

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

В. А. Рукавишников, А. С. Рябоконь, Е. И. Рукавишникова

*Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Хабаровск*

УДК 519.6

Для решения задачи Дирихле с вырождением на всей границе двумерной области построен метод конечных элементов со специальным сгущением сеток и проведен сравнительный численный анализ предложенного метода с классическим методом конечных элементов на квазиравномерных сетках. Получено экспериментальное подтверждение теоретических оценок точности, сделаны выводы.

**Ключевые слова:** краевые задачи с вырождением на всей границе области, метод конечных элементов, сетка со сгущением.

## Введение

Методы конечных элементов и конечных разностей на квазиравномерных сетках для краевых задач с вырождением на границе области имеют недостаточную скорость сходимости приближенного решения к точному, что обусловлено наличием сингулярности. Обычно, для задач с сильной сингулярностью, когда нельзя определить обобщенное решение, и оно не принадлежит пространству Соболева  $H^1$ , определяют  $R$ -обобщенное решение (см., напр., [1, 2, 3, 4, 5]) и используют весовой метод конечных элементов [6, 7, 8, 9]. Главной особенностью этого метода является скорость сходимости  $O(h)$  не зависимо от размеров или величины сингулярности. Основная сложность реализации данного метода состоит в подборе оптимальных параметров, при которых скорость сходимости приближенного решения к точному близка к теоретической.

Здесь рассмотрена задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением решения на всей границе двумерной области. Для данной задачи построена схема метода конечных элементов на сетках со сгущением к границе области, которая задается параметрами, зависящими от построенного подпространства [10]. Проводится сравнительный численный анализ классического МКЭ и метода со сгущением сеток.

## 1 Постановка задачи

Через  $R^2$  обозначим двумерное евклидово пространство;  $x = (x_1, x_2)$  — произвольная точка в нем,  $dx = dx_1 dx_2$ . Пусть  $\Omega \subset R^2$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  такой, что можно определить функцию  $\rho(x)$ , положительную, дважды непрерывно дифференцируемую в  $\Omega$  и в некоторой приграничной полосе совпадающую с расстоянием до границы.

Далее положим, что  $s \in \{1; 2\}$ ,  $\gamma$  — действительное число, удовлетворяющее условию  $\frac{1}{2} - s < \gamma < \frac{1}{2}$ . Через  $W_{2,\gamma}^s(\Omega)$  обозначим весовое пространство Соболева функций  $f$ , заданных на  $\Omega$ , с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{2,\gamma}^s(\Omega)} = \|f\|_{L_2(\Omega)} + |f|_{W_{2,\gamma}^s(\Omega)},$$

$$\text{где } \|f\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2}, \quad |f|_{W_{2,\gamma}^s(\Omega)} = \sum_{\substack{r_1, r_2=0 \\ |r|=s}}^s \left\| \rho^{-\gamma} \frac{\partial^{|r|} f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} \right\|_{L_2(\Omega)}, \quad r = (r_1, r_2) \text{ и } |r| = r_1 + r_2, \quad r_1, r_2 —$$

целые неотрицательные числа.

Определим пространство функций  $f$

$$\overset{\circ}{W}_{2,\gamma}^s(\Omega) = \{f : f \in W_{2,\gamma}^s(\Omega), \quad f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

и пространство  $L_{2,-1-\gamma}$  функций  $F(x)$ ,  $x \in \Omega$ , с конечной нормой

$$\|F\|_{L_{2,-1-\gamma}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\rho^{1+\gamma} F|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В области  $\Omega$  рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a_{kk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a(x)u = F(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

с краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega \in C^{(2)}. \quad (2)$$

Правая часть уравнения (1) удовлетворяет включению

$$F \in L_{2,-1-\alpha}(\Omega), \quad (3)$$

т.е.  $\rho^{1+\alpha} F \in L_2(\Omega)$ ,  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ .

Коэффициенты уравнения  $a_{kk}(x)$  ( $k = 1, 2$ ) — дифференцируемые на  $\Omega$  функции, удовлетворяют неравенствам

$$|a_{kk}(x)| \leq C_1 \rho^{-2\alpha}(x), \quad \left| \frac{\partial a_{kk}(x)}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial a_{kk}(x)}{\partial x_2} \right| \leq C_2 \rho^{-2\alpha-1}(x), \quad (4)$$

функция  $a(x)$  — положительная и подчинена неравенству

$$a(x) \leq C_3 \rho^{-2\alpha-2}(x). \quad (5)$$

Предполагается выполненным условие ультраэллиптичности

$$\sum_{k=1}^2 a_{kk}(x) \zeta_k^2 \geq C_4 \rho^{-2\alpha}(x) \sum_{k=1}^2 \zeta_k^2, \quad x \in \Omega, \quad C_4 > 0, \quad (6)$$

$\zeta_1, \zeta_2$  — любые действительные параметры,  $C_1 - C_4$  — константы, не зависящие от  $x$ .

Обозначим через

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^2 a_{kk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + a(x)uv \right) dx, \quad (F, v) = \int_{\Omega} Fv dx$$

соответственно билинейную и линейную формы.

Наряду с задачей (1), (2) сформулируем следующую вариационную задачу: найти функцию  $u \in \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ , для которой равенство

$$E(u, v) = (F, v) \quad (7)$$

имеет место для всех  $v \in \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ .

Функцию  $u \in \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ , обладающую свойством (7), назовем обобщенным решением уравнения (1) в пространстве  $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ .

В [11, 12] при сделанных предположениях (3) — (6) доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1), (2) в пространстве  $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha-1}^2(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega)$ . В случае, если функция  $F$  принадлежит  $L_{2,-1-\alpha+\lambda}(\Omega) \subset L_{2,-1-\alpha}(\Omega)$ , обобщенное решение  $u$ , как следует из [10], принадлежит более узкому пространству  $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha+\lambda-1}^2(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_{2,\alpha-1}^2(\Omega)$  при дополнительном условии на параметр  $\lambda$ .

## 2 Схема метода конечных элементов. Численный эксперимент

Схема метода конечных элементов для задачи (1), (2) на произвольной выпуклой области была описана в [13], а автоматизированное построение сеток со сгущением к границе предложено в [14]. Здесь для данной задачи строится схема МКЭ на сетках со сгущением к границе области  $\Omega$ , представляющей собой круг единичного радиуса с центром в точке  $(2; 2)$ , при этом коэффициенты и правая часть уравнения (1) задаются следующим образом:  $a_{11}(x) = a_{22}(x) = \rho^{-2\alpha}(x)$ ,  $a(x) = 1$ ,

$$F(x) = -4(1 + \beta - l) ((\beta - 2\alpha - l)\rho^{\beta-2\alpha-l-1}(x)(1 - \rho(x)) - \rho^{\beta-2\alpha-l}(x)) + \rho^{1+\beta-l}(x),$$

где  $\rho(x) = 1 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2$ ,  $\alpha \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ,  $\beta \in (\alpha; \frac{1}{2})$ ,  $l < \frac{1}{2}$ . Точное решение задачи — функция  $u(x) = \rho^{1+\beta-l}(x)$ .

Произведем триангуляцию  $T_h$  данной области  $\Omega$ . Разделим область  $\Omega$  на подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , где  $\Omega_1$  — приграничная полоса ширины  $b$ , в которой осуществим сгущение треугольных элементов к границе  $\partial\Omega$ . Зададим степень сжатия сетки  $r = 1/\lambda$  ( $\lambda = \beta - \alpha$ ),  $n$  — число линий уровня  $\Gamma_j = b(\frac{j}{n})^r$  и шаг  $h_j$  на каждом слое  $Q_j$ , ограниченном кривыми  $\Gamma_{j-1}$  и  $\Gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ . В области  $\Omega_2$  построим квазиравномерную сетку с шагом, равным  $h_n$ .

Каждому узлу  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, N_h$ , где  $N_h$  — число внутренних узлов произведенной триангуляции  $T_h$ , поставим в соответствие функцию  $\phi_i(x)$ , равную единице в точке  $P_i$ , а в остальных узлах — нулю и линейную на каждом треугольнике из  $T_h$ . Множество  $V^h$  определим как линейную оболочку, натянутую на систему базисных функций  $\{\phi_i\}_{i=0}^{N_h}$ .

Построенному конечномерному пространству  $V^h \subset W_{2,\alpha}^1(\Omega)$  сопоставим следующую дискретную задачу: найти функцию  $u_h(x)$  из  $V^h$ , удовлетворяющую равенству  $E(u_h, v_h) = (F, v_h)$  для любой функции  $v_h(x)$  из  $V^h$ .

Приближенное решение будем искать в виде  $u_h(x) = \sum_{i=0}^{N_h} u(P_i)\phi_i(x)$ .

Для проведенной триангуляции  $T_h$  области  $\Omega$  с параметром сжатия  $r = 1/\lambda$  имеют место следующие оценки сходимости:

$$\|u - u_h\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)} \leq C_5 h \|F \rho^{1+\alpha-\lambda}\|_{L_2(\Omega)};$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6 h^2 \|F \rho^{1+\alpha-\lambda}\|_{L_2(\Omega)},$$

где  $h$  — наибольшая из длин сторон треугольников в  $T_h$ .

Для набора модельных задач была проведена серия численных экспериментов, подтверждающая справедливость данных оценок. Все вычисления и анализ результатов проводились с помощью комплекса программ, разработанного на основе МКЭ, описанного выше. Для компактного размещения в памяти глобальной матрицы жесткости использован формат CSR (Compressed Sparse Row). Решение системы линейных алгебраических уравнений получено с помощью решателя PARDISO (Parallel Direct Solver) из пакета IntelMKL. Расчеты проводились на вычислительном кластере ВЦ ДВО РАН.

Зададим параметры, с помощью которых определяются коэффициенты, правые части уравнения (1) двух модельных задач, их точные решения и степень сжатия сетки  $r$  (см. табл. 1).

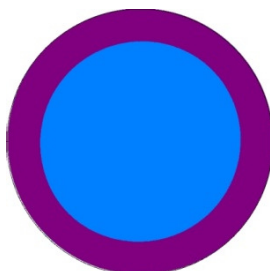





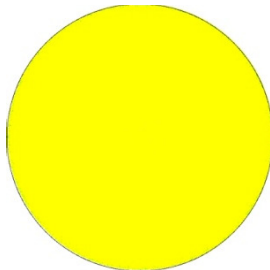





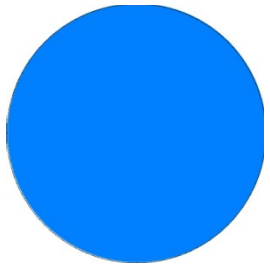





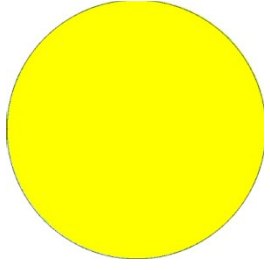





Таблица 1:

	$\alpha$	$\beta$	$l$	Показатель степени точного решения	$r$
Модельная задача 1	-0.1	0.38	0.49	0.89	2.08(3)
Модельная задача 2	-0.4805	-0.011	0.499	0.49	2.13

В табл. 2 приведено число узлов, их процентное отношение к общему числу узлов сетки  $N$ , в которых абсолютное значение погрешности не меньше заданных предельных величин. Также здесь представлены рисунки распределения абсолютной погрешности в узлах для обобщенного решения на квазиравномерной сетке ( $R_q$ ) и на сетке со сгущением к границе области ( $R_c$ ). Данные для обобщенного решения на  $R_c$  приведены при  $N$ , совпадающим с числом узлов сетки  $R_q$ .

Введем для норм разности точного и приближенного решения обозначения:  $\|e\|_{L_2(\Omega)} = \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)}$ ,  $\|e\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)} = \|u - u_h\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$  В табл. 3 представлены значения норм  $\|e\|_{L_2(\Omega)}$ ,  $\|e\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$  для первой задачи

Таблица 2:

				Распределение абсолютной погрешности	Предельное значение	Проценты	Число узлов	
Модельная задача 1	Обобщенное решение на квазиравномерной сетке	$N$	5427739		 $\geq 7e-5$	46.48%	2522647	
					 $\geq 5e-5$	53.51%	2904858	
		$h$	0.00078		 $\geq 7e-6$	0.00%	234	
					 $\geq 5e-6$	0.00%	0	
					 $\geq 1e-6$	0.00%	0	
	Обобщенное решение на сетках со сгущением	$N$	4974486		 $\geq 7e-5$	0.00%	0	
		$N$ в области $\Omega_2$	4241164		 $\geq 5e-5$	0.00%	0	
		$h$ в области $\Omega_2$	0.00087		 $\geq 7e-6$	0.53%	26331	
		$n$	18		 $\geq 5e-6$	88.48%	4401539	
		$b$	1/128		 $\geq 1e-6$	10.99%	546616	
Модельная задача 2	Обобщенное решение на квазиравномерной сетке	$N$	2713152		 $\geq 2e-2$	0.00%	0	
					 $\geq 5e-3$	100.00%	2713152	
					 $\geq 2e-3$	0.00%	0	
		$h$	0.0011		 $\geq 5e-4$	0.00%	0	
					 $\geq 0$	0.00%	0	
	Обобщенное решение на сетках со сгущением	$N$	2739424		 $\geq 2e-2$	0.00%	0	
		$N$ в области $\Omega_2$	1894704		 $\geq 5e-3$	0.00%	0	
		$h$ в области $\Omega_2$	0.0013		 $\geq 2e-3$	9.38%	257082	
		$n$	25		 $\geq 5e-4$	90.62%	2482342	
		$b$	1/64		 $\geq 0$	0.00%	0	

и  $\|e\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$  для второй задачи соответственно для сеток  $R_q$  и  $R_c$ , их отношения  $\delta$  при измельчении шага сетки в два раза. (Эта величина для  $R_c$  варьируется изменением числа линий уровня, в таблице приводится для области  $\Omega_2$ ).

По результатам численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

- приближенное обобщенное решение задачи (1), (2) на сетках со сгущением к границе области сходится к точному решению со скоростью  $O(h^2)$  в норме пространства  $L_2(\Omega)$  и  $O(h)$  в норме  $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$ ;
- при расчете на сетках со сгущением можно получить при меньшем числе узлов абсолютную погреш-

Таблица 3:

	Обобщенное решение на квазиравномерной сетке					Обобщенное решение на сетках со сгущением $b = 1/64$					
Модельная задача 1	$h$	$\ e\ _{L_2(\Omega)}$	$\delta$	$\ e\ _{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$	$\delta$	$h$ в области $\Omega_2$	$\ e\ _{L_2(\Omega)}$	$\delta$	$\ e\ _{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$	$\delta$	
	0.003125	0.000435		0.025902		0.00889	0.000417		0.030584		
			1.88		1.42			3.97		2.03	
	0.001563	0.000231		0.018179		0.00428	0.000105		0.015038		
			1.86		1.42			4.04		2.07	
	0.000781	0.000124		0.012832		0.00196	0.000026		0.007259		
Модельная задача 2	$h$	$\ e\ _{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$			$\delta$	$n$	$h$ в области $\Omega_2$	$\ e\ _{W_{2,\alpha}^1(\Omega)}$			$\delta$
	0.003125	0.088201				3	0.01802	0.130585			
					1.41						2.06
	0.001563	0.062446				7	0.00873	0.063428			
					1.41						2.10
	0.000781	0.044274				16	0.00401	0.030266			

ность на порядок меньше, чем при расчете на квазиравномерных сетках, причем как в узлах приграничной полосы, так и в узлах области  $\Omega_2$ , при условии оптимального подбора параметров  $b$  и  $n$ ;

- для уменьшения величины абсолютной погрешности целесообразнее увеличивать количество линий уровня, чем уменьшать ширину приграничной полосы, поскольку в этом случае погрешность убывает быстрее.

## Список литературы

- [1] Рукавишников В.А. О весовых оценках скорости сходимости разностных схем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288, № 5, С. 1058–1062.
- [2] Rukavishnikov V.A. On differentiability properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem // Doklady Mathematics. 1990. V. 40, №. 3, P. 653–655.
- [3] Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Коэрцитивная оценка для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 4, С. 533–543.
- [4] Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. О принадлежности  $R_\nu$ -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6, С. 894–898.
- [5] Рукавишников В.А. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Докл. РАН. 2014. Т. 458, № 3, С. 261–263.
- [6] Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12, № 3, С. 313–324.
- [7] Беспалов А.Ю., Рукавишников В.А. Экспоненциальная скорость сходимости метода конечных элементов для задачи Дирихле с сингулярностью решения // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6, С. 727–731.
- [8] Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. V. 234, iss. 9, P. 2870–2882.

- [9] Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the error estimation of the finite element method for the boundary value problems with singularity in the Lebesgue weighted space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. V. 34, №. 12, P. 1328–1347.
- [10] Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Об изоморфном отображении весовых пространств эллиптическим оператором с вырождением на границе области // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 3, С. 349–355.
- [11] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Эллиптические уравнения с вырождением. Вариационный метод // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 1, С. 42–45.
- [12] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 2, С. 278–282.
- [13] Рукавишникова Е.И. Численный метод для первой краевой задачи с вырождением // Материалы международного конф. “Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии” / Изд-во ВСГТУ. Улан-Удэ, 2009, С. 295–301.
- [14] Рукавишникова Е.И. Автоматизированное построение сетки со сгущением к границе области // Информатика и системы управления. 2011. № 4(30), С. 57–64.

*Виктор Анатольевич Рукавишников — д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией  
Вычислительного центра ДВО РАН  
e-mail: vark0102@mail.ru;*

*Анна Сергеевна Рябоконь — младший научный сотрудник Вычислительного центра ДВО РАН  
e-mail: anyuta.riabokon@yandex.ru;*

*Елена Ивановна Рукавишникова — к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник  
Вычислительного центра ДВО РАН  
e-mail: rukavishnikova-55@mail.ru*

*Дата поступления — 28 апреля 2017 г.*