

О ЛОКАЛЬНОМ ПОИСКЕ В ЗАДАЧЕ С Д.С. ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. С. Стрекаловский, И. М. Минарченко

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск

УДК 519.853.4

Рассматривается невыпуклая задача оптимизации, в которой целевая функция и ограничения-неравенства заданы д.с. функциями. С помощью точного штрафа данная задача сводится к задаче без невыпуклых ограничений, целевая функция которой, в свою очередь, также является д.с. функцией. Для решения оштрафованной задачи предлагается специальный метод локального поиска, основанный на частичной линеаризации (по базовой невыпуклости) и представляющий собой последовательное решение линеаризованных выпуклых задач. Исследованы вопросы сходимости данного метода. В частности, показано, что предельная точка генерируемой методом последовательности является ККТ-решением исходной задачи в том случае, если она удовлетворяет соответствующим ограничениям-неравенствам. Проведено предварительное численное тестирование метода на тестовых задачах из открытых источников.

Ключевые слова: д.с. функция, невыпуклая оптимизация, точный штраф, локальный поиск.

Введение

В последние два десятилетия метод точного штрафа [1, 2] набирает популярность благодаря своей эффективности в решении сложных практических задач. Однако помимо проблемы выбора подходящего значения штрафного параметра существует другая сложность, вызванная невыпуклостью оштрафованной задачи в случае, если исходная задача также является невыпуклой. Как известно, классические методы оптимизации не гарантируют нахождение глобального решения в невыпуклых задачах. Более того, даже поиск стационарной точки (точки Каруша-Куна-Таккера) в невыпуклых задачах бывает затруднён [3, 4].

В рамках разрабатываемой Теории глобального поиска (см., например, [5]) предлагается специальный метод локального поиска для оштрафованной задачи, заключающийся в частичной линеаризации (по базовой невыпуклости) оштрафованной целевой функции. Метод представляет собой последовательное решение серии выпуклых задач оптимизации. В работе исследуется сходимость метода, а также связь между множителями Лагранжа исходной задачи с ограничениями-неравенствами и множителями Лагранжа линеаризованной задачи. Также представлены первые результаты численного тестирования разработанного метода.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача

$$(\mathcal{P}): \left. \begin{aligned} f_0(x) &= g_0(x) - h_0(x) \downarrow \min_x, & x &\in S, \\ f_i(x) &= g_i(x) - h_i(x) \leq 0, & i &\in I = \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где функции $g_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$, $i \in \{0\} \cup I$, выпуклы на \mathbb{R}^n и дифференцируемы на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом $f_i(\cdot)$, $i \in \{0\} \cup I$, являются д.с. функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Будем полагать, что $S \subset \mathbb{R}^n$ выпуклое множество, при этом выполнено соотношение

$$S \subset \text{int} [\text{dom } g_i] \cap \text{int} [\text{dom } h_i] \subset \Omega \quad \forall i \in I \cup \{0\},$$

где $\text{int } C$ и $\text{dom } \varphi$ обозначают внутренность множества C и область определения функции φ , $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\text{dom } \varphi = \{x \mid \varphi(x) < \infty\}$ соответственно [9]. Предполагается также, что допустимое множество $\mathcal{F} = \{x \in S \mid f_i(x) \leq 0, i \in I\}$ в задаче (\mathcal{P}) непусто, а оптимальное значение — конечно:

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \inf\{f_0, \mathcal{F}\} = \inf_x \{f_0(x) \mid x \in S, f_i(x) \leq 0, i \in I\} > -\infty.$$

2 Метод локального поиска

Введём в рассмотрение функцию штрафа вида

$$W(x) = \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$$

и рассмотрим, наряду с задачей (\mathcal{P}) , оштрафованную задачу без невыпуклых ограничений-неравенств:

$$(\mathcal{P}_\sigma): \quad \Theta_\sigma(x) = f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min, \quad x \in S,$$

для некоторого $\sigma \geq 0$. Соотношение задач (\mathcal{P}) и (\mathcal{P}_σ) связано с понятием точного штрафа [7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Известно, что если $z \in \text{Sol}(\mathcal{P}_\sigma)$ и $z \in \mathcal{F}$, то $z \in \text{Sol}(\mathcal{P})$. Иными словами, точная штрафная функция позволяет перейти от задачи с невыпуклыми ограничениями (\mathcal{P}) к задаче минимизации на выпуклом множестве (\mathcal{P}_σ) при некотором $\sigma \geq \sigma_* \geq 0$.

Покажем, что задача (\mathcal{P}_σ) является задачей д.с. минимизации, т.е. целевая функция $\Theta_\sigma(x)$ представима в виде разности двух выпуклых функций. Действительно, имеем:

$$\Theta_\sigma(x) = G_\sigma(x) - H_\sigma(x), \quad H_\sigma(x) = h_0(x) + \sigma \sum_{i \in I} h_i(x),$$

$$G_\sigma(x) = g_0(x) + \sigma \max \left\{ \sum_{j \in I} h_j(x); \max_{i \in I} \left[g_i(x) + \sum_{j \in I, j \neq i} h_j(x) \right] \right\}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что $H_\sigma(\cdot)$ и $G_\sigma(\cdot)$ — выпуклые функции. Тогда для поиска стационарной точки в задаче (\mathcal{P}_σ) может быть применён специальный метод локального поиска [19], основанный на частичной линейаризации целевой функции по базовой невыпуклости.

Пусть задано начальное приближение $x^0 \in S$ и текущая точка $x^k \in S$. Значение параметра штрафа $\sigma > 0$ фиксировано. Тогда следующее приближение $x^{k+1} \in S$ выбирается таким, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$G_\sigma(x^{k+1}) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x^{k+1} \rangle - \delta_k \leq \inf_x \{G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x \rangle \mid x \in S\}, \quad (3)$$

где $\delta_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ — точность решения следующей линейаризованной задачи:

$$(\mathcal{P}_\sigma L_k): \quad \Phi_{\sigma k}(x) = G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x \rangle \downarrow \min, \quad x \in S. \quad (4)$$

Задача $(\mathcal{P}_\sigma L_k)$ является выпуклой, а потому может быть решена соответствующими классическими методами оптимизации [7, 8, 10] и оптимизационными пакетами программ. Напомним, любая стационарная точка выпуклой задачи является в ней точкой глобального оптимума. Будем полагать, что последовательность $\{\delta_k\}$ удовлетворяет соотношениям вида

$$\delta_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty. \quad (5)$$

Положим, целевая функция $f_0(\cdot)$ задачи (\mathcal{P}) ограничена снизу на S , т.е.

$$(\mathcal{H}_0): \quad \inf_x \{f_0(x) \mid x \in S\} > -\infty. \quad (6)$$

Тогда, нетрудно видеть, целевая функция $\theta_\sigma(\cdot)$ задачи (\mathcal{P}_σ) удовлетворяет аналогичному условию: $\inf_x \{\theta_\sigma(x) \mid x \in S\} > -\infty$. Введём обозначение $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma L_k) = \inf_x \{\Phi_{\sigma k}(x) \mid x \in S\}$. Имеет место следующий результат о сходимости предлагаемого метода.

Предложение 1. Пусть (\mathcal{H}_0) –(6) выполнено. Тогда последовательность $\{x^k\} \subset S$, порождаемая методом (3), (5), удовлетворяет следующим условиям.

(А) Последовательности $\{\theta_{\sigma k}\}$ и $\{\Delta\Phi_{\sigma k}\}$, где $\theta_{\sigma k} = \theta_{\sigma}(x^k)$, $\Delta\Phi_{\sigma k} = \Phi_{\sigma k}(x^k) - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1}) \triangleq G_{\sigma}(x^k) - G_{\sigma}(x^{k+1}) - \langle \nabla H_{\sigma}(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle$, сходятся так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{\sigma k} = \theta_{\sigma*} \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}_{\sigma}) = \inf_x \{\theta_{\sigma}(x) \mid x \in S\}, \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\Phi_{\sigma k} = 0; \quad (8)$$

$$(Б): \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_x \{G_{\sigma}(x) - G_{\sigma}(x^{k+1}) + \langle \nabla H_{\sigma}(x^k), x^{k+1} - x \rangle \mid x \in S\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathcal{V}_k - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1})\} = 0. \quad (9)$$

Доказательство. (А) Из (3) имеем

$$\begin{aligned} -\delta_k &\leq \inf_x \{G_{\sigma}(x) - G_{\sigma}(x^{k+1}) + \langle \nabla H_{\sigma}(x^k), x^{k+1} - x \rangle \mid x \in S\} \leq \\ &\leq G_{\sigma}(x^k) - G_{\sigma}(x^{k+1}) + \langle \nabla H_{\sigma}(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

и, с учётом выпуклости $H_{\sigma}(\cdot)$, получаем

$$-\delta_k \leq G_{\sigma}(x^k) - G_{\sigma}(x^{k+1}) + H_{\sigma}(x^{k+1}) - H_{\sigma}(x^k) = \theta_{\sigma}(x^k) - \theta_{\sigma}(x^{k+1}). \quad (11)$$

В частности, имеем

$$\theta_{\sigma}(x^{k+1}) \leq \theta_{\sigma}(x^k) + \delta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Последнее означает, что последовательность $\{\theta_{\sigma k}\}$ почти монотонно убывающая [8, 20]. Следовательно, неравенство (12) с учётом (5) доказывает выполнение (7) [21]. Более того, из (10) и (11) следует

$$-\delta_k \leq \Delta\Phi_{\sigma k} = \Phi_{\sigma k}(x^k) - \Phi_{\sigma k}(x^{k+1}) \leq \theta_{\sigma}(x^k) - \theta_{\sigma}(x^{k+1}),$$

что влечёт (8) в силу (5) и (7).

(Б) Соотношение (9) может быть доказано путём перехода к пределу в (10)–(11) и с учётом (5) и (7). \square

Лемма 1. Пусть последовательность $\{x^k\}$, порождаемая методом (3), (5) сходится:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x_*.$$

Тогда последовательность $\{\mathcal{V}_k = \mathcal{V}(\mathcal{P}_{\sigma} L_k)\}$ сходится:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{V}_k = \mathcal{V}_*,$$

как и последовательность $\{\Phi_{\sigma k}(x^{k+1})\}$ значений целевых функций $\Phi_{\sigma k}(\cdot)$ задач $(\mathcal{P}_{\sigma} L_k)$ в точке x^{k+1} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{\sigma k}(x^{k+1}) \triangleq \Phi_{\sigma*}. \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть последовательность $\{x^k\}$, порождаемая методом (3), (5) сходится к $x_* \in S$. Тогда предельная точка x_* является решением следующей линейризованной задачи:

$$(\mathcal{P}_{\sigma} L_*): \quad \Phi_{\sigma*}(x) = G_{\sigma}(x) - \langle \nabla H_{\sigma}(x_*), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S. \quad (14)$$

Доказательство. Из (9), (12) и (13) нетрудно видеть (при $k \rightarrow \infty$), что

$$\mathcal{V}_* = \Phi_{\sigma*} \triangleq G_{\sigma}(x_*) - \langle \nabla H_{\sigma}(x_*), x_* \rangle \quad (15)$$

в силу непрерывности $G_{\sigma}(\cdot)$, $\nabla H_{\sigma}(\cdot)$ и скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Более того, с учётом неравенства

$$\mathcal{V}_k \leq \Phi_{\sigma k}(x) \triangleq G_{\sigma}(x) - \langle \nabla H_{\sigma}(x^k), x \rangle \quad \forall x \in S, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

мы получаем (при $k \rightarrow \infty$) соотношение

$$\mathcal{V}_* \leq \Phi_{\sigma*}(x) = G_{\sigma}(x) - \langle \nabla H_{\sigma}(x_*), x \rangle \quad \forall x \in S$$

которое вместе с (15) завершает доказательство. \square

Замечание 1. (Критерий останова). Из соотношений (10), (11) следует, что одно из неравенств

$$\theta_\sigma(x^k) - \theta_\sigma(x^{k+1}) \leq \frac{\tau}{2}, \quad (16)$$

$$\Phi_\sigma(x^k) - \Phi_\sigma(x^{k+1}) \triangleq G_\sigma(x^k) - G_\sigma(x^{k+1}) - \langle \nabla H_\sigma(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \leq \frac{\tau}{2} \quad (16')$$

может быть использовано в качестве критерия останова метода (3), (5).

3 Множители Лагранжа

Метод локального поиска (3), (5) заключается в последовательном решении линейаризованных задач вида $(\mathcal{P}_\sigma L_k)$. Целевая функция такой задачи не является дифференцируемой, однако может быть построена эквивалентная задача, лишенная данного недостатка.

Для простоты изложения положим $S = \mathbb{R}^n$. Предельная точка x_* последовательности $\{x^k\}$, порождаемой методом локального поиска, в силу теоремы 1 является решением линейаризованной задачи $(\mathcal{P}_\sigma L_*)$ -(14), где G_σ — негладкая функция (см. (2)). В свою очередь, задача $(\mathcal{P}_\sigma L_*)$ оказывается эквивалентной задаче

$$(\mathcal{P}_\sigma L_*(t)) : \left. \begin{aligned} & g_0(x) - \langle \nabla H_\sigma(x_*), x \rangle + \sigma t \downarrow \min_{(x,t)}, \\ & g_i(x) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} h_j(x) \leq t, \quad i \in I, \\ & \sum_{i \in I} h_i(x) \leq t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

в том смысле, что $x_* \in \text{Sol}(\mathcal{P}_\sigma L_*)$ тогда и только тогда, когда пара (x_*, t_*) является решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma L_*(t))$ -(17), где

$$t_* = \max \left\{ \sum_{j \in I} h_j(x_*); g_i(x_*) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} h_j(x_*), i \in I \right\}.$$

Отметим, что задача $(\mathcal{P}_\sigma L_*(t))$ выпукла. Кроме этого, для неё всегда выполнено условие Слейтера [6, 7, 21], следовательно, можно положить $\mu_0 = 1$ в функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, t; \mu)$ задачи $(\mathcal{P}_\sigma L_*(t))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t; \mu_1, \dots, \mu_m, \mu_{m+1}) &= g_0(x) + \sigma t - \langle \nabla h_0(x_*) + \sigma \sum_{i \in I} \nabla h_i(x_*), x \rangle + \\ &+ \sum_{i \in I} \mu_i \left[g_i(x) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} h_j(x) - t \right] + \mu_{m+1} \left(\sum_{i \in I} h_i(x) - t \right). \end{aligned}$$

Тогда система Каруша-Куна-Таккера для $(\mathcal{P}_\sigma L_*(t))$ примет вид: $\exists(\mu_1, \dots, \mu_m, \mu_{m+1}) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$,

$$\begin{aligned} \mu_i \left[g_i(x_*) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} h_j(x_*) - t_* \right] &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mu_{m+1} \left[\sum_{i \in I} h_i(x_*) - t_* \right] = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial t} &= \sigma - \sum_{i \in I} \mu_i - \mu_{m+1} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{i \in I} \mu_i + \mu_{m+1} = \sigma, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial x} &= \nabla g_0(x_*) - \nabla h_0(x_*) - \sigma \sum_{i \in I} \nabla h_i(x_*) + \\ &+ \sum_{i \in I} \mu_i \left[\nabla g_i(x_*) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I}} \nabla h_j(x_*) \right] + \mu_{m+1} \sum_{i \in I} \nabla h_i(x_*) = 0_n \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая $\nabla f_i(\cdot) = \nabla g_i(\cdot) - \nabla h_i(\cdot)$, $i \in I \cup \{0\}$ и (18), из (19) будем иметь:

$$0_n = \nabla f_0(x_*) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla f_i(x_*).$$

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial \mathcal{L}(x_*, \lambda)}{\partial x} = 0$ в ККТ-системе исходной задачи (\mathcal{P}) с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x)$ выполнено при

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что условия дополняющей нежёсткости для задачи (\mathcal{P}) :

$$\lambda_i f_i(x_*) = 0, \quad i \in I,$$

выполнены при λ_i , удовлетворяющих (20), если x_* допустима в (\mathcal{P}) . Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть предельная точка x_* последовательности $\{x^k\}$, порождённой методом (3), (5), допустима в задаче (\mathcal{P}) , т.е. $f_i(x_*) \leq 0$, $i \in I$. Тогда x_* является ККТ-точкой в исходной задаче (\mathcal{P}) с множителями Лагранжа λ_i , $i \in I$, равными соответствующим множителям Лагранжа μ_i , $i \in I$, вспомогательной задачи $(\mathcal{P}_{\sigma L_*}(t))$.

4 Численное тестирование

Тестирование производилось на задачах с невыпуклой квадратичной целевой функцией и невыпуклыми квадратичными ограничениями-неравенствами. В настоящей статье представлены результаты для двух задач. В каждой из них разложение функций на разность двух выпуклых осуществлялось на основе свойства диагонального доминирования следующим образом. Пусть $C = (c_{ij})$ — симметричная матрица. Определим матрицы $A_1 = (a_{ij}^{(1)})$, $A_2 = (a_{ij}^{(2)})$:

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} c_{ij}, & c_{ij} \geq 0, \\ 0, & c_{ij} < 0, \end{cases} \quad a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & c_{ij} \geq 0, \\ -c_{ij}, & c_{ij} < 0, \end{cases}$$

и диагональную матрицу $\Lambda_1 = (\lambda_{ii}^{(1)})$ для $\chi \geq 0$:

$$\lambda_{ii}^{(1)} = \begin{cases} 0, & a_{ii}^{(1)} > \gamma_i^{(1)}, \\ \gamma_i^{(1)} - a_{ii}^{(1)} + \chi, & a_{ii}^{(1)} \leq \gamma_i^{(1)}. \end{cases} \quad \gamma_i^{(1)} = \sum_{i \neq j} a_{ij}^{(1)}.$$

Также определим $B = (b_{ij})$ и диагональную матрицу $\Lambda_2 = (\lambda_{ii}^{(2)})$ как

$$B = A_2 + \Lambda_1, \quad \lambda_{ii}^{(2)} = \begin{cases} 0, & b_{ii} > \gamma_i^{(2)}, \\ \gamma_i^{(2)} - b_{ii} + \chi, & b_{ii} \leq \gamma_i^{(2)}. \end{cases} \quad \gamma_i^{(2)} = \sum_{i \neq j} b_{ij}.$$

Тогда $C = C_1 - C_2$, $C_1 = A_1 + \Lambda_1 + \Lambda_2 \succeq 0$, $C_2 = A_2 + \Lambda_1 + \Lambda_2 \succeq 0$.

Подбор параметра штрафа во время работы локального поиска производился следующим образом. Выбрать начальное значение $\sigma := \sigma_0 > 0$. Если для некоторой итерации k локального поиска выполняется критерий останова (16'), при этом дополнительный критерий, отвечающий за допустимость приближения,

$$W(x^{k+1}) < \rho \quad (21)$$

не выполнен, то параметр штрафа увеличить на фиксированную величину: $\sigma := \sigma + \Delta\sigma$, и продолжить итерации локального поиска в соответствии с (3). Таким образом, локальный поиск останавливается при одновременном соблюдении (16') и (21). Во всех случаях было установлено: $\sigma_0 = 0.5$, $\Delta\sigma = 0.5$, $\delta_k = \delta = 10^{-7}$, $k = 0, 1, \dots$, $\tau = 10^{-5}$, $\rho = 10^{-6}$, $\chi = 0$. Начальные приближения генерировались случайно, в том числе из недопустимой области.

Таблица 1: Результаты работы локального поиска в задаче **mistake**

x^0	$W(x^0)$	$W(z)$	$f_0(x^0)$	$f_0(z)$	$f_0(z) - f_*$	PL	$Time$	σ	$\sigma \uparrow$	$\ \bar{\mu}\ _1$
1	711.9189	0.0000	20.6545	-0.9992	0.0008	82	7.90	0.5	0	0.5
2	1715.7567	0.0000	14.0779	-1.0000	0.0000	18	1.99	0.5	0	0.5
3	810.2510	0.0000	-5.5734	-0.9322	0.0678	242	17.56	0.5	0	0.1
4	193.7901	0.0000	2.4729	-0.9996	0.0004	248	16.11	0.5	0	0.5
5	812.2301	0.0000	-43.3341	-0.9999	0.0001	41	4.96	0.5	0	0.0
6	215.7258	0.0000	-66.3796	-0.9996	0.0004	65	4.73	0.5	0	0.5
7	573.7562	0.0000	50.3123	-0.9996	0.0004	118	9.77	0.5	0	0.5
8	603.5587	0.0000	-40.8561	-0.9999	0.0001	30	3.57	0.5	0	0.0
9	682.6736	0.0000	-95.4730	-0.9996	0.0004	156	12.86	0.5	0	0.0
10	428.2287	0.0000	28.2430	-1.0000	0.0000	25	2.69	0.5	0	0.5
						103	8.21			

Пример 1. Задача **mistake** из библиотеки COCONUT [22]

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= -0.5(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 + x_5x_8 - x_6x_7) \downarrow \min_x, \quad x \in S, \\
f_1(x) &= x_7^2 + x_8x_9 \leq 1, \quad f_2(x) = x_2x_3 - x_1x_4 \leq 0, \\
f_3(x) &= -x_8x_9 \leq 0, \quad f_4(x) = -x_5x_9 \leq 0, \quad f_5(x) = x_6x_7 - x_5x_8 \leq 0, \\
S &= \{x \in \mathbb{R}^9 \mid x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \quad x_5^2 + x_6^2 \leq 1, \quad x_9^2 \leq 1, \\
&\quad x_1^2 + (x_2 - x_9)^2 \leq 1, \quad (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 \leq 1, \\
&\quad (x_1 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 \leq 1, \quad (x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 \leq 1, \\
&\quad (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 \leq 1, \quad x_9 \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Наилучшее известное решение $x_* = (0.7575, 0.7958, 0.3433, 0.8463, 0.9961, 0.888, 0.6688, 1.7918, 0.1429)$, $f_* = f_0(x_*) = -1$. Результаты расчётов представлены в табл. 1. Здесь z обозначает точку, полученную в результате работы метода, PL — количество решённых линейаризованных задач (количество итераций метода), $Time$ — время счёта в секундах, σ — параметр штрафа, полученный в конце работы метода, $\sigma \uparrow$ — количество увеличений штрафного параметра на $\Delta\sigma$, $\bar{\mu}$ — вектор множителей Лагранжа в точке z , соответствующих невыпуклым ограничениям, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^m$. Остальные обозначения соответствуют обозначениям в статье. Одна строка таблицы соответствует запуску метода из одной начальной точки. В последней строке содержатся средние величины для соответствующих столбцов.

Пример 2. Задача **hs108** из библиотеки COCONUT [22]

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= -0.5(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 + x_5x_8 - x_6x_7) \downarrow \min_x, \quad x \in S, \\
f_1(x) &= x_2x_3 - x_1x_4 \leq 0, \quad f_2(x) = -x_3x_9 \leq 0, \\
f_3(x) &= x_5x_9 \leq 0, \quad f_4(x) = x_6x_7 - x_5x_8 \leq 0, \\
S &= \{x \in \mathbb{R}^9 \mid x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \quad x_5^2 + x_6^2 \leq 1, \quad x_9^2 \leq 1, \\
&\quad x_1^2 + (x_2 - x_9)^2 \leq 1, \quad (x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_6)^2 \leq 1, \\
&\quad (x_1 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 \leq 1, \quad (x_3 - x_7)^2 + (x_4 - x_8)^2 \leq 1, \\
&\quad (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_6)^2 \leq 1, \quad x_7^2 + (x_8 - x_9)^2 \leq 1, \quad x_9 \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Наилучшее известное решение $x_* = (0.9238, 0.3828, 0.1304, 0.9915, 0.9238, 0.3828, 0.1304, 0.9915, 0)$, $f_* = f_0(x_*) = -0.866025$. Результаты расчётов представлены в табл. 2.

5 Заключение

В работе рассмотрена невыпуклая задача оптимизации с целевой функцией и ограничениями-неравенствами, заданными д.с. функциями. С помощью точного штрафа задача сведена к вспомогательной задаче без огра-

Таблица 2: Результаты работы локального поиска в задаче **hs108**

x^0	$W(x^0)$	$W(z)$	$f_0(x^0)$	$f_0(z)$	$f_0(z) - f_*$	PL	$Time$	σ	$\sigma \uparrow$	$\ \bar{\mu}\ _1$
1	763.7086	0.0000	20.6545	-0.8660	0.0000	26	4.63	0.5	0	0.5
2	602.1930	0.0000	14.0779	-0.8660	0.0000	48	4.67	0.5	0	0.0
3	863.9341	0.0000	-5.5734	-0.8660	0.0000	61	5.92	0.5	0	0.5
4	144.1759	0.0000	2.4729	-0.8660	0.0001	70	5.65	0.5	0	0.5
5	812.2301	0.0000	-43.3341	-0.8660	0.0000	23	2.08	0.5	0	0.0
6	28.6549	0.0000	-66.3796	-0.8660	0.0000	18	1.38	0.5	0	0.5
7	573.7562	0.0000	50.3123	-0.4999	0.3661	35	4.18	0.5	0	0.0
8	48.1934	0.0000	-40.8561	-0.6748	0.1913	129	12.61	0.5	0	0.0
9	0.0000	0.0000	-95.4730	-0.8660	0.0000	51	5.12	0.5	0	0.5
10	377.9148	0.0000	28.2430	-0.8660	0.0000	30	2.78	0.5	0	0.0
						49	4.90			

ничений. Показано, что целевая функция вспомогательной задачи также является d.c. функцией. Для решения вспомогательной (оштрафованной) задачи предложен метод локального поиска, основанный на последовательном решении частично линейаризованных оштрафованных задач. Доказано, что предельная точка метода является ККТ-точкой в исходной задаче с ограничениями-неравенствами и, кроме того, является решением линейаризованной задачи, линейаризованной в этой же точке. Проведён численный эксперимент с фиксированным штрафным параметром, обеспечивающим допустимость в исходной задаче полученного решения линейаризованной задачи. Результаты вычислительного эксперимента демонстрируют сравнительную эффективность разработанного метода локального поиска.

Список литературы

- [1] Ерёмин И. И. Метод штрафов в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
- [2] Zangwill W. Non-linear Programming via Penalty Functions // Management Science. 1967. V. 13. P. 344–358.
- [3] Byrd R., Marazzi M., Nocedal J. On the Convergence of Newton Iterations to Non-Stationary Points // Mathematical Programming, Ser. A. 2004. V. 99. Iss. 1. P. 127–148.
- [4] Mascarenhas W. On the Divergence of Line Search Methods // Comput. Appl. Math. 2007. V. 26. Iss. 1. P. 129–169.
- [5] Strekalovsky A. On Solving Optimization Problems with Hidden Nonconvex Structures. In: Rassias T., Floudas C., Butenko S. (Eds.) Optimization in Science and Engineering. New York: Springer, 2014. P. 465–502.
- [6] Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. New York: Springer, 2006.
- [7] Bonnans J.-F., Gilbert J., Lemarechal C., Sagastizabal C. Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [8] Izmailov A., Solodov M. Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems. New York: Springer, 2014.
- [9] Hiriart-Urruty J.-B., Lemarechal C. Convex Analysis and Minimization Algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [10] Tuy H. Convex Analysis and Global Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [11] Horst R., Tuy H. Global Optimization: Deterministic Approaches. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [12] Burke J. An Exact Penalization Viewpoint of Constrained Optimization // SIAM Journal on Control and Optimization. 1991. V. 29. Iss. 4. P. 968–998.

- [13] Byrd R., Nocedal J., Waltz R. Steering Exact Penalty Methods for Nonlinear Programming // Optimization Methods & Software. 2008. V. 23. Iss. 2. P. 197–213.
- [14] Kruger A. Nonlinear Metric Subregularity // J. Optim. Theory Appl. 2016. V. 171. Iss. 3. P. 820–855.
- [15] Kruger A. Error Bounds and Metric Subregularity // Optimization. 2015. V. 64. Iss. 1. P. 49–79.
- [16] Kruger A., Minchenko L., Outrata J. On Relaxing the Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification // Positivity. 2014. V. 18. Iss. 1. P. 171–189.
- [17] Di Pillo G., Grippo L. Exact Penalty Functions in Constrained Optimization // SIAM J. Control Optim. 1989. V. 27. P. 1333–1360.
- [18] Han S., Mangasarian O. Exact Penalty Functions in Nonlinear Programming // Math. Prog. 1979. V. 17. Iss. 3. P. 251–269.
- [19] Strekalovsky A. On Local Search in D.C. Optimization Problems // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 255. P. 73–83.
- [20] Strekalovsky A., Orlov A., Malyshev A. On Computational Search for Optimistic Solutions in Bilevel Problems // Journal of Global Optimization. 2010. V. 48. Iss. 1. P. 159–172.
- [21] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002.
- [22] The COCONUT Benchmark. <http://www.mat.univie.ac.at/neum/glopt/coconut/Benchmark/Benchmark.html>. Дата обращения: 2017-02-28.

*Александр Сергеевич Стрекаловский — д.ф.-м.н., проф., зав. лабораторией Института
динамики систем и теории управления СО РАН;
e-mail: strekal@icc.ru;*

*Илья Михайлович Минарченко — программист Института динамики систем
и теории управления СО РАН;
e-mail: eq.progr@gmail.com.*

Дата поступления — 1 июня 2017 г.