

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПОГЛОЩЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

М. Б. Гавриков, А. А. Таюрский

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва

УДК 533.95

В работе рассмотрена задача о затухании альфвеновской волны, падающей на границу с диссипативной плазмой. В качестве диссипаций учитывались гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, магнитная вязкость, релаксация температур, потери на тормозное излучение. Поскольку, как показали исследования, затухание происходит на длинах порядка скин-слоев, на которых МГД уравнения не применимы, то в основу исследований положены уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики с полным учётом инерции электронов. Была предложена неявная разностная схема численного расчёта плоских течений двухжидкостной плазмы. Проведённые исследования позволили установить зависимость затухания от частоты альфвеновской волны и электронной теплопроводности и вязкости. Выполненные исследования учитывали как тормозное, так и синхротронное излучение. Обнаружены квазистационарный режим затухания альфвеновской волны диссипативной плазмой и эффект запираания альфвеновской волны в диссипативной плазме.

Ключевые слова: электромагнитная гидродинамика, альфвеновская волна, вязкость и теплопроводность электронов и ионов, тормозное излучение.

Введение

Как известно [1], магнитогидродинамическая плазма допускает поперечные синусоидальные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, в которых термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин не возмущаются. Такие волны впервые, в 1942 г., были обнаружены Х. Альфвеном и названы альфвеновскими. Принципиально важно, что альфвеновские волны конечной амплитуды являются точными решениями уравнений классической магнитной гидродинамики (МГД) [2], что позволяет детально изучить их трансформацию вследствие различных физических факторов — диссипаций, неоднородностей плазмы и т.д.

Приложением альфвеновских волн, побудившим настоящее исследование, является предложенный в [3] механизм разогрева солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов как результата затухания в плазме солнечной короны альфвеновских волн, генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях. В этой связи в настоящей работе изучается механизм нелинейного пространственного поглощения альфвеновских волн вследствие плазменных диссипаций (омическое сопротивление плазмы, гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, обмен энергией между плазменными компонентами) с учётом тормозного излучения плазмы на базе численного решения уравнений гидродинамики электронов и ионов — уравнений Брагинского [4, 5] — в предположении квазинейтральности плазмы. В этом случае уравнения Брагинского замыкаются усечённой системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля, а полученная система уравнений плазмодинамики редуцируется [6, 7, 8] без потери математического и физического содержания к одножидкостной форме — уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД).

Задача о нелинейном пространственном поглощении плоской альфвеновской волны диссипативной плазмой без учёта тормозного излучения была рассмотрена авторами в [9], где было установлено, что в данном исследовании плазму можно считать несжимаемой, что позволяет использовать упрощённые уравнения несжимаемой ЭМГД.

Как показали исследования, синхротронное излучения незначительно влияет на поглощение альфвеновской волны по сравнению с тормозным излучением, поэтому, главным образом, учитывались потери вследствие тормозного излучения.

1 Система ЭМГД-уравнений

Для несжимаемой плазмы ЭМГД-система имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \Pi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{P}, \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где тензоры плотности потока импульса Π , вязких напряжений \mathbf{P} и “холловских слагаемых” \mathbf{W} имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathbf{P} = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)} \\ \mathbf{W} &= (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) \mathbf{I}_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)} \\ \Pi^h &= \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma \mathbf{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и ниже индексы \pm относятся к параметрам ионов и электронов, $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$, \mathbf{I}_3 — единичный трёхмерный тензор, σ — проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma \mathbf{D}^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* \mathbf{D}^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* \mathbf{D}^c, \quad \Pi_*^{(c)} = 2\mu_* \mathbf{D}^c, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm \mathbf{D}_\pm, \quad (3)$$

где $\mathbf{D}^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$, $\mathbf{D}^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$, $\mathbf{D}_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$ — тензоры деформаций, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, μ_\pm — гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются равными нулю.

По решению системы (1)–(3) гидродинамические параметры электронов и ионов вычисляются через ρ , \mathbf{U} , \mathbf{j} по формулам:

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda_\Sigma} \rho \quad (4)$$

Уравнения для температур [10]

$$\rho_\pm c_p^\pm \left[\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \operatorname{div} T_\pm \mathbf{v}_\pm \right] = \operatorname{div} (\chi_\pm \nabla T_\pm) + \operatorname{tr} (\Pi_\pm \mathbf{D}_\pm) + \frac{m_\mp j^2}{m_\Sigma \sigma} \pm b (T_- - T_+) - p_T^\pm, \quad (5)$$

где $c_p = T (\partial S / \partial T)_p$ — теплоёмкость при постоянном давлении, χ_\pm — теплопроводности электронов и ионов, $Q = \pm b (T_- - T_+)$ — тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях, p_T^\pm — потери на тормозное излучение электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты γ имеем $c_p = k / ((\gamma - 1)m) = \text{const}$, где k — постоянная Больцмана, m — масса частицы газа. Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая $c_p^\pm = k / ((\gamma - 1)m_\pm)$.

С учётом зависимостей σ , μ_\pm , χ_\pm , b , p_T^\pm от остальных параметров плазмы, прежде всего температур T_\pm , приводимых ниже, уравнения (1)–(5) дают замкнутую определённую систему уравнений относительно величин p_\pm , T_\pm , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} .

Коэффициенты переноса μ_\pm , χ_\pm , σ , b содержатся в [9].

Тормозное излучение вычислялось по формулам [11, 12]: $p_T^+ = 0$,

$$p_T^- = p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} (\alpha a_0)^3 \frac{m_e e^4}{\hbar^3} E_H \left(\frac{kT_e}{E_H} \right)^{1/2} Z^2 n_i n_e \left(\text{Вт/см}^3 \right),$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$, $a_0 = r_0/\alpha^2$, $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$ — классический электронный радиус, $E_H = \frac{e^2}{2a_0}$, $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек — постоянная Планка, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/°K — постоянная Больцмана. Отсюда имеем:

$$p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} 10^7 \cdot \frac{e^6}{c^3 m_e^{3/2} \hbar} \sqrt{kT_e} Z^2 n_i n_e \left(\frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^3} \right),$$

где T_e измеряется в °K, а n_i , n_e в см^{-3} .

2 Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае с учётом плоской геометрии плоские альфвеновские волны являются точными решениями ЭМГД-уравнений. В [9] было показано, что в указанном случае ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида:

$$U_\perp = u(t)e^{i\kappa x}, \quad H_\perp = h(t)e^{i\kappa x}, \quad E_\perp = e(t)e^{i\kappa x}, \quad T_\pm = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad U_x = 0$$

где $\kappa > 0$ — произвольное и использованы комплексные обозначения $U_\perp = U_y + iU_z$, $H_\perp = H_y + iH_z$, $E_\perp = E_y + iE_z$. При этом $H_x = \text{const}$, а $e(t)$ выражается в явном виде через $u(t)$ и $h(t)$:

$$e(t) = \left(\frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) / (1 + r^2), \quad r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \quad v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Функции $u(t)$, $h(t)$ имеют вид:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\}.$$

Здесь $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$ — плазменная частота, а C_1 , C_2 — произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока $j_\perp = j_y + ij_z$ также изменяется по закону $j_\perp = j(t)e^{i\kappa x}$, а $j_x = 0$, где $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$. Наконец,

$$\omega_\pm = \omega_\pm(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2 \Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Когда κ меняется от 0 до $+\infty$ частоты $\omega_\pm(\kappa)$ изменяются в диапазоне $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$ для $H_x > 0$ и $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ для $H_x < 0$. В длинноволновом пределе $r \leq 1$ имеем $\omega_\pm(\kappa) \sim \pm \kappa v_A$ и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну.

3 Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области $x < 0$, набегае на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, заполняющей полупространство $x > 0$. Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области $x > 0$ сопряжено с её поглощением, которое и является предметом изучения. Ниже рассматривается случай $H_x < 0$. Плазма в области $x > 0$ считается замагниченной, покоящейся, однородной и изотермической. Таким образом, в начальный момент времени в области $x > 0$ имеем:

$$U_\perp|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_\pm|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \text{const}, \quad H_\perp|_{t=0} = 0,$$

где константа ρ и продольное магнитное поле $H_x = \text{const}$ такие же, как и в области $x < 0$, откуда набегае альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе $x = 0$ совпадают со значениями на границе $x = 0$ параметров альфвеновской волны. На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы.

Запишем систему (1)–(5) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), используя обозначения $U = U_\perp = U_y + iU_z$, $H = H_\perp = H_y + iH_z$, $E = E_\perp = E_y + iE_z$, $j = j_\perp = j_y + ij_z$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x H - \mu_\Sigma \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x}, \\ E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial T_+}{\partial t} &= \frac{2Z(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_+ \frac{\partial T_+}{\partial x} \right) + \frac{m_-}{m_\Sigma} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_+^{5/2}}{R_+} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 + 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial T_-}{\partial t} &= \frac{2(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_- \frac{\partial T_-}{\partial x} \right) + \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_+ - T_-}{T_-^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_-^{5/2}}{R_-} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 - 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} \right) \right] \right\} - \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) Z^2 \rho T_-^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где формулы для μ_Σ , μ_* , μ^* , σ , χ_\pm содержатся в [9]. Наконец, ξ , ζ , ξ_T — числа подобия, равные

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c\sqrt{\lambda_+\lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho_0}L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi\rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{ce^3}{m_i^2} L Z^3 \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right)^{-3/2}, \\ \xi_T &= \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_i m_e} \frac{64\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right)^{-3/2}, \end{aligned}$$

где $\ell_c = c/\omega_p$ — скин-длина, L_0 , ρ_0 , H_0 и т.д. — характерные масштабы длины, плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось $t_0 = L_0/v_0$, $v_0 = v_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, $E_0 = v_0 H_0/c$, $j_0 = cH_0/(4\pi L_0)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_\Sigma e/(2k)$.

Итак, требуется решить начально-краевую задачу для системы (6) на полупрямой $x \geq 0$ с безразмерным начальным условием

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_\pm|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

а при $x = 0$ и $x = +\infty$ безразмерными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} U|_{x=0} &= U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t}, \\ E|_{x=0} &= \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}, \\ U|_{x=+\infty} &= 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_\pm|_{x=+\infty} = T^0, \end{aligned} \quad (8)$$

В безразмерном виде зависимость волнового числа от частоты представляется следующим образом

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

4 Численный метод решения задачи о пространственном поглощении

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (6)–(8). Счётная область — отрезок $[0, L]$ с достаточно большим L , в котором выбраны две сетки узлов $x_\kappa = \kappa h$, $0 \leq \kappa \leq N$, $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$, $0 \leq \kappa < N$, $h = L/N$. В целых узлах аппроксимируются величины j , U , E , в дробных — H , T_\pm . Переход с нижнего на верхний временной слой $T_\pm^0, U^0, H^0 \rightarrow T_\pm^1, U^1, H^1$ за время τ , $t \rightarrow t + \tau$, реализуется неявной разностной схемой, указанной в [9] с дополнением членов для тормозного излучения

$$p_{T,k+1/2}^+ = 0, \quad p_{T,k+1/2}^- = \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma - 1) \rho \left(T_{-,k+1/2}^0 \right)^{1/2}, \quad 0 \leq k < N.$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости

$$\tau = kh/U_{\text{эфф}}, \quad U_{\text{эфф}} = \max_{0 \leq \kappa < N} \left(\left| H_{\kappa+1/2}^0 \right|^2 / \rho + T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где $0 < k < 1$ — коэффициент запаса, подбираемый экспериментально.

5 Результаты

Ниже приведены некоторые результаты расчётов для $\rho_0 = 10^{-12}$ г/см³, $H_0 = 1$ Гс, $Z = 1$, тогда $\zeta = 3 \cdot 10^3$, $\xi_T = 3$, скин-длина $\ell_c = c/\omega_p \approx 1$ см. Учитывая мелкомасштабные процессы поглощения полагаем $L_0 = \ell_c$, тогда $\xi = 1$. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость $v_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0} = 2.8 \cdot 10^5$ см/сек, $t_0 = L_0/v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}/H_0 = 3.45 \cdot 10^{-6}$ сек, $T_0 \approx 10^3$ °K.

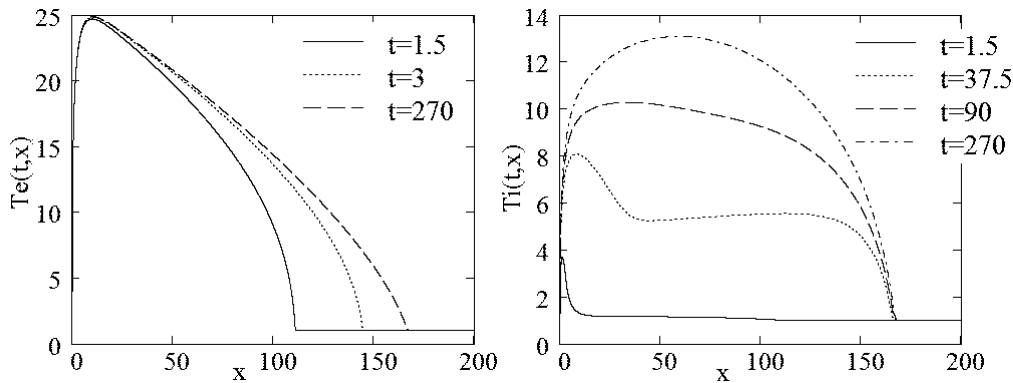


Рис. 1: Распределение температур электронов и ионов в различные моменты времени для амплитуды $U_0 = 1$

Заключение

На основе проведённых расчётов можно отметить два эффекта. Во-первых, это эффект записывания альфвеновской волны в конечной области, дальше которой проникновения не происходит (Рис. 1). При этом факт конечности области записывания обусловлен двухжидкостной механикой плазмы и тесно связанной с ней возможностью учёта мелкомасштабной, порядка скин-длины ℓ_c , динамики. Область может быть увеличена за счёт увеличения амплитуды альфвеновской волны U_0 , а также ослабления тормозного облучения. Во-вторых, параметры поглощаемой альфвеновской волны с течением времени выходят на квазистационарный режим, что означает установление со временем профилей температур T_\pm электронов и ионов и амплитуд электромагнитного поля и поперечной скорости (Рис. 2). Из полученных результатов можно сделать вывод, что плазму солнечной короны можно разогреть до нескольких миллионов градусов за счёт поглощения альфвеновских волн, падающих на её границу. Степень разогрева зависит от амплитуды падающей волны и параметров солнечной короны.

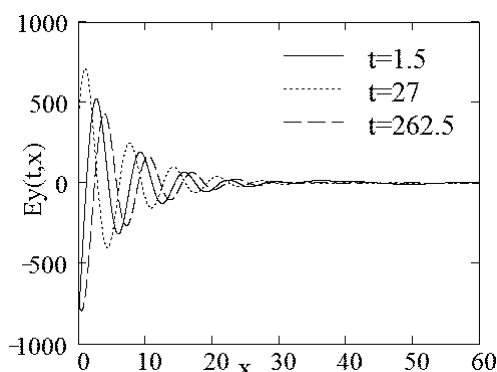


Рис. 2: Распределение напряжённости электрического поля в различные моменты времени для амплитуды $U_0 = 1$

Список литературы

- [1] Альфвен Х. Космическая электродинамика. — М.: ИЛ, 1952.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
- [3] Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // Nature, 2011, v. 475, p. 478–480.
- [4] Брагинский С.И. Явления переноса в плазме / Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963, вып. 1, с. 183–272.
- [5] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы — М.: Наука, 1993, 336 с.
- [6] Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Ч. I. Препринт №59, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, 28 с.
- [7] Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние инерции электронов на течение несжимаемой плазмы в плоском канале // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 9, с. 79–96.
- [8] M.B. Gavrikov and A.A. Taiurskii, Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel, J. Plasma Phys. (2015), vol. 81, 495810506, doi:10.1017/S0022377815000720.
- [9] Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // Математическое моделирование, 2013, т. 25, № 8, с. 65–79.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
- [11] Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. Основы физики плазмы. Т. 1 — М.: Энергоатомиздат, 1983, 641 с.
- [12] Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме: Учебное пособие / — Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2008. — 256 с.

Михаил Борисович Гавриков — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института
прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;
e-mail: mbgavrikov@yandex.ru;

Алексей Александрович Таюрский — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института
прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН;
e-mail: tayurskiy2001@mail.ru.

Дата поступления — 29 мая 2017 г.