

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}x_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}x_n = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_{21}x_1 + \mathbf{a}_{22}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}x_n = \mathbf{b}_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}x_1 + \mathbf{a}_{m2}x_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}x_n = \mathbf{b}_m, \end{array} \right.$$

или, кратко,

$$Ax = b$$

с интервальными $m \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$ и m -вектором правой части $b = (b_i)$. Большая часть наших конструкций нечувствительна к такой замене объекта рассмотрения. В нашей работе мы рассматриваем, главным образом, квадратный случай $m = n$, но некоторые из рассуждений и результатов применимы также к более общим прямоугольным системам линейных уравнений с $m \neq n$.

Популярным методом регуляризации системы (1)–(2) является небольшое возмущение матрицы, которое отодвигает малые сингулярные числа от нуля, но не сильно влияет на решение задачи. В этом заключается, в частности, известный метод М.М. Лаврентьева; см., к примеру, [3, 4, 5, 10]. Таким образом, вместо системы (1)–(2) мы решаем систему с лучшей обусловленностью

$$(A + \tau I)x = b,$$

где I — единичная матрица.

Метод М.М. Лаврентьева широко применяется для регуляризации различных уравнений и систем уравнений, но его недостатком является неочевидный выбор параметра τ , т. е. направления сдвига матрицы и его величины, в случае, когда нам ничего не известно о свойствах матрицы A .

Неожиданная идея реализации метода М.М. Лаврентьева состоит в том, чтобы выполнить сдвиг τI «во все стороны сразу». Тогда среди них обязательно найдётся нужное направление, которое обеспечит желаемую регуляризацию и улучшение свойств оператора. В рамках традиционных типов данных, которыми оперируют анализ и вычислительная математика, реализовать такой экзотический рецепт едва ли возможно, но подходящие инструменты созданы в интервальном анализе (см., к примеру, [2, 13]), и с их помощью наша идея получает элегантное воплощение.

Итак, пусть параметр регуляризации τ является интервальным. В соответствии с неформальным междunarодным стандартом [14], который будет использоваться всюду в этой работе, мы обозначаем интервалы и интервальные объекты жирным шрифтом. По этой причине интервальным параметром регуляризации будет τ . Чтобы накрыть все возможные направления сдвига матрицы, положим τ интервалом, который содержит нуль во внутренней части. В целом вместо системы уравнений (1)–(2) необходимо «решать» интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A + \tau I)x = b, \tag{3}$$

причём процесс решения должен быть устойчивым.

В современном интервальном анализе в понятие «решения» интервального уравнения или системы уравнений может вкладываться различный смысл. Как правило, решения интервальных задач — это оценки (чаще всего, тоже интервальные) тех или иных «множеств решений», возникающих в связи с интервальной постановкой. При этом «множество решений» может определяться различными способами в зависимости от типов неопределённости, который несут интервалы входных данных задачи. Интервальная неопределённость данных изначально носит двойственный характер [13, 19], и при формальной постановке задачи нам необходимо различать так называемые неопределённости А-типа и Е-типа (или А-неопределённость и Е-неопределённость), которые соответствуют применению логических кванторов « \forall » и « \exists » по переменным, пробегающим интервалы значений. Как следствие, различные множества решений для интервальных систем уравнений определяются различными комбинациями этих кванторов, которые применяются к интервальным параметрам.

Наиболее простым из множеств решений является множество, которое получается объединением всевозможных решений неинтервальных (точечных) уравнений или систем уравнений, возникающих при фиксации параметров системы в пределах заданных интервалов. Оно так и называется — *объединённое множество решений*, и для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{4}$$

определяется (в соответствии с аксиомой выделения из формальной теории множеств) следующим образом

$$\Xi_{uni}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in A)(\exists b \in b)(Ax = b)\}.$$

Объединённое множество решений соответствует применению кванторов существования « \exists » ко всем интервальным параметрам системы уравнений. Его равносильное теоретико-множественное представление —

$$\Xi_{uni}(A, b) = \bigcup_{A \in A} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in b\}. \tag{5}$$

Объединённое множество решений аккуратно учитывает, путём объединения, вклад всех точечных систем уравнений, образующих интервальную систему. Соответственно, оно подвержено изменчивости в той же степени, в какой эту изменчивость демонстрируют решения отдельных систем, образующих данную интервальную систему. Если интервальная система уравнений включает плохообусловленные точечные системы, для которых решение изменяется очень сильно при вариациях данных, то и объединённое множество решений включит в себя все эти большие изменения и никакой стабилизирующей роли не сыграет. Это случится, в частности, при интервализации плохообусловленной системы (1)–(2). Таким образом, объединённое множество решений не годится для устойчивого решения задачи (1)–(2), так как имеет устойчивость, которая определяется, фактически, решениями самых неустойчивых из возмущённых системы. В нашей ситуации от множества решений и от процесса решения требуются другие свойства. Желательно, чтобы решение интервальной системы строилось по наиболее устойчивым решениям точечных систем, образующих интервальную систему уравнений.

Среди множеств решений для интервальных систем уравнений наиболее устойчивым и, как следствие, наиболее подходящим для наших целей является так называемое *допускное множество решений*. Для интервальной линейной системы (4) это множество определяется как

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \quad (6)$$

т.е. как множество всех таких векторов x , что произведение Ax попадает в интервал правой части \mathbf{b} при любой матрице $A \in \mathbf{A}$. Определение (6) можно также записать в виде

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \mathbf{A})(Ax \in \mathbf{b})\}.$$

Наличие условия с квантором всеобщности $\forall A \in \mathbf{A}$ в определении допускного множества решений приводит к тому, что теоретико-множественное представление этого множества использует операцию пересечения, а не объединения, как было с $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Таким образом, вместо (5) мы получаем

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in \mathbf{b}\}.$$

Как следствие, допускное множество решений является наименее чувствительным к изменениям в матрице и правой части среди всех множеств решений интервальных линейных систем, так как оно не больше «наиболее устойчивого» множества решений $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x \in \mathbf{b}\}$, определяемого матрицей \tilde{A} с наилучшей обусловленностью из \mathbf{A} . Хотя некоторые точечные матрицы из \mathbf{A} могут быть плохообусловленными или даже особенными, но их влияние компенсируется присутствием в этой же интервальной матрице «хороших» точечных матриц, которые делают допускное множество решений в целом ограниченным и устойчивым.

Принципиальное отличие допускного множества решений от объединённого выражается, в частности, в том, что при расширении интервальной матрицы \mathbf{A} объединённое множество решений системы $Ax = \mathbf{b}$ расширяется, тогда как допускное множество решений уменьшается.

Итак, для интервальной системы линейных алгебраических уравнений, которая получается после «обинтерваливания» исходной плохообусловленной системы, мы будем рассматривать допускное множество решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Нас интересуют точки из него или его оценки. Задачу исследования и оценивания допускного множества решений для интервальных систем уравнений называют математической «задачей о допусках» [12, 13, 18]. Нам, таким образом, требуется её решение, возможно, частичное, которое и будет взято в качестве псевдорешения исходной задачи.

Но здесь мы сталкиваемся со специфической особенностью допускного множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений, которая состоит в том, что оно может оказаться пустым даже для совершенно обычных данных. Это происходит в том случае, когда интервалы правой части \mathbf{b} системы «относительно узки» в сравнении с интервалами в матрице \mathbf{A} . Тогда размах всевозможных произведений Ax при $A \in \mathbf{A}$ превышает ширину «коридора» правой части \mathbf{b} , в которую должно вписаться это произведение. Например, это происходит для одномерного интервального уравнения $[2, 3]x = [3, 4]$.

Для того, чтобы сделать допускное множество решений непустым, можно искусственно расширить правую часть интервальной линейной системы уравнений, например, равномерно относительно середин интервалов компонент. Нетрудно понять, что с помощью такого расширения мы всегда можем сделать допускное множество непустым.

Другой путь состоит в том, чтобы рассматривать не само множество решений, а некоторую количественную меру разрешимости задачи, и псевдорешениями объявлять точки, на которых достигается максимум этой меры. Этот подход и развивается в настоящей работе.

2 Допусковое множество решений для интервальных систем уравнений

Существует несколько результатов, дающих аналитические описания допускового множества решений для интервальных систем линейных алгебраических уравнений.

Теорема И. Рона [13, 16, 17] *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит допусковому множеству решений интервальной линейной системы уравнений $Ax = b$ тогда и только тогда, когда $x = x' - x''$ для некоторых векторов $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют системе линейных неравенств*

$$\begin{cases} \bar{A}x' - \underline{A}x'' \leq \bar{b}, \\ -\underline{A}x' + \bar{A}x'' \leq -\underline{b}, \\ x', x'' \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема И.А. Шарой [11] *Пусть $A_{i\cdot}$ — i -ая строка интервальной матрицы A , и $\text{vert } A_{i\cdot}$ — множество вершин этого интервального вектора. Для интервальной $m \times n$ -системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ допусковое множество решений $\Xi_{\text{tol}}(A, b)$ представимо в виде*

$$\Xi_{\text{tol}}(A, b) = \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{a \in \text{vert } A_{i\cdot}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \in b_i\}, \quad (8)$$

т. е. как пересечение гиперполос, число которых не превосходит $\sum_{i=1}^m |\text{vert } A_{i\cdot}|$ и, тем более, не превосходит $m \cdot 2^n$.

Каждое из включений $ax \in b_i$ для $a \in A_{i\cdot}$, задающее гиперполосу в \mathbb{R}^n , равносильно двустороннему линейному неравенству

$$\underline{b}_i \leq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq \bar{b}_i.$$

Поэтому теорема И.А. Шарой даёт, фактически представление допускового множества решений в виде решения системы двусторонних линейных неравенств, количество которых существенно меньше общего числа крайних («угловых») неравенств интервальной системы, равное $2^{m(n+1)}$.

Коль скоро задача решения систем линейных неравенств разрешима за полиномиальное от размеров задачи время (см., к примеру, [9]), то из теоремы И. Рона следует, что в общем случае распознавание пустоты/непустоты допускового множества решений интервальной линейной системы уравнений — также полиномиально разрешимая задача.

Приведённые выше результаты — теорема И. Рона и теорема И.А. Шарой, в принципе, дают инструменты для исследования допускового множества решений и работы с ним. В некоторых ситуациях более удобен и предпочтителен первый результат, в других — второй. Тем не менее, представление допускового множества решений через систему линейных неравенств имеет определённые недостатки. Желательно исследовать допусковое множество решений и работать с ним в терминах целостных интервалов данных задачи, а не с отдельными их концами, многократно входящими в системы неравенств. Кроме того, на этом пути необходимо уметь обрабатывать случай пустого допускового множества решений, и для этого требуется удобная процедура коррекции несовместных систем неравенств (7) и (8).

Подход, использующий коррекцию и решение системы неравенств (7), развивался в работе [6], но мы идём другим путём, который основан на введении количественной меры совместности (разрешимости) задачи и последующей её максимизации. При этом не требуется виртуальная коррекция интервальной системы уравнений.

3 Распознающий функционал и его применение

Далее нам понадобится классическая интервальная арифметика \mathbb{IR} — алгебраическая система, образованная интервалами $x = [\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathbb{R}$ так, что для любой арифметической операции « \star » из множества $\{+, -, \cdot, /\}$ результат операции между интервалами определяется как $x \star y = \{x \star y \mid x \in x, y \in y\}$. Развёрнутые

конструктивные формулы для арифметических операций выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}], & \mathbf{x} - \mathbf{y} &= [\underline{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}], \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= [\min\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}\}, \max\{\underline{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}\}], \\ \mathbf{x}/\mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot [1/\bar{\mathbf{y}}, 1/\underline{\mathbf{y}}] & \text{для } \mathbf{y} \neq 0. \end{aligned}$$

Отправной точкой дальнейших конструкций, опубликованных ранее в [12, 13, 18], является следующая характеристика точек из допускового множества решений: для интервальной системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству решений $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \subseteq \mathbf{b}, \quad (9)$$

где « \cdot » интервальное матричное умножение. Справедливость этой характеристики следует из свойств интервального матрично-векторного умножения и определения допускового множества решений. Придадим включению (9) другую, более удобную форму.

Если $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, то по определению интервального матричного умножения вместо (9) можно написать

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Представим правые части этих включений в виде суммы средней точки $\text{mid } \mathbf{b}_i$ и уравновешенного интервала $[-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i]$:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \subseteq \text{mid } \mathbf{b}_i + [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Добавляя теперь к обеим частям включений по $(-\text{mid } \mathbf{b}_i)$, получим:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \subseteq [-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Но включение интервала левой части в уравновешенный относительно нуля интервал $[-\text{rad } \mathbf{b}_i, \text{rad } \mathbf{b}_i]$ можно эквивалентным образом записать как неравенство на абсолютное значение:

$$\left| \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right| \leq \text{rad } \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что равносильно

$$\text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j - \text{mid } \mathbf{b}_i \right| \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Поэтому

$$\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b} \Leftrightarrow \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Наконец, можно свернуть по i конъюнкцию неравенств в правой части полученной логической эквивалентности:

$$\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b} \Leftrightarrow \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \geq 0.$$

Мы пришли к следующему результату:

Теорема. Пусть \mathbf{A} — интервальная $m \times n$ -матрица, \mathbf{b} — интервальный m -вектор. Тогда выражением

$$\text{Tol}(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad } \mathbf{b}_i - \left| \text{mid } \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\}$$

задается отображение $\text{Tol} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, такое что принадлежность точки $x \in \mathbb{R}^n$ допусковому множеству решений $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ равносильна неотрицательности в x отображения Tol , т. е.

$$x \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \iff \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0.$$

Таким образом, допустовое множество решений $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ интервальной линейной системы является множеством уровня $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0\}$ отображения Tol по первому аргументу x при фиксированных \mathbf{A} и \mathbf{b} . Мы будем называть Tol «распознающим функционалом» допустового множества решений, так как областью значений этого отображения является вещественная ось \mathbb{R} и посредством знака своих значений Tol «распознаёт» принадлежность точки множеству $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Конспективно изложим ниже свойства распознающего функционала, а их подробные доказательства можно найти в работах [12, 13, 18]. Функционал Tol является непрерывной функцией своих аргументов. Более того, он непрерывен в более сильном смысле, по Липшицу. Функционал Tol — вогнутый по переменной x всюду в \mathbb{R}^n . Функционал $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ — полиэдральный, т. е. его подграфик — полиэдральное множество. Наконец, функционал $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ достигает конечного максимума на всём пространстве \mathbb{R}^n .

Если $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$, то x — точка топологической внутренней $\text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ допустового множества решений. Поясним, что точка топологической внутренней — это точка множества, принадлежащая ему вместе с некоторым шаром (относительно какой-то нормы), имеющим центр в этой точке. Следовательно, точки из внутренней множества остаются принадлежащими этому множеству даже при их малых «шевелениях», что подчас бывает важно на практике.

Верно и обратное утверждение. Пусть интервальная линейная система уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ такова, что для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, m$ в i -ой строке матрицы \mathbf{A} существует хотя бы один ненулевой элемент или же не равен нулю ни один из концов соответствующей компоненты правой части \mathbf{b}_i . Тогда из принадлежности $x \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, следует строгое неравенство $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) > 0$.

Как следствие сформулированных результатов, с помощью распознающего функционала мы можем выполнить исследование пустоты/непустоты допустового множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений по следующей схеме. Для интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$. Пусть $U = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ и достигается в точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т. е. допустовое множество решений системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ непусто и τ лежит в нём;
- если $U > 0$, то $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям \mathbf{A} и \mathbf{b} ;
- если $U < 0$, то $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т. е. допустовое множество решений интервальной системы уравнений $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ пусто.

4 Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений

Из результатов предшествующего раздела следует, что значения распознающего функционала в точке дают количественную меру совместности этой точки по отношению к допустовому множеству решений данной интервальной системы линейных уравнений. Следовательно, аргумент максимума распознающего функционала, вне зависимости от того, принадлежит он непустому допустовому множеству решений или нет, является точкой максимума совместности для заданной интервальной линейной системы. Его можно считать псевдорешением исходной регуляризуемой системы линейных алгебраических уравнений.

Максимизация распознающего функционала на практике может быть выполнена с помощью методов негладкой выпуклой оптимизации, получивших большое развитие в последние десятилетия. Автор использовал для этой цели так называемые r -алгоритмы Н.З. Шора, разработанные в Институте кибернетики НАН Украины [7, 8]. В частности, на основе кода `ralgb5` П.И. Стецюка была создана свободно распространяемая программа `tolstolvtu` для систем Scilab и MATLAB [2]. Другая возможность для реализации нашего подхода появилась с развитием методов отделяющих плоскостей [1, 15, 20].

Итак, в методе интервальной регуляризации системы линейных алгебраических уравнений (1)–(2) матрица \mathbf{A} системы «раздувается» на некоторую малую величину до интервальной матрицы \mathbf{A} . Это можно сделать

с помощью интервального сдвига, положив $\mathbf{A} = A + \tau I$, либо индивидуальным «раздуванием» каждого элемента матрицы A , либо как-то ещё. Если исходная система линейных алгебраических уравнений изначально является неточной и задана в виде интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, то далее рассматриваем эту систему, которую, возможно, «раздуваем» ещё дополнительно. Затем мы численно находим безусловный максимум по x распознающего функционала $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, b)$ допускового множества решений полученной интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = b$. Аргумент этого максимума является искомым псевдорешением системы (1)–(2).

Для уяснения связи предложенного подхода с другими существующими понятиями псевдорешения полезно рассмотреть крайний случай — полное отсутствие неопределенности в данных, когда все они заданы точно. Если матрица системы \mathbf{A} и вектор правой части \mathbf{b} — точечные (неинтервальные), т. е. $\mathbf{A} = A = (a_{ij})$ и $\mathbf{b} = b = (b_i)$, то для всех i, j

$$\text{rad } a_{ij} = 0, \text{ rad } b_i = 0 \quad \text{и} \quad \text{mid } a_{ij} = a_{ij}, \text{ mid } b_i = b_i.$$

Распознающий функционал допускового множества решений принимает при этом вид

$$\begin{aligned} \text{Tol}(x, A, b) &= \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ - \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\} = - \max_{1 \leq i \leq m} \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &= - \max_{1 \leq i \leq m} |(Ax)_i - b_i| = - \|Ax - b\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Здесь посредством $\|\cdot\|_{\infty}$ обозначается чебышевская норма (∞ -норма) вектора в конечномерном пространстве \mathbb{R}^m , которая определяется как $\|y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |y_i|$. Тогда

$$\max \text{Tol}(x) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} (-\|Ax - b\|_{\infty}) = - \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_{\infty},$$

коль скоро $\max(-f(x)) = -\min f(x)$ для любой функции f . Таким образом, максимизация распознающего функционала равносильна в этом случае минимизации чебышёвской нормы невязки решения. Вычисление предложенного в работе псевдорешения превращается тогда в чебышёвское сглаживание данных, которое давно и успешно применяется на практике.

Интересный открытый вопрос — выбор величины интервального раздувания матрицы системы A , т. е. ширины параметра сдвига τ или же ширины элементов \mathbf{A} и правой части \mathbf{b} . Он аналогичен вопросу о выборе величины сдвига в традиционной неинтервальной версии регуляризации.

Заключение

В работе предложен новый подход к регуляризации плохообусловленных и неточно заданных систем линейных алгебраических уравнений, основанный на методах интервального анализа. Он назван *интервальной регуляризацией* и может рассматриваться как обобщение приёма М.М. Лаврентьева (регуляризации сдвигом).

При интервальной регуляризации исходная система линейных алгебраических уравнений погружается в интервальную систему, для которой исследуется так называемое допусковое множество решений. Для количественной характеристики разрешимости задачи, т. е. пустоты/непустоты допускового множества решений, мы вводим специальную меру, названную распознающим функционалом, а в качестве псевдорешений исходной системы линейных уравнений берём точки максимума этой меры. Для численного нахождения максимума распознающего функционала применяются методы негладкой выпуклой оптимизации.

Список литературы

- [1] Воронцова Е.А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // Вычислительные Технологии. 2017. №2. С. 67–84.
- [2] «Интервальный анализ и его приложения» — веб-сайт. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.nsc.ru/interval> (дата обращения: 31.05.2017).
- [3] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

- [4] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство Института математики, 2010.
- [5] Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджанов М. Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Вологда: Вологодский государственный технический университет, 2012.
- [6] Панюков А.В., Голодов В.А. Подход к решению систем линейных алгебраических уравнений с интервальной неопределенностью в исходных данных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2013. Вып. 6, №2. С. 108–119.
- [7] Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. Кишинэу: «Эврика», 2014.
- [8] Стецюк П.И. Субградиентные методы `ralgb5` и `ralgb4` для минимизации овражных выпуклых функций // Вычислительные Технологии. 2017. №2. С. 127–149.
- [9] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Том 1. М.: Мир, 1991.
- [10] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
- [11] Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные Технологии. 2005. Т. 10, №5. С. 103–119. Электронная версия статьи доступна на <http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf>
- [12] Шарый С.П. Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика. 2004. №7. С. 147–162.
- [13] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.nsc.ru/interval/?page=Library/InteBooks> (дата обращения: 31.05.2017).
- [14] Kearfott B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. 2010. Vol. 15, No. 1. P. 7–13.
- [15] Nurminski E.A. Separating plane algorithms for convex optimization // Mathematical Programming. 1997. Vol. 76. P. 373–391.
- [16] Rohn J. Inner solutions of linear interval systems / Interval Mathematics 1985 / K. Nickel, ed. Lecture Notes in Computer Science 212. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 157–158.
- [17] Rohn J. A Handbook of results on interval linear problems. 2005. 80 p. Электронная книга, доступная на <http://www.nsc.ru/interval/Library/Surveys/ILinProblems.pdf>
- [18] Shary S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85.
- [19] Shary S.P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, No. 5. P. 321–418.
- [20] Vorontsova E. Extended separating plane algorithm and NSO-solutions of PageRank problem // Discrete Optimization and Operations Research. Proceedings of 9th International Conference DOOR 2016, Vladivostok, Russia, September 19-23, 2016 / Kochetov, Y., Khachay, M., Beresnev, V., Nurminski, E., Pardalos, P., eds. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869. Cham, Switzerland: Springer International, 2016. P. 547–560. DOI:10.1007/978-3-319-44914-2_43

*Сергей Петрович Шарый — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института
вычислительных технологий СО РАН;*

e-mail: shary@ict.nsc.ru.

Дата поступления — 5 июня 2017 г.