а также решение системы нелинейных уравнений состояния. Полученные результаты хорошо согласуются с наблюдательными данными. Более подробное исследование физических аспектов модели можно найти в [5].

## Список литературы

- [1] Карликовая новая V1239 Геркулеса в спокойном состоянии блеска / Т. С. Хрузина, П. Ю. Голышева, Н. А. Катышева и др. // *Астрономический журнал*. 2015. Т. 92, № 4. С. 323–349.
- [2] High-Speed Photometry of the Dwarf Novae Z Cha in Quiescence / J. Wood, K. Horne, G. Berriman et al. // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1986. Vol. 219. Pp. 629–655.
- [3] Свидетельства отсутствия ударного взаимодействия струи и диска (горячего пятна) в полуразделенных двойных системах. Сравнение результатов математического моделирования и наблюдательных данных / Д. В. Бисикало, А. А. Боярчук, О. А. Кузнецов и др. // *Астрономический журнал*. 1998. Т. 75, № 1. С. 40–53.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть I. М.: Наука, Физматлит. 1976. 584 с.
- [5] 3d modelling of accretion disc in eclipsing binary system v1239 her / V. V. Lukin, K. L. Malanchev, N. I. Shakura et al. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. Vol. 467, № 3. P. 2934–2942.
- [6] Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer. 1999. 645 p.
- [7] Ju W., Stone J. M., Zhu Z. Global MHD Simulations of Accretion Disks in Cataclysmic Variables. I. The Importance of Spiral Shocks // *ApJ*. 2016. Vol. 823. Article id. 81. 21 pp.

*Владимир Владимирович Лукин — к.ф.-м.н.,  
ст. науч.сотр. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;  
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: vvlukin@gmail.com;*

*Михаил Павлович Галанин — д.ф.-м.н., проф.,  
зав. отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;  
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: galan@keldysh.ru;*

*Валерий Михайлович Чечеткин — д.ф.-м.н., проф.,  
гл. науч.сотр. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;  
Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт";  
e-mail: chech@gin.keldysh.ru;*

*Константин Леонидович Маланчев — аспирант  
Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга МГУ;  
e-mail: hombit@gmail.com.*

*Дата поступления — 31 мая 2017 г.*