

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

О. А. Ковыркина¹, В. В. Остапенко^{1,2}

¹Институт гидродинамики СО РАН, 630090, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 519.63

Для численного решения квазилинейной гиперболической системы законов сохранения предложена модифицированная схема КАБАРЕ, сохраняющая монотонность разностного решения относительно инвариантов линейного приближения аппроксимируемой системы. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация системы законов сохранения теории мелкой воды. Приведены тестовые расчеты различных задач о распаде разрыва, иллюстрирующие возможности предлагаемой схемы при расчете разрывных решений с прерывными волнами.

Ключевые слова: гиперболическая система законов сохранения, монотонность схемы КАБАРЕ, теория мелкой воды, прерывные волны.

Введение

Для численного решения гиперболических уравнений была предложена трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog [1], которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы был проведен в работах [2] и [3], в которых с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой КАБАРЕ. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта $r = 0.5, 1$, что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [3]. Для численного моделирования гидродинамических течений широко применяется двухслойная по времени форма записи схемы КАБАРЕ [4]. Монотонность этой схемы при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [5] и [6], а в двумерном — в [7]. Условия монотонности двухслойной по времени схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком, исследовались в [8] и [9].

В настоящей работе результаты, полученные в [5]–[9], использованы для построения схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения и обеспечивающую сохранение монотонности разностного решения относительно инвариантов линейного приближения аппроксимируемой системы. В качестве конкретного примера рассмотрена аппроксимация схемой КАБАРЕ системы законов сохранения первого приближения теории мелкой воды. Приведены тестовые расчеты различных задач о распаде разрыва, иллюстрирующие монотонность и высокую точность построенной схемы при расчете разрывных решений с прерывными волнами.

1 Схема КАБАРЕ, аппроксимирующая гиперболическую систему законов сохранения

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейной гиперболической системы законов сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = \tilde{v}(x), \quad (1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00333).

где $\mathbf{v}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ — заданная гладкая вектор-функция, содержащие m компонент. Нединвергентная форма записи системы (1) имеет вид

$$\mathbf{v}_t + A(\mathbf{v})\mathbf{v}_x = 0, \quad A(\mathbf{v}) = \mathbf{f}_v(\mathbf{v}). \quad (2)$$

Гиперболичность системы (2) означает, что все собственные значения $\lambda_i(\mathbf{v})$ матрицы $A(\mathbf{v})$ действительны и соответствующие им левые собственные вектора $\mathbf{l}^i(\mathbf{v})$ образуют базис в пространстве \mathbb{R}^m . Будем предполагать, что каждая дифференциальная форма $\mathbf{l}^i(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ интегрируема, в силу чего система (2) допускает запись в форме инвариантов

$$\frac{\partial w_i(\mathbf{v})}{\partial t} + \lambda_i(\mathbf{v}) \frac{\partial w_i(\mathbf{v})}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где вектор инвариантов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ системы (2) связан с вектором базисных переменных \mathbf{v} невырожденным преобразованием $\mathbf{w} = W(\mathbf{v})$.

Применяя результаты, полученные в [5]–[9], построим модификацию двухслойной по времени схемы КАБАРЕ [4], которая при аппроксимации задачи Коши для гиперболической системы законов сохранения (1) обеспечивает сохранение монотонности разностного решения относительно инвариантов линейного приближения этой системы. Схему КАБАРЕ будем строить на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = j\Delta, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (4)$$

в которой Δ — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = \frac{r\Delta}{\max_{i,j} |(\lambda_i)_{j+1/2}^n|}, \quad (5)$$

где $r \in (0, 1)$, $(\lambda_i)_{j+1/2}^n = \lambda_i(\mathbf{U}_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}(x_j, t_n)$ и консервативные $\mathbf{U}_{j+1/2}^n = \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t_n)$ векторные переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + \Delta/2$ пространственных узлах сетки, где \mathbf{u} — разностное решение, аппроксимирующее точное решение \mathbf{v} .

Пусть $\mathbf{u}_j^n, \mathbf{U}_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (1) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $\mathbf{v}(x)$. Применяя подход, предложенный в [8], численное решение $\mathbf{u}_j^{n+1}, \mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} будем находить по схеме КАБАРЕ в четыре этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n}{\Delta} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n)$, вычисляются значения консервативных переменных $\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$. На втором этапе находятся значения потоков $\mathbf{f}_j^{n+1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^{n+1/2})$, которые применяются на третьем этапе для определения из разностных уравнений

$$\frac{\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\mathbf{f}_{j+1}^{n+1/2} - \mathbf{f}_j^{n+1/2}}{\Delta} = 0 \quad (7)$$

значений консервативных переменных $\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1}$. На четвертом этапе находятся значения потоковых переменных \mathbf{u}_j^{n+1} .

2 Вычисление потоков на втором этапе и потоковых переменных на четвертом этапе

В начале второго этапа по формулам

$$\mathbf{w}_j^n = W(\mathbf{u}_j^n), \quad \mathbf{w}_{j+1/2}^n = W(\mathbf{U}_{j+1/2}^n), \quad \mathbf{w}_{j+1/2}^{n+1/2} = W(\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2}) \quad (8)$$

определяются численные значения вектора инвариантов, которые используются для вычисления компонент этого вектора в целых узлах на временных слоях $(n+1/2)$ и $(n+1)$. Опишем процедуру этого вычисления

для некоторого инварианта w_i , переносимого со скоростью λ_i вдоль характеристик i -го семейства. Для краткости в приводимых ниже формулах индекс i будем опускать. Предварительное значение инварианта \bar{w}_j^{n+1} определяется в зависимости от знаков скоростей характеристик

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} = \lambda \left(U_{j-1/2}^{n+1/2} \right), \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} = \lambda \left(U_{j+1/2}^{n+1/2} \right)$$

в ячейках, примыкающих к узлу j .

Сначала рассмотрим случай однонаправленных характеристик. При выполнении неравенств

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0, \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \quad (9)$$

предварительное значение инварианта \bar{w}_j^{n+1} вычисляется по формуле $\bar{w}_j^{n+1} = 2w_{j-1/2}^{n+1/2} - w_{j-1}^n$, а при выполнении неравенств

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0, \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0, \quad (10)$$

по формуле $\bar{w}_j^{n+1} = 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - w_{j+1}^n$, после чего находим $\bar{w}_j^{n+1/2} = (w_j^n + \bar{w}_j^{n+1}) / 2$. При помощи стандартного двухстороннего ограничителя

$$F(u, m, M) = \begin{cases} m, & u \leq m, \\ u, & m \leq u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

значения $\bar{w}_j^{n+1/2}$ с учетом принципа максимума [6] корректируются по формуле

$$w_j^{n+1/2} = F \left(\bar{w}_j^{n+1/2}, m_j^n, M_j^n \right), \quad (11)$$

в которой

$$m_j^n = \min \left(w_{j-1/2}^n, \max(w_j^n, \varphi_{j-1/2}^n) \right), \quad M_j^n = \max \left(w_{j-1/2}^n, \min(w_j^n, \varphi_{j-1/2}^n) \right)$$

при выполнении неравенств (9) и

$$m_j^n = \min \left(w_{j+1/2}^n, \max(w_j^n, \psi_{j+1/2}^n) \right), \quad M_j^n = \max \left(w_{j+1/2}^n, \min(w_j^n, \psi_{j+1/2}^n) \right),$$

при выполнении неравенств (10), где

$$\varphi_{j-1/2}^n = \frac{w_{j-1/2}^n - (1 - \mu_{j-1/2}^{n+1/2}) w_{j-1}^n}{\mu_{j-1/2}^{n+1/2}}, \quad \psi_{j+1/2}^n = \frac{w_{j+1/2}^n - (1 - \mu_{j+1/2}^{n+1/2}) w_{j+1}^n}{\mu_{j+1/2}^{n+1/2}}, \quad \mu_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{\tau_n}{\Delta} |\lambda_{j\pm 1/2}^{n+1/2}|.$$

В случае разнонаправленных расходящихся характеристик

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0, \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0, \quad (12)$$

полагаем, что $w_j^{n+1/2} = w_j^n$, а в случае разнонаправленных сходящихся характеристик

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0, \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0 \quad (13)$$

значение инварианта $w_j^{n+1/2}$ вычисляется по формуле $w_j^{n+1/2} = (w_j^n + \bar{w}_j^{n+1}) / 2$, в которой

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} (w_l)_j^{n+1} + |\lambda_{j+1/2}^{n+1/2}| (w_r)_j^{n+1}}{\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} + |\lambda_{j+1/2}^{n+1/2}|}, \quad (14)$$

где

$$(w_l)_j^{n+1} = 2w_{j-1/2}^{n+1/2} - w_{j-1}^n, \quad (w_r)_j^{n+1} = 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - w_{j+1}^n.$$

После вычисления вектора инвариантов $w_j^{n+1/2}$ во всех узлах j полуцелого временного слоя, по формулам

$$f_j^{n+1/2} = f \left(u_j^{n+1/2} \right), \quad u_j^{n+1/2} = W^{-1} \left(w_j^{n+1/2} \right), \quad (15)$$

где W^{-1} — оператор, обратный к оператору W , находятся численные значения потоков $\mathbf{f}_j^{n+1/2}$, которые на третьем этапе используются в разностном уравнении (7).

На четвертом этапе по формуле $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1} = 2\mathbf{w}_j^{n+1/2} - \mathbf{w}_j^n$ находится второе предварительное значение вектора инвариантов на $(n+1)$ -ом временном слое. При условии (12) компоненты этого вектора корректируются по формуле $w_j^{n+1} = (w_{j-1/2}^{n+1} + w_{j+1/2}^{n+1})/2$, а при нарушении этого условия, т. е. при выполнении одного из трех условий (9), (10), (13), — по следующей формуле

$$w_j^{n+1} = F(\tilde{w}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad (16)$$

в которой

$$m_j^n = \min(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}), \quad M_j^n = \max(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}),$$

где $w_{j-1/2}^{n+1}$ и $w_{j+1/2}^{n+1}$ — соответствующие компоненты векторов

$$\mathbf{w}_{j-1/2}^{n+1} = W(\mathbf{U}_{j-1/2}^{n+1}), \quad \mathbf{w}_{j+1/2}^{n+1} = W(\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1}).$$

После определения вектора инвариантов \mathbf{w}_j^{n+1} , по формуле

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = W^{-1}(\mathbf{w}_j^{n+1}) \quad (17)$$

находится вектор потоковых переменных на $(n+1)$ -ом временном слое.

Линейным приближением системы (2) относительно постоянного решения $\mathbf{v}_0 = \text{const}$ называется линейная гиперболическая система

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + A(\mathbf{v}_0) \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

получаемая в первом приближении по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ при подстановке в систему (2) решения $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1(x, t)$. При записи в инвариантах $w_i(\mathbf{v}_1) = \mathbf{l}^i(\mathbf{v}_0) \mathbf{v}_1$ линейная система (18) представима в виде независимых линейных уравнений переноса

$$\frac{\partial w_i(\mathbf{v}_1)}{\partial t} + \lambda_i(\mathbf{v}_0) \frac{\partial w_i(\mathbf{v}_1)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Если построенная схема КАБАРЕ аппроксимирует линейную гиперболическую систему (18), то входящий в нее численный поток \mathbf{f}_j^n является линейной вектор-функцией $\mathbf{f}_j^n = A(\mathbf{v}_0)(\mathbf{v}_1)_j^n$. Умножая с учетом этого векторные разностные уравнения (6) и (7) слева на левый собственный вектор \mathbf{l} , соответствующий собственному значению λ матрицы $A(\mathbf{v}_0)$, получаем линейные разностные уравнения

$$\frac{w_{j+1/2}^{n+1/2} - w_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \lambda \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{\Delta} = 0, \quad \frac{w_{j+1/2}^{n+1} - w_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \lambda \frac{w_{j+1}^{n+1/2} - w_j^{n+1/2}}{\Delta} = 0,$$

аппроксимирующие соответствующее уравнение (19) и описывающие изменение численных значений инварианта $w = \mathbf{l} \mathbf{v}_1$ на первом и третьем этапах реализации схемы КАБАРЕ. Отсюда с учетом формул (8)–(17) и результатов работы [6] следует сохранение монотонности численных значений инварианта w при переходе с n -го на $(n+1)$ -й временной слой. Это означает, что построенная схема КАБАРЕ сохраняет монотонность разностного решения относительно инвариантов линейного приближения аппроксимируемой системы.

3 Система уравнений теории мелкой воды

В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды, для которой

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $h(t, x)$ и $q(t, x)$ — глубина и расход жидкости, g — ускорение свободного падения. При записи этой системы в форме инвариантов (3), получаем

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v + c, \quad w_1 = v - 2c, \quad w_2 = v + 2c,$$

где $v = q/h$ — горизонтальная скорость жидкости, $c = \sqrt{gh}$ — скорость распространения малых возмущений. Будем рассматривать для системы (1), (20) задачу Римана

$$v(x, 0) = \tilde{v}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1, & x \leq 0, \\ \tilde{v}_0, & x > 0, \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ q_1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где h_0, q_0 и h_1, q_1 — некоторые постоянные значения глубины и расхода жидкости.

На всех приводимых далее рисунках пунктирной линией показан начальный уровень жидкости $h(x, 0)$, а сплошной линией — глубина жидкости $h(x, t)$, получаемая из соответствующего точного решения в некоторый момент времени $t > 0$. Численные расчеты задачи Римана (21) для системы (1), (20) проводились по схеме КАБАРЕ на прямоугольной сетке (4) с пространственным шагом $\Delta = 10$ м, коэффициентом $r = 0.5$ в условии устойчивости Куранта (5) и значением ускорения свободного падения $g = 9.81$ м/с². Сеточные начальные данные, аппроксимирующие вектор-функцию (21), задавались по формулам

$$u_j^0 = \tilde{v}(x_j), \quad U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2}.$$

Для ячеек разностной сетки, в которых течение жидкости является докритическим

$$|v| < c \Rightarrow \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad (22)$$

численные значения глубины $h_{j+1/2}^n$ изображены на рисунках кружками, а для ячеек, в которых течение является сверхкритическим

$$v > c \Rightarrow \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad (23)$$

или

$$v < -c \Rightarrow \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad (24)$$

эти значения показаны ромбиками.

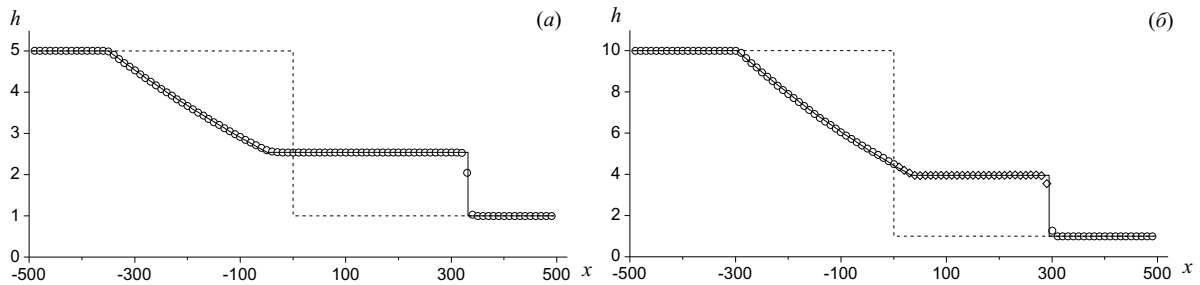


Рис. 1: Задача о разрушении плотины: $h_1 = 5$ м, $t = 50$ с (а), $h_1 = 10$ м, $t = 30$ с (б).

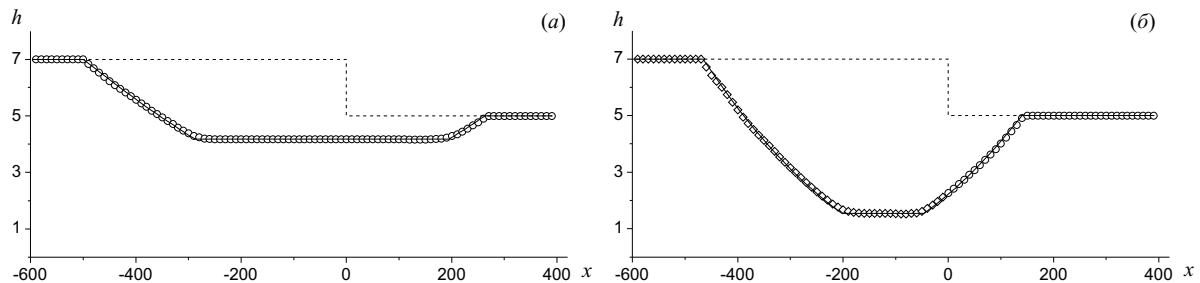


Рис. 2: Задача Римана с двумя волнами понижения: $v_1 = -5$ м/с, $t = 35$ с (а), $v_1 = -15$ м/с, $t = 20$ с (б).

На рис. 1 приведены результаты численного решения задачи о разрушении плотины, в которой начальные данные (21) удовлетворяют условиям $q_0 = v_0 = q_1 = v_1 = 0$, $h_1 > h_0 = 1$ м. В результате разрушения плотины в положительном направлении оси x распространяется ударная волна, которая через область постоянного течения соединяется с центрированной волной понижения. На рис. 1 (а) показаны результаты

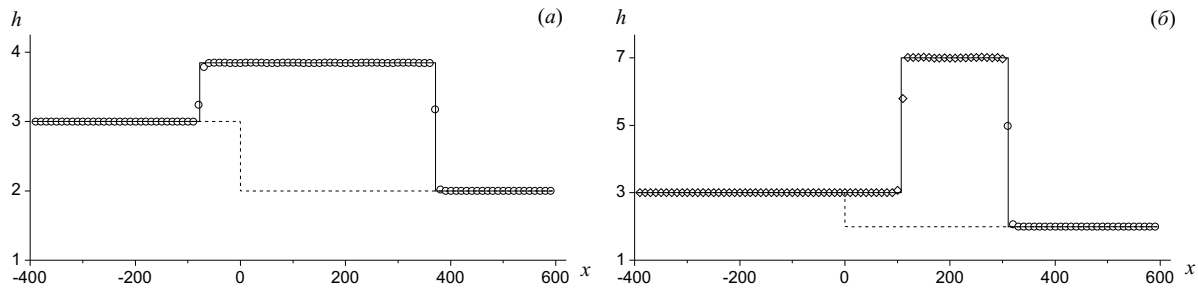


Рис. 3: Задача Римана с двумя ударными волнами: $v_1 = 5$ м/с, $t = 50$ с (а), $v_1 = 15$ м/с, $t = 25$ с (б).

расчета для начальной глубины $h_1 = 5$ м, когда течение жидкости во всей расчетной области является докритическим (22), а на рис. 1 (б) приведены результаты расчёта для $h_1 = 10$ м, когда существует область

$$\Omega_1 = \{(x, t) : 0 < x < x_1(t), t > 0\}$$

сверхкритического течения (23) и двусвязная область

$$\Omega_2 = \{(x, t) : -a < x < 0, x_1(t) < x < a, t > 0\}, \quad a = 500 \text{ м},$$

докритического течения (22), где линия $x = x_1(t)$ совпадает с фронтом ударной волны.

На рис. 2 приведены результаты численного решения задачи Римана (21), в которой

$$h_0 = 5 \text{ м}, \quad h_1 = 7 \text{ м}, \quad v_0 = q_0 = 0, \quad v_1 < 0, \quad q_1 < 0.$$

При выполнении неравенств $-2(c_0 + c_1) < v_1 < 2(c_0 - c_1) < 0$, где $c_0 = \sqrt{gh_0} = \sqrt{5g} \approx 7.00$ м/с и $c_1 = \sqrt{gh_1} = \sqrt{7g} \approx 8.29$ м/с, точное решение этой задачи представляет собой две расходящиеся центрированные волны понижения начального уровня жидкости. Результаты расчета для начальной скорости жидкости $v_1 = -5$ м/с приведены на рис. 2 (а), а для $v_1 = -15$ м/с — на рис. 2 (б).

Для решения, изображенного на рис. 2 (а), течение жидкости во всей расчетной области является докритическим (22), а для решения, показанного на рис. 2 (б), существует область $\Omega_3 = \{(x, t) : x < 0, t > 0\}$ сверхкритического течения (24) и область $\Omega_4 = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ докритического течения (22).

На рис. 3 приведены результаты численного решения задачи Римана (21), в которой

$$h_0 = 2 \text{ м}, \quad h_1 = 3 \text{ м}, \quad v_0 = q_0 = 0, \quad v_1 > 0, \quad q_1 > 0.$$

При выполнении неравенства

$$v_1 > (h_1 - h_0) \sqrt{\frac{g(h_0 + h_1)}{2h_0h_1}} \approx 2.02 \text{ м/с}$$

точное решение этой задачи представляет собой две ударные волны.

Решение, показанное на рис. 3 (а), получено при начальной скорости $v_1 = 5$ м/с. В этом решении ударные волны после распада разрыва распространяются в разных направлениях и течение является докритическим (22) во всей расчетной области. Решение, приведенное на рис. 3 (б), получено при начальной скорости $v_1 = 15$ м/с. В этом решении ударные волны после распада разрыва распространяются в положительном направлении оси x , а расчетная область содержит подобласть

$$\Omega_5 = \{(x, t) : b < x < x_4(t), t > 0\}, \quad b = -400 \text{ м},$$

сверхкритического течения (23) и подобласть

$$\Omega_6 = \{(x, t) : x_4(t) < x < c, t > 0\}, \quad c = 600 \text{ м},$$

докритического течения (22), где линия $x = x_4(t)$ совпадает с фронтом ударной волны, расположенной правее.

Из рис. 1–3 следует, что построенная схема КАБАРЕ с достаточно высокой точностью передает как профили волн понижения, так и фронты ударных волн, сформировавшихся в результате распада начального разрыва. Причем эта точность одинаково высокая как в случае, когда течение является докритическим во всей расчетной области (рисунки с индексами (а)), так и в случае, когда есть области докритического и сверхкритического течений (рисунки с индексами (б)).

Заключение

В настоящей работе представлен модифицированный алгоритм схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей пространственно одномерную гиперболическую систему законов сохранения (1), допускающую запись в инвариантах (3). Основные достоинства новой схемы заключаются в том, что она является монотонной относительно инвариантов линейного приближения аппроксимируемой системы, и с высокой точностью воспроизводит волны разрежения и локализует ударные волны, распространяющиеся с конечной скоростью. Этот алгоритм допускает естественное обобщение на более общие гиперболические системы законов сохранения (в том числе неоднородные и пространственно многомерные), которые, подобно уравнениям неизоэнтропической газовой динамики, не допускают введения полного набора инвариантов.

Список литературы

- [1] Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. V. 6. N. 3. P. 381–392.
- [2] Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделир. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
- [3] Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы "Кабаре" // Матем. моделир. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.
- [4] Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд. МГУ, 2013.
- [5] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности двухслойной по времени схемы Кабаре // Матем. моделир. 2012. Т. 24. № 9. С. 97–112.
- [6] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815.
- [7] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае // Докл. АН. 2015. Т. 462. № 4. С. 385–390.
- [8] Зюзина Н. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // Докл. АН. 2016. Т. 466. № 5. С. 513–517.
- [9] Зюзина Н. А., Остапенко В. В. Монотонная аппроксимация схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // Докл. АН. 2016. Т. 470. № 4. С. 375–379.

*Оляна Александровна Ковыркина — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН;
e-mail: olyana@ngs.ru;*

*Владимир Викторович Остапенко — д.ф.-м.н., гл. науч. сотр. Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: Ostapenko_VV@ngs.ru.*

Дата поступления — 29 мая 2017 г.