

О ТИПАХ СКРЫТЫХ ДЕФЕКТОВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОКРЫТИЯ И ОСНОВАНИЯ

О. М. Бабешко¹, Е. М. Горшкова¹, А. Г. Федоренко², О. В. Евдокимова²,
Д. А. Хрипков¹, С. Б. Уафа¹

¹Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар

²Южный научный центр РАН, 630090, Ростов-на-Дону

УДК 539.3

Рассматриваются статические граничная задача о напряженно-деформированном состоянии материалов с покрытиями, которые в процессе эксплуатации, приобрели скрытые дефекты. Скрытыми дефектами являются трещины или включения, плоскости которых перпендикулярны к границе покрытия, что делает их трудно обнаруживаемыми. Покрытия могут, в соответствии с технологическими требованиями, по-разному, как соединяться с основанием, так и нагружаться. В качестве покрытий приняты пластины Кирхгофа, а основания — трехмерные слои. Методом блочного элемента, опирающегося на топологические и факторизационные подходы, исследованы основные свойства напряженно-деформированного состояния таких блочных структур с дефектами, оценены возникающие концентрации напряжений в зонах дефектов для основных постановок граничных задач и сформирована их классификация. Полученные результаты важны в ряде отраслей, в том числе, в машиностроении и авиастроении.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, псевдодифференциальные уравнения, трещина, пластина, дефекты.

1 Постановка и решение задачи

Исследуются случаи статической граничной задачи для полубесконечных покрытий с прямолинейными границами, параллельными друг другу, находящихся на деформируемом основании в двух состояниях. В первом случае дистанция между торцами плит отлична от нуля, равна $2\theta > 0$, во втором случае — она отсутствует, $\theta = 0$, хотя плиты не взаимодействуют. Предполагается, что в случае вертикальных воздействий на покрытия, горизонтальные усилия не учитываются, а в случае горизонтальных воздействий на них, вертикальными составляющими контактных напряжений можно пренебречь.

Статическая граничная задача для скалярного варианта вертикальных воздействий на покрытия, моделируемые пластинами Кирхгофа, лежащими на деформируемом основании, описывается уравнениями, имеющими вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. (код проекта 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П (коды проектов с 0256-2015-0088 по 0256-2015-0093), Минобрнауки (код проекта 9.8753.2017/БЧ) и при поддержке грантов РФФИ (коды проектов 14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

$$Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = f_{4b}(\partial \Omega_b), \quad u_{3b} = f_{1b}(\partial \Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2} = f_{2b}(\partial \Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругого материала, на котором находятся покрытия-пластины, имеет вид

$$u_{3m}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^2 \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = \lambda, r, \theta,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty; x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r(|x_1| \leq \infty; \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta(|x_1| \leq \infty; -\theta \leq x_2 \leq \theta), \quad n = \lambda, r.$$

M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 o x_2$; h_b — толщины пластин, H — размерный параметр подложки, например, толщина слоя. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

Здесь приняты оси координат $x_1 o x_2$ расположенными в плоскости покрытий, а ось x_3 имеющей направление по внешней нормали к основанию. Ось $o x_1$ параллельна торцам дефекта, а ось $o x_2$ — перпендикулярна.

Уравнения векторной граничной задачи для случая горизонтальных воздействий на покрытия представимы в форме

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_b - \varepsilon_{5b} \mathbf{g}_b = \varepsilon_{5b} \mathbf{t}_b, \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_b = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) u_{2b} \\ \left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) u_{1b} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) u_{2b} \end{pmatrix} \right\|.$$

Системы интегральных уравнений, связывающие горизонтальные напряжения и перемещения векторной граничной задачей, имеют

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i \langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta, \quad \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty; x_2 \leq -\theta), \quad \Omega_r(|x_1| \leq \infty; \theta \leq x_2), \quad \Omega_\theta(|x_1| \leq \infty; -\theta \leq x_2 \leq \theta), \quad (2)$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2 \quad \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{g},$$

\mathbf{g} — вектор касательных напряжений под пластинами.

Свойства матриц-функций $K_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ в статическом случае описаны в [1, 2].

Рассматривая пластины и основание как блочную структуру, состоящую из трех деформируемых блоков, применим для ее исследования метод блочного элемента. Этот метод, как описано в [3, 4], предполагает, как первый шаг, погружение граничной задачи в топологическую структуру, и лишь на этом этапе использует внешнюю алгебру [5] в варианте, изложенном в [6–8]. В результате строится функциональное уравнение граничной задачи для блочной структуры. Многошаговый алгоритм дальнейших исследований функционального уравнения, уже не имеющих никакого отношения к аппарату внешней алгебры, чтобы не повторять всякий раз операции алгоритма, назван авторами «внешним анализом» [9]. Основанием такого названия является то, что аналитические преобразования алгоритма осуществляются над математическими объектами, которые включают в себя также и внешние формы. Поэтому название «внешний анализ» несет в себе понятные специалисту вполне определенные действия над функциональными уравнением, включающие дифференциальную факторизацию матриц-функций с элементами из нескольких комплексных переменных, реализации, автоморфизма, состоящее в вычислении форм-вычетов Лере, либо неполных функциональных уравнений Винера–Хопфа, построение псевдодифференциальных уравнений, извлечение из них

интегральных уравнений, диктуемых конкретными граничными условиями граничной задачи, решением интегральных уравнений и получение интегрального представления граничной задачи в каждом блоке в форме «упакованного» блочного элемента [4]. Наконец, «склейка» решений каждого блока, состоящая в построении фактор-топологии некоторых топологических пространств, являющихся декартовыми произведениями топологических пространств носителей и решений [4].

Применяя описанный подход, функциональное уравнение скалярной граничной задачи для вертикального случая, представленное для каждой пластины, принимает вид

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внешние формы для каждой пластины представимы в форме

$$\omega_b = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\}, \quad b = \lambda, r.$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения скалярной граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить, для пластин $b = \lambda, r$ в виде

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \quad \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \quad \partial\Omega_\lambda = \{-\infty \leq x_1 \leq \infty, \quad x_2 = -\theta\}.$$

Соответственно для правой пластины

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2+} D_{r 1}^{-1} M_r - D_{r 2}^{-1} Q_r - (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_{r 1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{53r} S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r, \quad \partial\Omega_r = \{-\infty \leq x_1 \leq \infty, \quad x_2 = \theta\}.$$

Производная вычисляется по параметру α_2 . Введем следующую систему обозначений, основываясь на (3) и (4).

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\}, \\ \mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g,$$

$$\begin{aligned}
y_{1\lambda} &= D_{\lambda}^{-1} \mathbf{F}_1 M_{\lambda}, \quad y_{2\lambda} = D_{\lambda}^{-1} \mathbf{F}_1 Q_{\lambda}, \quad y_{1r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r, \\
z_{1\lambda} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x_{\lambda}^2}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_{\lambda}, \quad z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_r^2}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r, \\
\mathbf{K}_{\lambda} &= \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\}, \quad k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_{\lambda} - g_{\lambda}) = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \\
k_{2\lambda} &= \varepsilon_{53\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \quad k_{1r} = \varepsilon_{53r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_{\lambda} - g_{\lambda}) = \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}), \quad k_{2r} = \varepsilon_{53r} S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}).
\end{aligned}$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
-i\alpha_{2-}y_{1\lambda} + y_{2\lambda} + (\alpha_{2-}^2 + \nu_{\lambda}\alpha_1^2)z_{1\lambda} - i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} + k_{1\lambda} &= 0, \\
-iy_{1\lambda} + 2\alpha_{2-}z_{1\lambda} - i [3\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} + k_{2\lambda} &= 0, \\
-i\alpha_{2+}y_{1r} + y_{2r} + (\alpha_{2+}^2 + \nu_r\alpha_1^2)z_{1r} - i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} + k_{1r} &= 0, \\
-iy_{1r} + 2\alpha_{2+}z_{1r} - i [3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} + k_{2r} &= 0.
\end{aligned}$$

В матричной форме система имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\lambda} \mathbf{Y}_{\lambda} + \mathbf{B}_{\lambda} \mathbf{Z}_{\lambda} + \mathbf{K}_{\lambda} &= 0, \\
\mathbf{A}_r \mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r &= 0.
\end{aligned}$$

Ради простоты, рассмотрим тот случай, когда изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, тогда имеем $\mathbf{Y}_{\lambda} = 0$, $\mathbf{Y}_r = 0$.

Решения получившихся уравнений легко находится

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{\lambda} &= -\mathbf{B}_{\lambda}^{-1} \mathbf{K}_{\lambda}, \quad \mathbf{Z}_r = -\mathbf{B}_r^{-1} \mathbf{K}_r, \\
(-1 + \nu_{\lambda})\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2-} [(1 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} &= -k_{1\lambda}, \quad 2\alpha_{2-} z_{1\lambda} + i [(1 + \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} = -k_{2\lambda}, \\
(-1 + \nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+} [(1 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} &= -k_{1r}, \quad 2\alpha_{2+} z_{1r} + i [(1 + \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} = -k_{2r}, \\
\Delta_{\lambda 0} &= -i(1 - \nu_{\lambda})(3 + \nu_{\lambda})\alpha_1^4, \quad \Delta_{r 0} = -i(1 - \nu_r)(3 + \nu_r)\alpha_1^4, \\
z_{1\lambda} &= \frac{i\alpha_1^2 [-(1 + \nu_{\lambda})k_{1\lambda} - (1 - \nu_{\lambda})k_{2\lambda}\alpha_{2-}]}{\Delta_{\lambda 0}}, \quad z_{2\lambda} = \frac{2\alpha_{2-}k_{1\lambda} + (1 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2 k_{2\lambda}}{\Delta_{\lambda 0}}, \\
z_{1r} &= \frac{i\alpha_1^2 [-(1 + \nu_r)k_{1r} - (1 - \nu_r)k_{2r}\alpha_{2-}]}{\Delta_{r 0}}, \quad z_{2r} = \frac{2\alpha_{2-}k_{1r} + (1 - \nu_r)\alpha_1^2 k_{2r}}{\Delta_{r 0}}.
\end{aligned}$$

Внеся найденные соотношения в выражения для внешних форм в (3), (4), будем иметь два уравнения для $\theta > 0$ и $\theta = 0$, положив $G_{3r} = G^+$, $G_{3\lambda} = G^-$.

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^+(\alpha_1, \alpha_2) &= -[\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\
+ U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} [A_{\lambda} k_{1\lambda} + B_{\lambda} k_{2\lambda} + A_r k_{1r} + B_r k_{2r} + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2)], \quad \theta > 0,
\end{aligned}$$

$$U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta}^{\theta} u_3(x_1, x_2) e^{i\langle \alpha, x \rangle} dx_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^+(\alpha_1, \alpha_2) &= -[\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] G^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\
+ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} [A_{\lambda} k_{1\lambda} + B_{\lambda} k_{2\lambda} + A_r k_{1r} + B_r k_{2r} + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2) + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2)], \quad \theta = 0.
\end{aligned}$$

При $\theta \rightarrow 0$, то есть когда пластины сближаются, первое уравнение непрерывно переходит во второе. Получили два разных функциональных уравнения Винера–Хопфа. Первое — обобщенное функциональных уравнения Винера–Хопфа в связи с присутствием функции $U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2)$. Оно решается изложенным в [10] обращением системы двух интегральных уравнений второго рода с вполне непрерывными операторами вида

$$\begin{aligned}
X^+ - \left\{ -\frac{M_1^+}{M_2^-} Y^- e^{-i2\alpha_2\theta} \right\}^+ &= \left\{ \frac{1}{M_2^-} \Phi e^{-i\alpha_2\theta} \right\}^+, \quad Y^- + \left\{ \frac{M_2^-}{M_1^+} X^+ e^{i2\alpha_2\theta} \right\}^- = \left\{ \frac{1}{M_1^+} \Phi e^{i\alpha_2\theta} \right\}^-, \\
M_1 &= M_1^+ M_1^-, \quad M_2 = M_2^+ M_2^-, \quad M_2^+ G^+ = X^+, \quad M_1^- G^- = Y^-.
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения работы [10].

В процессе решения функционального уравнения приходится определять функционалы $S_{3b}(\alpha_1, \alpha_{2\pm})$, $b = = \lambda, r$ из некоторой системы алгебраических уравнений [4].

2 Свойства решений

При исследовании решения первого уравнения, доказано, что для $\theta > 0$ имеют место следующие свойства контактных напряжений между пластинами и подложкой

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &= \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &= \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{1b}(x_1, x_2)$, $b = \lambda, r$ непрерывные по обоим координатам функции для достаточно гладких t_{3b} , $b = \lambda, r$ [10].

Обращение второго уравнения при $\theta = 0$ строится традиционным методом Винера–Хопфа [10] и приводит при $x_2 \rightarrow 0$ к следующим свойствам решений

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) \ln |x_2|, \\ g_{3r}(x_1, x_2) &\rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1} + \sigma_{3r}(x_1, x_2) \ln |x_2|. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $\sigma_{nb}(x_1, x_2)$, $b = \lambda, r$; $n = 2, 3$ непрерывны по обоим параметрам.

В случае горизонтальных воздействий на покрытия, функциональное уравнение векторной граничной задачи приобретает вид матричного относительно вектора двух компонент касательных контактных напряжений

$$-\mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\mathbf{U}_b = \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b}, \alpha_{2b})(\mathbf{g}_b + \mathbf{t}_b), \quad \mathbf{U}_b = \{U_{1b}, U_{2b}\}. \quad (6)$$

Здесь ω_b — вектор внешних форм для каждой пластины, имеющий представление

$$\omega_b = \{\omega_{1b}, \omega_{2b}\},$$

$$\begin{aligned} \omega_{1b} &= e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ -\left(\varepsilon_{1b} \frac{\partial u_{1b}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2b} \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{2b}u_{1b} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} - i\alpha_{1b}u_{1b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{2b} \right) dx_2 \right\}, \\ \omega_{2b} &= e^{i\langle\alpha, x\rangle} \left\{ -\left(\varepsilon_{2b} \frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_2} - i\alpha_{2b}u_{2b} \right) dx_1 + \left(\varepsilon_{1b} \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{1b}u_{2b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{1b} \right) dx_2 \right\}, \end{aligned}$$

$b = \lambda$ — для левой пластины и $b = r$ — для правой.

Для построения псевдодифференциальных уравнений осуществляется дифференциальная факторизация как коэффициента функционального уравнения, который является функцией в скалярном случае и факторизуется просто, так и матрицы-функции $-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ функционального уравнения, где методом дифференциальной факторизации строится факторизующая матрица-функция $\mathbf{D}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})$. Принимая во внимание, что определитель матрицы-функции $-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ имеет двукратные корни $\alpha_{2b\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_{1b}^2} \equiv \pm i|\alpha_{1b}|$, получаем факторизующие матрицы-функции для левой и правой пластин в виде

$$\mathbf{D}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_{2-})^2} & \frac{\alpha_{2-}}{(\alpha_2 - \alpha_{2-})^2 \alpha_1} - \frac{(1 + \varepsilon_{1\lambda})}{(\alpha_2 - \alpha_{2-}) \varepsilon_{2\lambda} \alpha_1} \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

В случае векторной граничной задачи имеет место более сложное исследование, которое включает построение системы функциональных уравнений в результате сопряжения покрытий с основанием, то есть построением фактор-топологии топологических пространств покрытий и основания. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_\theta \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_r \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) &= \varepsilon_6^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)], \\ \mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\lambda \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_r \mathbf{g}(x_1, x_2), \\ \mathbf{u}_p &= \mathbf{F}_2^{-1} [\mathbf{R}_p(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_p} \omega_p + \varepsilon_{5p} \mathbf{F}_2(\mathbf{g}_p + \mathbf{t}_\lambda) \right\rangle, \quad p = \lambda, r. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь \mathbf{P}_λ , \mathbf{P}_r , \mathbf{P}_θ — проекторы на левую, правую пластины и на область Ω_θ . Применив оператор \mathbf{F}_2^{-1} , получим представление вида

$$\begin{aligned} & [\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda} (\mathbf{G}_\lambda + \mathbf{T}_\lambda) \right\rangle + [\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r} (\mathbf{G}_r + \mathbf{T}_r) \right\rangle - \\ & - \varepsilon_6^{-1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0) [\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)] = 0, \\ & \mathbf{T}_\lambda = \mathbf{F}_2 \mathbf{t}_\lambda(x_1, x_2), \quad \mathbf{T}_r = \mathbf{F}_2 \mathbf{t}_r(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Вектор-функции $\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)$, являющиеся преобразованиями Фурье функций, с носителями в полуплоскостях, являются регулярными функциями параметров α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить вектор-функции, регулярные по параметру α_2 в нижней, знак минус, и в верхней, знак плюс, полуплоскостях, положив

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2)$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим при $\theta > 0$ к матричному функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{G}_+ &= \mathbf{G}_- + \mathbf{V} + \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{U}_\theta, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K}_2 = \varepsilon_{5r}\mathbf{R}_r^{-1} - \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_1 = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K} - \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{R}_\lambda^{-1}, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{K}_1^{-1} \left(\mathbf{R}_\lambda^{-1} \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1} \int_{\partial\Omega_r} \omega_r - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1} \mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1} \mathbf{T}_r \right), \quad \mathbf{U}_\theta = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\theta u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

При $\theta \rightarrow 0$ последнее функциональное уравнение непрерывно переходит в следующее

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V}.$$

Эти два функциональных уравнений имеют совершенно разные качественные решения. Первое, являющееся обобщенным функциональным уравнением Винера–Хопфа, при решении сводится к векторной системе интегральных уравнений вида [10]

$$\begin{aligned} X_2^+ + \{N_+(\alpha, \beta) D_-^{-1}(\alpha, \beta) e^{-2i\alpha\theta} X_1^-\}^+ &= \{N_-^{-1}(\alpha, \beta) F_2^+(\alpha, \beta)\}^+, \\ X_1^- + \{D_-(\alpha, \beta) N_+^{-1}(\alpha, \beta) e^{2i\alpha\theta} X_2^+\}^- &= \{D_+^{-1}(\alpha, \beta) F_1^-(\alpha, \beta)\}^-, \\ M(\alpha, \beta) &= D_+(\alpha, \beta) D_-(\alpha, \beta) = N_-(\alpha, \beta) N_+(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Векторы контактных напряжений на краях пластин имеют представление

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) &= \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 < -\theta, \\ \mathbf{g}_r(x_1, x_2) &= \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2}, \quad x_2 > \theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Векторы $\sigma_{1\lambda}$, σ_{1r} непрерывны по обоим параметрам

Второе уравнение приводит к решениям, имеющим следующие концентрации напряжений в зоне схождения трех блоков

$$\mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)x_2^{-1}, \quad \mathbf{g}_r(x_1, x_2) \rightarrow \sigma_{2r}(x_1, x_2)x_2^{-1}.$$

Все векторы $\sigma_{n\lambda}(x_1, x_2)$ и $\sigma_{nr}(x_1, x_2)$, $n = 1, \dots, 4$ непрерывны по обоим параметрам. Таким образом, и для касательных напряжений в области контакта при полной близости пластин –дефекта покрытия, возникают сингулярные касательные напряжения.

Отсюда можно ввести классификацию типов дефектов в покрытиях в зависимости от их поведения при различных видах контакта покрытий с основанием, основываясь на типах разрушений, которые они могут нанести блочной структуре.

1. В том случае, если покрытие контактирует с основанием без трения или испытывает, в основном, нормальные к границе давления, то перпендикулярный к границе дефект опасен возможностью разрушения основания, сформировав его ступенчатую форму в зоне дефекта или вертикально разрезав основание.

2. В том случае, если покрытие имеет характер приклеенной пленки, сопротивляющейся горизонтальному сдвигу, но не сопротивляющейся вертикальным воздействиям, то вертикальный дефект может, при соответствующей горизонтальной нагрузке, вектор которой параллелен торцам дефекта, вызвать разрыв основания сдвигового характера, параллельного торцам дефекта.
3. В том случае, если покрытие имеет характер приклеенной пленки, сопротивляющейся горизонтальному сдвигу, но не сопротивляющейся вертикальным воздействиям, то вертикальный дефект может, при соответствующей горизонтальной нагрузке, вектор которой перпендикулярен торцам дефекта, вызвать разрыв основания растягивающего характера.

Список литературы

- [1] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Гладской И.Б., Евдокимова О.В., Уафа Г.Н., Хафуз Т.А., Шестопапов В.Л. О локализации статического процесса в телах с дефектными покрытиями // МТТ. 2015. № 4. С. 90–97.
- [2] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об особенностях скрытых дефектов в разнотипных тонкостенных покрытиях // ДАН. 2015. Т. 460. № 4. С. 403–407.
- [3] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449. № 6. С. 657–660.
- [4] Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The theory of the starting earthquake // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2016, No. 1, Vol. 2. Pp. 37–80.
- [5] Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. Внешняя алгебра. М.: Изд-во Советская энциклопедия. Т. 1, 1977. 1151 с.
- [6] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
- [8] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1985. 464 с.
- [9] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Внешний анализ в проблеме скрытых дефектов и прогнозе землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, № 2. С. 19–28.
- [10] Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Бабешко Ольга Мефодиевна — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;
e-mail: babeshko49@mail.ru;

Горшкова Елена Михайловна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета;
e-mail: gem@kubsu.ru.

Федоренко Алексей Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН;
e-mail: afedorenko@mail.ru;

Евдокимова Ольга Владимировна — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН;
e-mail: evdokimova.olga@mail.ru;

Хрипков Дмитрий Александрович — научный сотрудник Кубанского государственного университета;
e-mail: vestnik@kubsu.ru;

Уафа Самир Баширович — инженер Кубанского государственного университета;
e-mail: uafa70@mail.ru.

Дата поступления — 10 мая 2017 г.