

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

А. В. Зеленский, И. М. Ступаков

*Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск*

УДК 519.6

В работе рассмотрена возможность моделирования сверхпроводящего состояния вещества в предположении полного отсутствия электрического сопротивления. Сформулирована постановка макроскопической модели, предусматривающей наличие в области сверхпроводников и внешних источников тока. Предложенная модель учитывает сверхпроводимость при температуре и интенсивности магнитного поля не превышающих критические. На примере решения тестовой задачи было проведено сравнение данных, полученных применением данной модели, с другой, приближенной, моделью.

**Ключевые слова:** сверхпроводники, МКЭ.

## Введение

Математическое моделирование играет важную роль в современной физике. Появление новых технологий и новых материалов требует развития математических моделей. Одним из видов таких материалов являются сверхпроводники. Однако, точных моделей поведения сверхпроводников в магнитном поле, допускающих макроскопическое численное моделирование, в настоящее время не существует. В данной статье будет рассмотрена модель, рассматривающая сверхпроводник как обычный проводник, обладающий бесконечной проводимостью. Это предположение не противоречит современному представлению о свойствах данных материалов [1] и может быть легко применено для моделирования сложных устройств, содержащих в конструкции сверхпроводники. Сверхпроводник в предлагаемой в статье модели представлен как множество проводников со сторонним током. Плотность стороннего тока в этих проводниках подбирается исходя из предположения, что вихревые токи внутри сверхпроводящего материала не затухают и не дают магнитному полю проникать внутрь. Такое представление сверхпроводника позволит учитывать ситуации частичного отключения эффекта сверхпроводимости на некоторых участках, что позволит более точно описывать поведение сверхпроводящего материала в сильных магнитных полях.

## 1 Математическая модель

Рассмотрим сверхпроводник как проводник, обладающий бесконечной проводимостью. В данной статье не будет учитываться влияние критических токов на отключение сверхпроводимости. Система уравнений Максвелла при отсутствии токов смещения имеет вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Введение векторного потенциала  $\mathbf{A}$  следующим образом [2]:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5)$$

позволяет свести решение системы уравнений Максвелла к решению следующего уравнения:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (6)$$

Из уравнения (1) следует, что при бесконечной проводимости напряженность электрического поля в сверхпроводнике должна быть бесконечно мала, то есть:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Таким образом, подобрав токи внутри сверхпроводящего объема, сводящие к нулю производную векторного потенциала по времени в этом объеме, можно обеспечить выполнение уравнения (7).

### 1.1 Дискретная модель

Пусть объем сверхпроводника разбит на  $N$  непересекающихся подобластей, в каждой из которых протекает ток с постоянной плотностью  $j_i$ , и выбрано  $K$  точек ( $\mathbf{x}_k$ ) внутри сверхпроводника. Для моделирования процесса во времени разобьем временной интервал на  $M$  временных слоев. Тогда для выполнения условия (7) на  $m$ -ом временном слое необходимо минимизировать функционал  $\mathfrak{F}_m$ , который в случае, когда магнитная проницаемость не зависит от магнитного поля имеет вид:

$$\mathfrak{F}_m = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{A} [j_i(t_m)] (\mathbf{x}_k) + \mathbf{A}_m (\mathbf{x}_k) \right)^2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{A} [j_i(t_m)] (\mathbf{x}_k)$  — значение векторного потенциала только тривиального  $i$ -того элементарного проводника с током  $j_i(t_m)$  (в точке  $\mathbf{x}_k$ ) на временном слое с номером  $m$ ,  $\mathbf{A}^m (\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}_m^{EX} (\mathbf{x}_k) - \mathbf{A}_{m-1}^T (\mathbf{x}_k)$ ,  $\mathbf{A}_m^{EX} (\mathbf{x}_k)$  — значение векторного потенциала, образованного источниками тока вне сверхпроводящего объема на  $m$ -ом временном слое,  $\mathbf{A}_{m-1}^T (\mathbf{x}_k)$  — значение суммарного векторного потенциала на  $m-1$ -ом временном слое, образованного как источниками вне сверхпроводящего объема, так и элементарными проводниками. В начальный момент времени источник считается выключенным, и токи внутри сверхпроводника отсутствуют.

Далее будем считать, что магнитная проницаемость всех источников не зависит от магнитного поля, и функционал — квадратичен относительно  $j_i$ . Минимизация функционала на каждом временном слое может быть произведена методом наименьших квадратов в результате применения которого будет получена система линейных уравнений:

$$\mathbf{M}\mathbf{q} = \mathbf{b}, \quad (9)$$

где  $M_{i,k}$  — величина векторного потенциала в точке  $\mathbf{x}_k$  образуемого током с единичной плотностью в подобласти  $\Omega_k$ ,  $b_i$  — величина изменения векторного потенциала в точке  $\mathbf{x}_i$  при условии, что токи внутри сверхпроводника не изменились,  $\mathbf{q}$  — вектор значений плотности тока доставляющий минимум функционалу (8).

Для того, чтобы вычислить вклад в значение векторного потенциала от  $i$ -того тривиального проводника с током в точке  $\mathbf{x}_k$  можно воспользоваться решением прямой задачи магнитостатики, считая все проводники кроме  $i$ -того отключенными. В рассматриваемом случае расчетная область не содержит проводников с ненулевой проводимостью, кроме обмотки источника и сверхпроводника, следовательно, задачу по нахождению векторного потенциала можно решить с помощью закона Био-Савара:

$$\mathbf{A} [j_i] (\mathbf{x}_k) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j_i dV}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}|} \quad (10)$$

Таким образом, элементы матрицы  $M$  и вектора  $b$  могут быть вычислены с помощью (11) и (12) соответственно.

$$M_{i,k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_k} \frac{dV}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}, \quad (11)$$

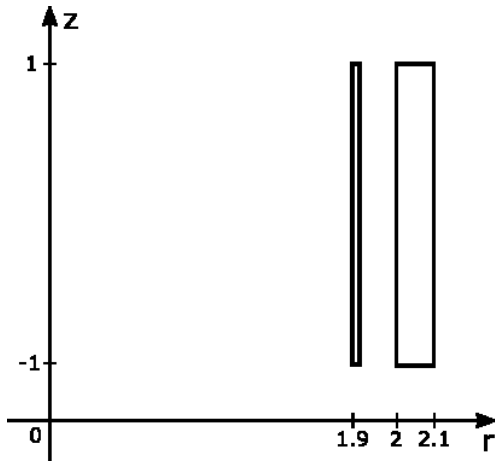


Рис. 1: Схема расчетной области, содержащей сверхпроводник и источник тока в осесимметричной постановке

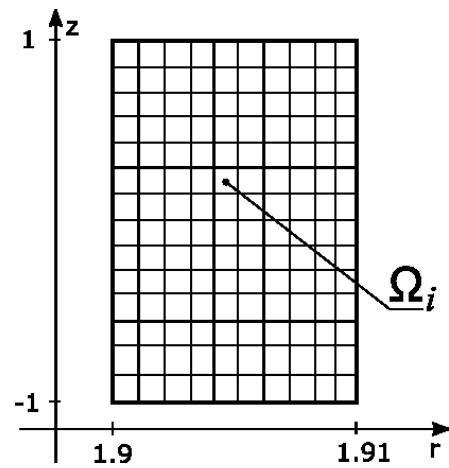


Рис. 2: Пример разбиения области сверхпроводника на подобласти с постоянной плотностью тока

$$b_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{(j_{ext} - j_{m-1}) dV}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|}, \quad (12)$$

где  $j_{ext}$  — плотность всех токов вне сверхпроводника,  $j_{m-1}$  — плотность всех токов на предыдущем временном слое.

## 1.2 Осесимметричная постановка

Рассмотрим модельную задачу с заданным разбиением области сверхпроводника. Пусть расчетная область представляет собой бесконечный воздушный объем с круглой обмоткой с прямоугольным сечением и круглым сверхпроводником с прямоугольным сечением, соосным с обмоткой. В таком случае имеет место осевая симметрия, следовательно, траектории токов внутри сверхпроводника тоже должны обладать осевой симметрией. Геометрия сечения расчетной области представлена на рис. 1. Ток в источнике ориентирован перпендикулярно осевому сечению обмотки, следовательно, магнитное поле, образуемое источником, лежит в плоскостях осевого сечения обмотки. Так как образуемое при этом поле векторного потенциала имеет только одну ненулевую компоненту в цилиндрических координатах ( $A_\phi$ ), токи, необходимые для того чтобы скомпенсировать его, тоже должны иметь только одну ненулевую компоненту. Таким образом, область сверхпроводника может быть разбита на  $N$  подобластей круглой формы с прямоугольным сечением ( $\Omega_i$ ), как показано на рис. 2. Такое разбиение образует сетку задачи, шаг сетки определяется размером сечения подобласти.

Для ускорения вычислений интегралов (11) и (12) по сверхпроводящим под областям  $\Omega_i$  используем полуаналитический метод предложенный в [3].

Для рассматриваемой задачи достаточно сделать всего один шаг во времени, так как расчетная область не содержит материалов с ненулевой проводимостью, кроме сверхпроводника.

Рассматриваемая задача полностью эквивалентна решению задачи с уравнением (6) с однородным краевым условием первого рода на поверхности сверхпроводника, однако, знание поля токов внутри сверхпроводника дает возможность моделирования частичного отключения сверхпроводимости.

## 1.3 Проверка корректности решения на модельной задаче

Для проверки адекватности результатов, полученных применением описанного выше метода будет использована приближенная модель, в которой сверхпроводник будет рассмотрен как проводник с достаточно большой проводимостью, такая задача может быть решена методом конечных элементов с разностной аппроксимацией по времени, для уравнения (6). В качестве результата будет рассматриваться поле магнитной индукции.

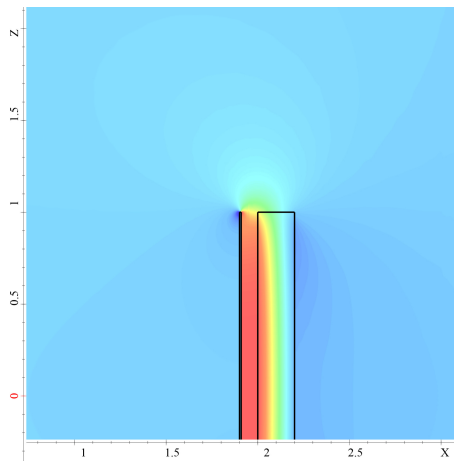


Рис. 3: Решение нестационарной задачи

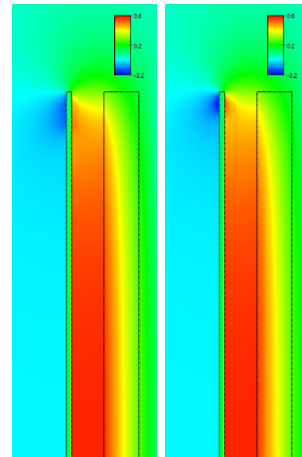


Рис. 4: Решение задачи подбора токов (слева — на грубой сетке, справа — на измельченной)

Расчетная область задачи представлена на рис. 2. До момента времени  $t = 0$  источник с током выключен и внешнее поле отсутствует, на протяжении  $t_e$  ток в источнике линейно возрастает. Вихревые токи, возникающие в сверхпроводящей подобласти на протяжении времени  $t_e$ , и образованная ими и источником индукция магнитного поля будут считаться решением. Следует отметить, что так как описанная модель является грубой аппроксимацией, критерием оценки точности решения может быть только относительное значение плотности вихревых токов и индукции магнитного поля.

Тестирование данной постановки будет производиться на описанной в разделе (1.2) модельной задаче. Решение, с которым будет проводиться сравнение, получено с помощью программного комплекса Telma. Реализация описанной в статье модели была встроена в программный комплекс Quasar. На рис. 3 и рис. 4 представлено поле Z-компоненты вектора магнитной индукции вблизи сверхпроводника. Решение на рис. 3 получено при решении нестационарной задачи с уравнением (1) с проводимостью  $10^{10} \text{ Ом}^{-1}$ . При этом, для получения достаточно точных результатов необходима мелкая сетка, что значительно увеличивает время решения. На рис. 4 изображено решение задачи в описанной ранее постановке с разным размером подобластей  $\Omega_i$ . На рис. 4 видно, что с измельчением сетки, решение меняется существенно только вблизи сверхпроводника.

На рис. 5 и рис. 6 приведены результаты моделирования вдоль линии, параллельной оси симметрии, на расстоянии 0.4м от внутренней поверхности сверхпроводящего материала. Как видно из графиков, предложенная модель соответствует приближенной. Расхождения в значениях незначительны и обусловлены выбором конечноэлементной сетки как по пространству, так и по времени при решении задачи с помощью приближенной модели.

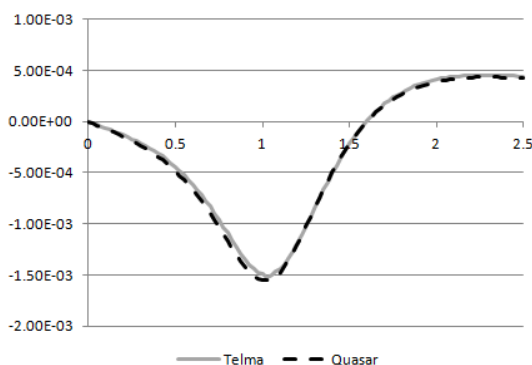


Рис. 5: X-компонента вектора магнитной индукции в тестовых точках

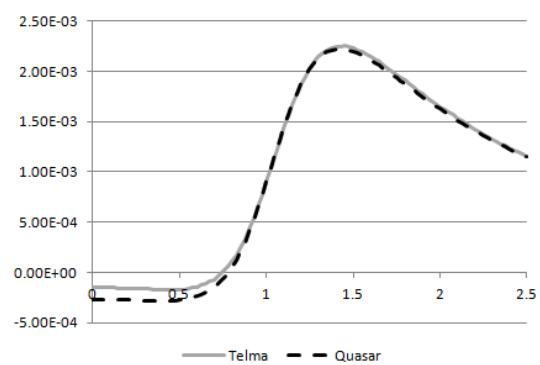


Рис. 6: Z-компонента вектора магнитной индукции в тестовых точках

## Заключение

Рассмотренная в данной статье модель достаточно точно описывает поведение сверхпроводящих материалов, как тел с бесконечной проводимостью, в магнитном поле. Вычисление векторного потенциала для данной модели с помощью интеграла Био-Савара может быть заменено на другие методы в том числе метод конечных и метод граничных элементов, что позволяет вносить в расчетную область ферромагнитные материалы. Также, с использованием данной модели предполагается решение задач, в которых имеет место частичное отключение эффекта сверхпроводимости в некоторых участках сверхпроводящего материала.

## Список литературы

- [1] Гинзбург В. Л., Андрюшин Е. А. Сверхпроводимость. — 2-е издание, переработанное и дополненное. — Альфа-М, 2006. — 112с.
- [2] Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. — М.: Энергия, 1970. — 376с.
- [3] Stupakov I. M., Royak M. E., Kondratyeva N. S. The method for calculating magnetic field induced by current coils — 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), 2016

*Арсений Валерьевич Зеленский — аспирант каф. прикладной математики;  
Новосибирский государственный технический университет;  
e-mail: virus1001010@gmail.com;*

*Илья Михайлович Ступаков — к.т.н., доц. каф. прикладной математики;  
Новосибирский государственный технический университет;  
e-mail: istupakov@gmail.com.*

*Дата поступления — 31 мая 2017 г.*