

ЦИКЛЫ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА

Ц. Ч.-Д Батуева

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.174

В работе исследуются циклы дискретных динамических систем циркулянтного типа. Предложен алгоритм поиска всех неподвижных точек таких систем. Описаны свойства циклов дискретных динамических системы, полученных циклическим сдвигом одного состояния и чередованием циклических сдвигов двух состояний.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, циркулянт, функциональный граф, цикл.

Введение

Дискретная динамическая система задается парой, состоящей из конечного множества состояний S и отображения $A : S \rightarrow S$. Если изобразить последовательные переходы всех состояний графически, то получится функциональный граф данной системы, то есть ориентированный граф вершинами которого являются состояния системы, а состояния \tilde{v} и \tilde{u} соединены ребром, если $A(\tilde{v}) = \tilde{u}$. Так как число состояний системы конечно, то каждая компонента связности функционального графа состоит из деревьев, ориентированных к корню, а корни в свою очередь образуют цикл [11]. То есть каждое состояние за несколько шагов работы системы попадет в некоторый цикл. Так же можно отметить, что число компонент связности функционального графа равно числу его циклов.

Нами рассматривается случай когда все состояния системы это циклические слова длины n над конечным алфавитом Z_q и значение координаты i в состоянии $\tilde{u} = A(\tilde{v})$ зависит только от предыдущих $k \leq n$ значений координат в состоянии \tilde{v} . Матрица влияния значений координаты i на j для такой системы образует циркулянт. Поэтому эти дискретные динамические системы называют системами циркулянтного типа. Впервые такая модель дискретной динамической системы были введена в работе [8].

Дискретные динамические системы определенные таким образом могут служить для описания многих процессов. Их исследование имеет свое начало в биологии и генетике [13, 14, 16]. Например, они могут служить моделью регуляторного контура геной сети (см. [5, 9]). Вершины графа-носителя которой соответствуют различным химическим веществам в клетке. Метки вершин характеризуют концентрации веществ, а циклы функционального графа описывают периодические процессы. В работе [6] описаны подходы и методы исследований дискретных моделей функционирования генных сетей.

Большим интересом сейчас пользуются системы с высокой степенью симметричности. Например, системы циркулянтного типа. Работы [1]–[4], [7] посвящены свойствам таких систем с пороговыми функциями в вершинах сети. В [8] описана структура функционального графа обобщенной дискретной динамической системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети. Рассматривались и модификации циркулянта, например, двойной циркулянт [10].

1 Основные определения

Пусть $G = (V, D)$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ (граф-носитель). Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему. В каждый момент времени вершины графа G помечены элементами v_0, v_1, \dots, v_{n-1} из Z_q . Набор $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in Z_q^n$ называется *состоянием*

системы. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы пересчитывается под действием отображения

$$A_{\varphi,q,n} : Z_q^n \rightarrow Z_q^n,$$

где $\varphi = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Каждая вершина приобретает новую метку, равную значению функции $f_i : Z_q^k \rightarrow Z_q$, где $k < n$, аргументами которой являются значения старых меток, из которых выходят дуги в вершину i .

Функциональным графом $G_{\varphi,q,n}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы из Z_q^n , а дуги соединяют вершины \tilde{v} и \tilde{u} тогда и только тогда, когда $A_{\varphi,q,n}(\tilde{v}) = \tilde{u}$.

В последнее время активно исследуется циркулянтный тип данной системы, то есть в качестве графа-носителя рассматривается циркулянт, а именно ориентированный граф (V, D) , где $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и

$$D = \{\vec{ij} \mid (j-i) \bmod n \leq k, i \neq j\}.$$

Работы [1, 2, 4, 7, 12, 15] посвящены свойствам таких систем с пороговыми функциями в вершинах.

В данной работе рассматриваются системы с циркулянтном в качестве графа-носителя, то есть исследуется структура функционального графа в случае отображения $A_{\varphi,q,n} : Z_q^n \rightarrow Z_q^n$, когда все функции f_i равны между собой, и каждому состоянию системы \tilde{v} ставится в соответствие состояние \tilde{u} тогда и только тогда, когда

$$u_i = f_0(v_{(i-k) \bmod n}, v_{(i-(k-1)) \bmod n}, \dots, v_{(i-1) \bmod n}),$$

где $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Введем обозначение $A_{f_0,q,n}$ вместо $A_{\varphi,q,n}$, поскольку в рассматриваемой системе функции во всех вершинах одинаковы: $\varphi = (f_0, f_0, \dots, f_0)$. Функциональный граф также будем обозначать $G_{f_0,q,n}$.

2 Неподвижные точки

Пусть $f : Z_q^k \rightarrow Z_q$. Ориентированным графом $P_{f,q}$ обозначается граф, вершинами которого являются элементы Z_q^k , причем дуга идет из вершины $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ в вершину (v_1, v_2, \dots, v_k) тогда и только тогда, когда $f(v_0, \dots, v_{k-1}) = v_k$ (см. [2]). Примеры графа $P_{f,2}$ для функций $f(x, y, z) = (01001100)$ и $f(x, y, z) = (10001001)$ изображены на рисунке 1.

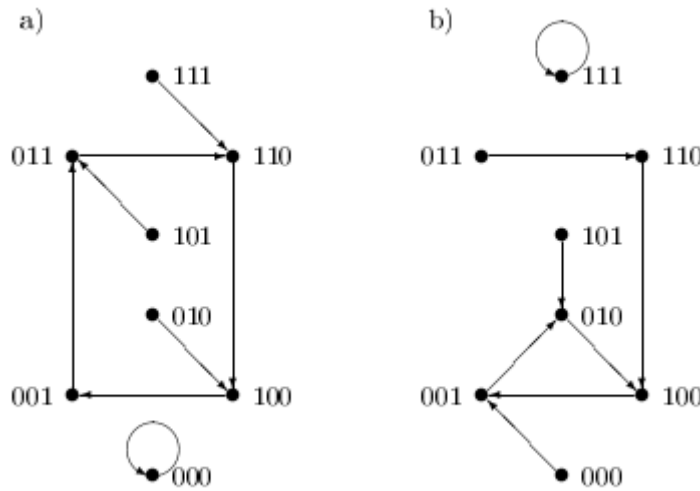


Рис. 1: Граф $P_{f,2}$ для функций а) (01001100) и б) (10001001) .

В работе [2] был предложен алгоритм нахождения всех неподвижных точек отображения $A_{f,q,n}$ через граф $P_{f,q}$.

Обозначение $\tilde{v} = \alpha^{n/s}$, если n кратно s , означает n/s раз конкатенацию слова $\alpha \in Z_q^s$.

Теорема о неподвижных точках. [2] Состояние $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1})^{n/l}$ с минимальным периодом l является неподвижной точкой отображения $A_{f,q,n}$ тогда и только тогда, когда граф $P_{f,q}$ содержит простой цикл $\tilde{u}^0, \dots, \tilde{u}^{l-1}$, где

$$\tilde{u}^i = (v_i, v_{(i+1) \bmod l}, \dots, v_{(i+l-1) \bmod l})$$

для $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$.

Так как граф $P_{f,q}$ имеет для каждой вершины единственную выходящую дугу, то нахождение всех ее контуров не составляет труда. Число всех состояний в контурах данного графа является верхней оценкой на число неподвижных точек в системах с функцией f вершинах сети. Оценка достигается при n кратном всем длинам контуров в графе $P_{f,q}$. Максимальное число неподвижных точек возможно, когда граф $P_{f,q}$ состоит только из контуров, а длина состояний системы кратна длинам этих контуров. Следовательно, максимальное число неподвижных точек равно q^k .

3 Циклы

Пусть состояние $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Введём обозначения циклического сдвига состояния на s позиций вправо

$$\delta_s(\tilde{v}) = (v_{(n-s) \bmod n}, \dots, v_{n-1}, v_0, \dots, v_{(n-s-1) \bmod n}).$$

Обозначим за $g_i : Z_q^k \rightarrow Z_q$ функцию $g_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{k-i+1}$, где $i \in \{1, \dots, k\}$.

Теорема о циклах, образованных циклическими сдвигами. Пусть $f : Z_q^k \rightarrow Z_q$, $\tilde{v} \in Z_q^n$ и $i \in \{1, \dots, k\}$. Состояние \tilde{v} обладает свойством $A_{f,q,n}(\tilde{v}) = \delta_i(\tilde{v})$, если состояние \tilde{v} избегает все слова при которых значения функций g_i и f не совпадают.

Обозначим за $B_{f,q}$ граф де Брейна размерности k вершины которого раскрашены в значения функции f от значения вершины. Пример графа для функции $f(x, y, z) = (01001100)$ изображен на рисунке 2.

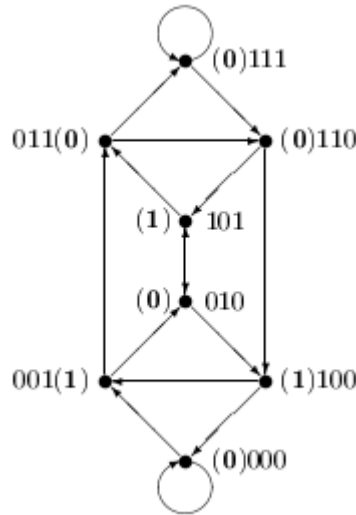


Рис. 2: Граф $B_{f,2}$ для функций (01001100) .

Простой контур в графе $B_{f,q}$ называется *пороговым*, если для значений его вершин выполняются следующие условия

1. циклическое слово, соответствующее этому контуру, содержит ровно один раз подслово 01.
2. функция f принимает значение 1 (0) хотя бы для одной вершины с максимальным числом подряд идущих нулей (единиц, соответственно).

3. существует только две пары смежных в контуре вершин для которых значения их меток не совпадают.

Если $f(0^k) = 1$ ($f(1^k) = 0$), то петля для вершины 0^k (1^k , соответственно) тоже называется пороговой. Циклический маршрут называется *пороговым*, если он состоит только из пороговых простых циклов.

Теорема о циклах, образованных циклическими сдвигами двух состояний. Пусть $f : Z_2^k \rightarrow Z_2$ булева функция, $\tilde{v} \in Z_2^n$ и $i \in \{1, \dots, k\}$. Состояние \tilde{v} обладает свойством $A^2(\tilde{v}) = \delta_i(\tilde{v})$, если циклический маршрут соответствующий состоянию \tilde{v} в графе $B_{f,2}$ является пороговым.

4 Системы с пороговыми булевыми функциями в вершинах сети

Пороговой функцией называется функция, имеющая следующий вид

$$f(x_1, \dots, x_k) = [\sum_{i=1}^k a_i x_i > T],$$

где a_i — вес аргумента x_i , T — порог функции f и $a_i, T \in \mathbb{R}$.

В результате исследования дискретных динамических систем, заданных на циркулянте с пороговыми булевыми функциями в вершинах сети было обнаружено, что множество истоков (состояний без преобразов) задается конечным языком запретов [3]. Множества истоков и состояний в циклах для систем с не пороговыми функциями таким свойством не обладают.

Вычисления показали, что функциональные графы для дискретных динамических систем с пороговыми функциями в вершинах сети от не более чем трех переменных содержат циклы только рассмотренных выше видов: неподвижные точки, циклические сдвиги состояния и чередование циклических сдвигов двух состояний. Мы предполагаем, что такие системы не содержат других видов циклов.

Список литературы

- [1] Батуева Ц. Ч.-Д. Свойства генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 72—73.
- [2] Батуева Ц. Ч.-Д. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. № 4. С. 25—32.
- [3] Батуева Ц. Ч.-Д. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями от не более чем трех переменных // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. № 1. С. 17—34. (Перевод: Batueva Ts. Ch.-D. Circulant discrete dynamical systems with threshold functions of at most three variables // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2016. V. 10. N 1. P. 51-60.)
- [4] Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского государственного университета. 2005. № 14. С. 206—212.
- [5] Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276—2295.
- [6] Евдокимов А. А. Дискретные модели генных сетей: анализ и сложность функционирования // Совместный выпуск журналов Вычислительные технологии 2008. Т. 13, № 3 и Вестник КАЗНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2008. № 3(58). С. 31—37.
- [7] Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестник Томского государственного университета. — 2008. — № 2(3). — С. 18–21.
- [8] Евдокимов А. А., Пережогин А. Л. Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 39—48. (Перевод: Evdokimov A. A., Perezhogin A. L. Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network // J. Appl. Industr. Math. 2012. Vol. 6, № 2. P. 160–166.)

- [9] Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А., Матвеева И. И., Фадеев С. И. Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — С. 397–480.
- [10] Нажмиденова А. М., Пережогин А. Л. Дискретная динамическая система на двойном циркулянте // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — № 4. — С. 80–88.
- [11] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
- [12] Evdokimov A. A., Kutumova E. O. The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th International conference on bioinformatics of genom regulation and structure (Novosibirsk, June 20–27, 2010). — Novosibirsk: SB RAS, 2010. — P. 155.
- [13] Kauffman S. A., Smith R. G. Adaptive automata based on Darwinian selection // Physica D. 1986. V. 22, № 1–3. P. 68–82.
- [14] Kauffman S. A. At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity. Oxford University Press, Oxford, 1995. 336 p.
- [15] Kutumova E. O., Evdokimov A. A. Reversible states of functioning the regulatory circuits discrete models the gene nets // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 85–94.
- [16] Laubenbacher R., Mendes P. A discrete approach to top-down modeling of biochemical networks. In: A. Kriete, R. Eils (Eds.), Computational Systems Biology, 2005. P. 229–247.

*Батуева Цындыма Чимит-Доржиевна — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН;*

e-mail: batueva@math.nsc.ru;

Дата поступления — 30 апреля 2017 г.