

# О ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА СИМПЛЕКСАХ РАЗМЕРНОСТЕЙ 3 И 4

Н. В. Байдакова

*Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, 620990, Екатеринбург*

УДК 517.51

Для случая интерполяции функции по равномерным узлам  $d$ -симплекса многочленом степени  $n$  известны полученные П. Жамэ оценки сверху величин аппроксимации производных функции в терминах характеристики, требующей вычисления максимума некоторой величины по всем единичным векторам  $d$ -мерного пространства. Указанные оценки являются близкими к неулучшаемыми на естественном классе функций. В работе обсуждаются оценки сверху через новую характеристику, близкие к оценкам П. Жамэ и требующие вычисления максимума на конечном множестве, в трехмерном и четырехмерном пространствах.

**Ключевые слова:** многомерная интерполяция, метод конечных элементов.

## Введение

Пусть  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  — невырожденный  $d$ -симплекс с вершинами  $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$ ;  $H$  — диаметр симплекса  $\Delta$  (длина наибольшего ребра);  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}\}$  — узлы равномерной сетки на  $d$ -симплексе  $\Delta$ , т. е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}} = \left( \frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{d+1}}{n} \right),$$

$$i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n;$$

$W^{n+1}M$  — множество функций, определенных и непрерывных на  $\Delta$  вместе со всеми своими частными производными до порядка  $n+1$  включительно, у которых все производные порядка  $n+1$  ограничены по модулю константой  $M$ ;  $P_n^d = P_n^d[f]$  — многочлен степени не выше  $n$  по совокупности  $d$  переменных, интерполирующий функцию  $f \in W^{n+1}M$  в узлах равномерной сетки симплекса  $\Delta$ , т. е.

$$P_n^d(a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}) = f(a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}),$$

$$i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n.$$

Будем писать, что величины  $\psi_1$  и  $\psi_2$  находятся в отношении  $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_2$  (или  $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\gtrsim} \psi_2$ ), где  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  — некоторые числовые параметры, если найдется неотрицательное число  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , зависящее от  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , такое, что  $\psi_1 \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\psi_2$  (или  $\psi_1 \geq C(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\psi_2$ ). Если  $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_2 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\lesssim} \psi_1$ , то будем писать  $\psi_1 \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_s}{\asymp} \psi_2$ . Аналогично будем использовать обозначения  $\psi_1 \lesssim \psi_2$ ,  $\psi_1 \gtrsim \psi_2$ ,  $\psi_1 \asymp \psi_2$ , если найдется такая неотрицательная константа  $C$ , что соответственно выполняются соотношения  $\psi_1 \leq C\psi_2$ ,  $\psi_1 \geq C\psi_2$ ,  $\psi_1 \lesssim \psi_2 \lesssim \psi_1$ .

Для произвольных  $d$  и  $n$  П. Жамэ [1] был получен следующий результат. Пусть  $E_d = \{e_s\}_{s=1}^d$  — множество единичных линейно независимых векторов;  $\xi$  — произвольный единичный вектор из  $\mathbb{R}^d$ ;  $\mathcal{E}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$  —

множество всех единичных векторов, параллельных ребрам  $d$ -симплекса  $\Delta$ . Пусть  $\theta_s$  — угол между  $\xi$  и прямой с направляющим вектором  $e_s$  (т. е.  $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$ ). Положим

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{E_d \subset \mathcal{E}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in E_d} \{\theta_s\}.$$

Тогда в соответствии с [1] для любых единичных векторов  $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$  имеет место оценка

$$\|D_{\xi_1, \dots, \xi_s}^s (f - P_n^d)\| \lesssim M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos \theta)^s}, \quad s = 0, \dots, n, \quad (1)$$

где  $\|\cdot\|$  — равномерная норма на  $\Delta$ .

В [4] было показано, что оценки (1) качественно являются близкими к неулучшаемому по отношению к их зависимости от геометрии симплекса. Однако эти оценки, несмотря на их широкую известность, не так часто используются. Возможно, это происходит в том числе из-за сложности определения величины  $\cos \theta$ . Существует ряд других оценок типа (1) через другие геометрические характеристики симплекса при  $d = 2, 3$  или при  $n = 1$  (случаев произвольных  $d, n \in \mathbb{N}$  в литературе рассмотрено не так много), однако полных сравнений этих характеристик с характеристикой  $\cos \theta$ , как правило, не проводится. Частичный обзор таких результатов можно найти в [4]. Мы рассмотрим еще одну геометрическую характеристику симплекса, которая достаточно просто определяется и качественно ведет себя аналогично  $\cos \theta$ .

## 1 Определение новой геометрической характеристики симплекса

Обозначим через  $T_i$  ( $i = 0, \dots, d$ ) грани размерности  $d-1$  симплекса  $\Delta$ , для которых соответственно  $a_i \notin T_i$ ;  $\tau_{ij}$  — единичные векторы, направленные от  $a_i$  к  $a_j$ . Пусть  $\gamma_{ij}$  — угол между  $\tau_{ij}$  и  $T_i$ ;  $\gamma_i$  и  $\gamma$  — такие углы, что

$$\sin \gamma_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq d+1 \\ j \neq i}} \sin \gamma_{ij},$$

$$\sin \gamma = \min_{1 \leq i \leq d+1} \sin \gamma_i.$$

Кроме того, нам понадобятся следующие обозначения:  $\mathcal{T}_{ijk}$  — треугольник с вершинами  $a_i, a_j, a_k$ ;  $\omega_{ijk}, \nu_{ijk}$  — соответственно наибольший и средний углы треугольника  $\mathcal{T}_{ijk}$ ;  $\alpha_{k_1 \dots k_s}^{ij}$  — угол между вектором  $\tau_{ij}$  и плоскостью размерности  $s-1$ , натянутой на точки  $a_{k_1}, \dots, a_{k_s}$ ;  $\omega$  — такой угол, что

$$\sin \omega = \max_{\substack{1 \leq i, j, k \leq d+1 \\ i \neq j, i \neq k, j \neq k}} \sin \omega_{ijk}.$$

**Теорема 1.** Для  $d = 3, 4$  имеет место соотношение  $\cos \theta \lesssim \sin \gamma \lesssim \sqrt[d]{\cos \theta}$ .

**Доказательство.** Оценка  $\cos \theta \lesssim \sin \gamma$  для  $d = 3$  доказана в [3]. Для  $d \geq 4$  справедливость этого неравенства устанавливается аналогично с помощью характеристики

$$\theta_{\mathcal{R}} = \theta_{\mathcal{R}}(\Delta) = \max_{|\xi|=1} \min_{\tau \in \mathcal{E}_N} \arccos(\xi \cdot \tau) \leq \theta,$$

предложенной в [2]. Пусть  $\sin \gamma = \sin \gamma_{d+1}$ . Выбирая в качестве  $\xi_0$  единичную нормаль к плоскости грани  $T_{d+1}$ , получаем

$$\cos \theta \leq \cos \theta_{\mathcal{R}} \leq \max_{e \in \mathcal{E}} \left| \cos(\widehat{\xi_0, e}) \right| = \max_{e \in \mathcal{E}} \left| \sin(\widehat{T_{d+1}, e}) \right| = \sin \gamma,$$

где  $(\widehat{T_{d+1}, e})$  — угол между плоскостью размерности  $d-1$ , в которой лежит грань  $T_{d+1}$ , и вектором  $e$ .

Неравенство  $\sin \gamma \lesssim (\cos \gamma)^{1/(d-1)}$  при  $d = 3$  доказано в [3] (см. лемму 1). При  $d = 4$  используем аналогичный метод (также этот метод был применен в [4] при доказательстве теоремы 1, но в [4] речь идет о другой геометрической характеристике, в связи с чем имеются отличия в рассуждениях) с некоторыми дополнениями, которые требуются в этом случае.

В случае  $d = 4$  любая грань  $T_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ) является тетраэдром. Рассмотрим треугольник  $\mathcal{T}_{ijk}$ , для которого  $\sin \omega_{ijk} = \sin \omega$ , и тетраэдр  $T_s$ , для которого  $\mathcal{T}_{ijk}$  является одной из граней. Тогда у тетраэдра  $T_s$

найдется еще одна грань  $\mathcal{T}_{i^*j^*k^*}$ , отличная от  $\mathcal{T}_{ijk}$  и такая, что  $\sin \omega_{i^*j^*k^*} \asymp \sin \omega_{ijk}$ . Кроме того, для любого треугольника  $\mathcal{T}_{ijk}$  выполняется соотношение  $\sin \omega_{ijk} \asymp \sin \nu_{ijk}$ . Таким образом, мы можем считать, что вершины симплекса  $\Delta$  занумерованы таким образом, что

$$\begin{cases} \sin \gamma \lesssim \sin \alpha_{1234}^{5,k_5} \lesssim \sin \alpha_{123}^{5,k_5} \lesssim \sin \alpha_{123}^{4,k_4} \lesssim \sin \alpha_{12}^{4,k_4} \lesssim \sin \alpha_{12}^{13} \asymp \sin \omega, \\ \sin \gamma \lesssim \sin \alpha_{1234}^{5,k_5} \lesssim \sin \alpha_{123}^{5,k_5} \lesssim \sin \alpha_{12}^{5,k_5} \lesssim \sin \alpha_{12}^{13} \asymp \sin \omega, \end{cases} \quad (2)$$

где  $k_4, k_5 \in \{1, 2\}$ .

Положим

$$\begin{aligned} E_0 &= \{\tau_{12}; \tau_{13}; \tau_{4,k_4}; \tau_{5,k_5}\}; \\ b_1 &= \tau_{12}; \quad b_2 = \tau_{13}; \quad b_3 = \tau_{4,k_4}; \quad b_4 = \tau_{5,k_5}; \\ \beta &= \max_{\xi \in \mathbb{R}^3} \min_{e \in E_0} \{\theta_e\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\theta_e = \arccos |(\xi, e)|$  — угол между вектором  $\xi$  и прямой с направляющим вектором  $e$  (через  $(\cdot, \cdot)$  обозначено скалярное произведение). Тогда согласно определению величины  $\theta$  будет

$$\cos \beta \leq \cos \theta.$$

Возьмем последовательность векторов  $b_1, b_2, b_3, b_4$  применим к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, нормируем полученные векторы и получим соответственно ортонормированную систему векторов  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , т. е.

$$e_1 = b_1, \quad e_i = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (b_i, e_j) e_j \right) / \left| b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (b_i, e_j) e_j \right|, \quad i = 2, \dots, 4.$$

Пусть  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  — единичный вектор, на котором реализуется (3). Тогда

$$|(b_i, \xi_0)| = \left| \cos \left( \widehat{b_i, \xi_0} \right) \right| \leq \cos \beta \leq \cos \theta \quad (4)$$

для всех  $i = 1, \dots, d$ . Если  $\xi_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$ , то  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$ . Тогда найдется  $\kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$  такое, что  $|\alpha_\kappa| \geq 1/2 \geq (\cos \theta)^{1-(\kappa-1)/4}/2$ . С учетом (2) для всех  $i = 1, \dots, 4$  получаем

$$\sin \gamma \leq |(b_i, e_i)|. \quad (5)$$

Если  $\kappa = 1$ , то  $(b_1, \xi_0) = \alpha_1 (b_1, e_1) = \alpha_1$ , откуда с учетом (4) следует  $|\alpha_1| = |(b_1, \xi_0)| \leq \cos \theta$ .

При  $\kappa = 2, 3, 4$  последовательно получаем

$$|(b_\kappa, \xi_0)| = |\alpha_1 (b_2, e_1) + \dots + \alpha_\kappa (b_\kappa, e_\kappa)| \lesssim \cos \theta.$$

Если  $|\alpha_2| \geq (\cos \theta)^{3/4}/2$ , то

$$|(b_2, e_2)| \lesssim \frac{\cos \theta + |\alpha_1 (b_2, e_1)|}{|\alpha_2|} \lesssim \frac{\cos \theta + |\alpha_1|}{(\cos \theta)^{1-1/4}} \lesssim \frac{\cos \theta}{(\cos \theta)^{1-1/4}} = (\cos \theta)^{1/4}.$$

Если  $|\alpha_2| < (\cos \theta)^{3/4}/2$ , то переходим к  $\kappa = 3$ . Если  $|\alpha_3| \geq (\cos \theta)^{2/4}/2$ , то

$$|(b_3, e_3)| \lesssim \frac{\cos \theta + |\alpha_1 (b_3, e_1)| + |\alpha_2 (b_3, e_2)|}{|\alpha_3|} \lesssim \frac{\cos \theta + |\alpha_1| + |\alpha_2|}{(\cos \theta)^{1-2/4}} \lesssim \frac{(\cos \theta)^{1-1/4}}{(\cos \theta)^{1-2/4}} = (\cos \theta)^{1/4}.$$

Если  $|\alpha_3| < (\cos \theta)^{2/4}/2$ , то рассматриваем  $\kappa = 4$ , и тогда  $|\alpha_4| \geq (\cos \theta)^{1/4}/2$  и  $|(b_4, e_4)| \lesssim (\cos \theta)^{1/4}$ . Таким образом, найдем  $\kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$  для которого выполняется

$$|(b_\kappa, e_\kappa)| \lesssim (\cos \theta)^{1/4}.$$

Остается применить (5). Теорема 1 доказана.  $\square$

## 2 Оценки сверху погрешности аппроксимации производных функций

Теорема 1 позволяет переписать оценки (1) для  $d = 3, 4$  в виде

$$\|D_{\xi_1, \dots, \xi_s}^s (f - P_n^d)\| \lesssim_n M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos \gamma)^{sd}}, \quad s = 0, \dots, n.$$

Однако можно получить более точные оценки с использованием характеристики  $\gamma$ . Рассмотрим случай  $n = 1$ .

**Теорема 2.** При  $n = 1$ ,  $d = 3, 4$  для любого единичного вектора  $\xi \in \mathbb{R}^d$  имеет место оценка

$$\|D_\xi (f - P_n^d)\| \lesssim \frac{MH}{\sin \gamma}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $d = 4$  (тогда случай  $d = 3$  будет следствием доказанного результата). Возьмем векторы  $b_1, b_2, b_3, b_4$  и  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , введенные при доказательстве теоремы 1. Соответственно базису  $e_1, e_2, e_3, e_4$  введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3x_4$ , начало которой для определенности совместим с точкой  $a_1$ . Обозначим через  $\varphi_{i_1 \dots i_s}^j$  величины углов между вектором  $b_j$  и плоскостью размерности  $s$ , натянутой на векторы  $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$ . Из формулы (2) известно, что

$$\begin{cases} \sin \gamma \lesssim \sin \varphi_{123}^4 \lesssim \sin \varphi_{12}^4 \lesssim \sin \varphi_{12}^3 \lesssim \sin \varphi_1^3 \lesssim \sin \varphi_1^2 \asymp \sin \omega, \\ \sin \gamma \lesssim \sin \varphi_{123}^4 \lesssim \sin \varphi_{12}^4 \lesssim \sin \varphi_1^4 \lesssim \sin \varphi_1^2 \asymp \sin \omega. \end{cases} \quad (6)$$

Положим

$$\mathcal{R} = f - P_1^4[f] = f - P_1^4.$$

Рассмотрим вектор  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) и соответствующее ему ребро  $a_i a_j$  (т. е.  $\tau_{ij} \| b_k$ ). На отрезке  $a_i a_j$  мы имеем дело с одномерной интерполяцией функции  $f$  многочленом первой степени  $P_1^4$  в узлах  $a_i, a_j$ , поэтому можем утверждать, что

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(a_i)}{\partial b_k} \right| \lesssim MH.$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа на отрезке, соединяющем произвольную точку  $u \in \Delta$  и точку  $a_i$ , получаем оценки

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial b_k} \right| \lesssim MH, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial x_1} \right| \lesssim MH; \quad (7)$$

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial b_2} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^2 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \cos \varphi_2^2 \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^2 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \sin \varphi_1^2 \right| \lesssim MH,$$

откуда следует оценка

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial x_2} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \varphi_1^2} \lesssim \frac{MH}{\sin \gamma}. \quad (8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial b_3} \right| &= \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^3 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \cos \varphi_2^3 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_3} \cos \varphi_3^3 \right| = \\ &= \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^3 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \cos \varphi_2^3 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_3} \sin \varphi_{12}^3 \right| \lesssim MH. \end{aligned}$$

Так как  $\cos \varphi_2^3 \leq \sin \varphi_1^3 \lesssim \sin \varphi_1^2$  (см. (6)), то, принимая во внимание (7)–(8) и (6), получаем

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_3} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial x_3} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \varphi_{12}^3} \lesssim \frac{MH}{\sin \gamma}. \quad (9)$$

Наконец, рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial b_4} \right| &= \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \cos \varphi_2^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_3} \cos \varphi_3^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_4} \cos \varphi_4^4 \right| = \\ &= \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_1} \cos \varphi_1^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_2} \cos \varphi_2^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_3} \cos \varphi_3^4 + \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_4} \sin \varphi_{123}^4 \right| \lesssim MH. \end{aligned}$$

Так как  $\cos \varphi_2^4 \leq \sin \varphi_1^4 \lesssim \sin \varphi_1^2$  и  $\cos \varphi_3^4 \leq \sin \varphi_{12}^4 \lesssim \sin \varphi_{12}^3$  (см. (6)), то, учитывая (7)–(9) и (6), имеем

$$\left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial e_4} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial x_4} \right| \lesssim \frac{MH}{\sin \varphi_{123}^4} \lesssim \frac{MH}{\sin \gamma}. \quad (10)$$

Поскольку

$$|\nabla \mathcal{R}(u)| \geq \left| \frac{\partial \mathcal{R}(u)}{\partial \xi} \right|$$

для любой точки  $u \in \Delta$  и любого единичного вектора  $\xi$  (через  $\nabla$  обозначен градиент), то неравенства (7)–(10) завершают доказательство теоремы. Теорема 2 доказана.  $\square$

**Замечание.** Результат, аналогичный теореме 2 (замена  $\cos \theta$  на  $\sin \gamma$  в формуле (1)), справедлив для любых  $n \in \mathbb{N}$  при  $d = 3, 4$  (доказательство является несколько более сложным и выходит за рамки данной статьи).

## Список литературы

- [1] Jamet P. Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. V. 10, № 1. P. 43–60.
- [2] Rand A. Average interpolation under the maximum angle condition // SIAM J. Numer. Anal. 2012. V. 50, № 5. P. 2538–2559.
- [3] Байдакова Н.В. Алгоритм построения эрмитовых конечных элементов третьей степени // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 799–814.
- [4] Байдакова Н.В. Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Матем. тр. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74.

Наталья Васильевна Байдакова — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН;  
e-mail: baidakova@imtm.uran.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.