

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ФЛУКТУАЦИЙ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА РАЗМНОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ МОНТЕ — КАРЛО

Г. А. Михайлов^{1,2}, Г. З. Лотова^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 517.676

Рассматривается процесс переноса частиц с рассеянием и размножением в случайной среде. Для исследования флуктуаций параметров критичности в такой системе с помощью СуперЭВМ построен алгоритм метода Монте — Карло, допускающий распараллеливание. На основе теории малых возмущений и улучшенного диффузионного приближения разработан рандомизированный метод гомогенизации. Такой метод не даёт точных значений и используется для контроля результатов, полученных методом Монте — Карло. Тестовые расчёты проведены для одногрупповой сферически-симметричной модели системы. Получены достаточно согласованные результаты вычислений математических ожиданий и дисперсий эффективного коэффициента размножения обоими методами.

Ключевые слова: метод Монте — Карло, статистическое моделирование, теория переноса, эффективный коэффициент размножения.

Введение

Процесс переноса представляет собой однородную марковскую цепь столкновений частицы с элементами вещества, в результате которых может происходить рассеяние, поглощение или размножение частиц (при делении ядер вещества). Одним из параметров критичности является эффективный коэффициент размножения частиц (по столкновениям) k_{eff} , который является собственным значением интегрального уравнения (см., например, [1, 2]):

$$\Phi(r, \omega) = \frac{1}{k_{eff}} \int \int \frac{(\sigma_s(r') + \nu \sigma_f(r')) e^{-\tau(r, r')}}{4\pi|r - r'|^2} \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) \Phi(r', \omega') dr' d\omega'. \quad (1)$$

Здесь $\Phi(r, \omega)$ — плотность потока частиц (интенсивность излучения), $r \in R^3$ — пространственная точка, ω — единичный вектор направления, $\sigma(r) = \sigma_s + \sigma_c + \sigma_f$ — полное сечение (коэффициент ослабления), σ_s — сечение рассеяния, σ_f — сечение деления, σ_c — сечение поглощения, ν — среднее число частиц, вылетающих из точки деления,

$$\tau(r, r') = \int_0^{|r-r'|} \sigma\left(r' + t \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) dt$$

является оптической длиной отрезка (r', r) . При $k_{eff} = 1$ система является критической [1].

Перепишем (1) в виде: $k_{eff}\varphi(x) = \int_X k(x', x)\varphi(x')dx'$, или $k_{eff}\varphi = K\varphi$, где $x = (r, \omega)$, $\varphi = \sigma\Phi$ и $k(x', x) = k(x' \mapsto x)$ — указанная выше плотность. Здесь k_{eff} — спектральный радиус оператора K [3], что и определяет, в принципе, предлагаемый далее алгоритм метода Монте — Карло.

Если параметры задачи случайны, то величина k_{eff} также случайна и, в частности, практически важно оценивать вероятность $P(k_{eff} > 1)$, то есть вероятность надкритичности процесса переноса частиц с размножением в случайной среде.

Это можно осуществлять путём оценки вероятностных моментов $E k_{eff}$ и $D k_{eff}$, то есть среднего значения и дисперсии величины k_{eff} . Используя приближённую гауссовость распределения случайной величины k_{eff} на этой основе можно оценить и вероятность $P(k_{eff} > 1)$. Тестовое численное статистическое моделирование позволяет проверить удовлетворительность такой методики.

В следующем разделе сформулированы алгоритмы метода Монте — Карло, которые вследствие использования “метода двойной рандомизации” [4] допускают эффективное распараллеливание.

“Метод двойной рандомизации” для оценки вероятностных моментов серии функционалов $\{I_k(\sigma)\}$ от интенсивности излучения в стохастической среде определяется соотношениями:

$$E I_k(\sigma) = E_\sigma E_\Omega \xi_k(\Omega, \sigma) = E_{(\Omega, \sigma)} \xi_k(\Omega, \sigma),$$

$$E[I_i(\sigma) I_j(\sigma)] = E_{(\Omega_1, \Omega_2, \sigma)} [\xi_i(\Omega_1, \sigma) \xi_j(\Omega_2, \sigma)].$$

Здесь Ω — случайная траектория кванта, моделируемая для предварительно построенной реализации поля σ , $\xi_k(\Omega, \sigma)$ — соответствующая оценка функционала, а (Ω_1, Ω_2) — пара таких условно-независимых траекторий. В частности,

$$E[I_k^2(\sigma)] = E_{(\Omega_1, \Omega_2, \sigma)} [\xi_k(\Omega_1, \sigma) \xi_k(\Omega_2, \sigma)].$$

Таким образом, для построения несмещённых оценок рассматриваемых вероятностных моментов второго порядка, например, $E k_{eff}^2$, достаточно для каждой реализации σ моделировать лишь пару условно-независимых траекторий Ω_1, Ω_2 . Для уменьшения относительной трудоёмкости расчётов здесь можно моделировать две условно-независимые серии траекторий $\{\Omega_1^{(n)}\}$ и $\{\Omega_2^{(n)}\}$, $n = 1, \dots, N_\sigma$, причём произведение $\xi_i(\Omega_1, \sigma) \xi_j(\Omega_2, \sigma)$ заменяется на

$$\frac{1}{N_\sigma^2} \sum_{n=1}^{N_\sigma} \xi_i(\Omega_1^{(n)}, \sigma) \sum_{n=1}^{N_\sigma} \xi_j(\Omega_2^{(n)}, \sigma).$$

Аналогично оценивается момент порядка m на основе моделирования m условно-независимых траекторий $\Omega_1, \dots, \Omega_m$.

1 Алгоритмы метода Монте — Карло

Достаточно ясно, что оценки величины k_{eff} методом поколений по столкновениям [5] мало эффективны при решении рассматриваемых стохастических задач, т.к. не допускают использования двойной рандомизации. Поэтому далее формулируются алгоритмы метода Монте — Карло, связанные с предельным соотношением [3]:

$$k_{eff} = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n, \quad k_n = \sqrt[n]{\|K^n\|}, \quad (2)$$

причём

$$\|K^n\| = \sup_{x \in X} \int \dots \int k(x, x_1) k(x_1, x_2) \dots k(x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3)$$

и предполагается, что известна точка x_0 , в которой реализуются супремум из (3).

Согласно определению субстохастической плотности $k(x', x)$ величина $\|K^n\|$ равна среднему числу столкновений n -го номера при условии, что нормированный на одно столкновение источник расположен в точке x_0 . Таким образом, фактически формулируется алгоритм прямого статистического моделирования для оценки величины $\|K^n\|$. Осуществляя одновременно вычисления для различных значений n согласно (2) можно построить оценки величин $E k_{eff}$ и $E k_{eff}^2$ на основе степенной аппроксимации функции $x^{1/n}$ и соответствующей двойной рандомизации.

Введём теперь обозначения: $K = K(\Sigma)$, $k_{eff} = k_{eff}(\Sigma)$, где Σ — совокупность случайных параметров задачи. Поскольку в данном случае величина $\|K^n(\Sigma)\|$ представляет собой линейный функционал от плотности столкновений n -го номера, то

$$E_\Sigma \|K^n(\Sigma)\| = E_\Sigma E_\Omega \eta_n(\Omega, \Sigma), \quad (4)$$

где $\eta_n(\Omega, \Sigma)$ — число столкновений n -го номера на траектории Ω .

Соотношение (4) показывает, что здесь применим “метод двойной рандомизации”, причём для оценки $D\|K^n\|$ следует моделировать две условно независимые траектории при фиксированных параметрах Σ .

Отметим, что сформулированный алгоритм прямого моделирования удобен тем, что допускает использование геометрического алгоритма максимального сечения, который эффективен для моделирования свободного пробега частицы в случайной среде [6]. Этот алгоритм дополнительно упрощается, если не моделируется ветвление, а в качестве компенсации вспомогательный результирующий вес домножается на $(\sigma_s + \nu\sigma_f)/\sigma$, т.е. на условное математическое ожидание частиц, появляющихся в точке столкновения. Дисперсию алгоритма можно уменьшить, используя более сложный вариант метода “математических ожиданий” [7], в котором очередное столкновение (r, ω) моделируется в пределах рассматриваемой среды (т.е. “без вылета”) соответственно условной плотности

$$f(l; r', \omega) = \frac{\sigma(r' + \omega l) e^{-\tau(r', r' + \omega l)}}{1 - e^{-\tau(r', r' + \omega l^*)}}, \quad l < l^*,$$

где l^* — расстояние от точки r' до границы среды в направлении ω . При этом $r = r' + l\omega$ и результирующий вес домножается на $1 - e^{-\tau(r', r' + \omega l^*)}$. Отметим, что такой способ был эффективен использован в [8] для оценки спектрального радиуса оператора K_p , определяющего средний квадрат “оценки по столкновениям”.

Необходимость вычисления величины $\tau(r', r' + l\omega)$ существенно усложняет алгоритм моделирования траектории в случайно неоднородной среде, поэтому в конкретных случаях для выбора алгоритма расчёта необходимы предварительные сравнительные расчёты.

Вероятность

$$P(k_{eff}(\Sigma) > 1) \approx P(\|K^n\| > 1) = P(k_n^n > 1)$$

можно оценить, предполагая, что плотность распределения $f_n(y)$ случайной величины $\|K^n\| = k_n^n$ является приближённо гауссовской. Это предположение, в частности, выполняется, если стохастическое возмущение среды определяется большим количеством слабо зависимых случайных величин. Более точным является приближение

$$f_n(y) \approx f_{norm}(y; a, d^2) \left(1 + a_3 \psi_3 \left((y - a)/d \right) \right), \quad (5)$$

где a и d^2 — выборочные математическое ожидание и дисперсия случайной величины k_n^n , ψ_3 — полином Эрмита, ортонормированный с весом $f_{norm}(y; a, d^2)$,

$$\psi_3(z) = (z^3 - 3z)/\sqrt{6}, \quad f_{norm}(y; a, d^2) = \frac{\exp(-(y - a)^2/(2d^2))}{\sqrt{2\pi d^2}}.$$

При этом $a_3 = E_\Sigma \psi_3((k_n^n - a)/d)$. Соотношение $a_1 = a_2 = 0$ здесь является следствием использования статистических оценок параметров плотности f_{norm} . Для оценки величины a_3 можно использовать алгоритм двойной рандомизации с тремя условно независимыми траекториями Ω .

Тестовые расчёты показали медленную сходимость указанной выше последовательности $\{k_n\}$, которая, по-видимому, связана с тем, что в (2) итерации оператора K строятся, начиная с нерегулярной функции $\delta(x - x_0)$. Поэтому был построен новый алгоритм, в котором начальная точка x_0 траектории столкновений выбирается соответственно некоторой плотности $\varphi(x)$ и k_n заменяется на

$$k'_n = \left(\int (K^n \varphi)(x) dx \right)^{1/n}. \quad (6)$$

Предельное соотношение $k'_n \rightarrow k_{eff}$ здесь обосновывается по аналогии с обоснованием итераций Келлога в [2] (см. также [9], раздел 4.1) в тех же предположениях, которые обычно считаются выполненными для оператора K в интегральном уравнении переноса излучения. В качестве функции φ здесь целесообразно выбирать функцию, близкую к собственной функции оператора K_0 с осреднённым ядром, причём $\int \varphi(x) dx = 1$.

Требуемые оценки вероятностных моментов $E k_{eff}$, $E k_{eff}^2$ строятся на основе (6) с использованием приближения

$$\eta^{\frac{1}{n}} \approx \eta_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \eta_0^{-\frac{n-1}{n}} (\eta - \eta_0) + \frac{1-n}{2n^2} \eta_0^{-\frac{2n-1}{n}} (\eta - \eta_0)^2, \quad (7)$$

где η — случайная оценка величины $(k'_n)^n$, то есть $\eta_0 = E\eta = \int (K^n \varphi)(x) dx$. Отсюда имеем

$$E k_{eff} \approx (E\eta)^{1/n} + \frac{1-n}{2n^2} (E\eta)^{-(2n-1)/n} D\eta,$$

$$Dk_{eff} \approx \frac{1}{n^2} (E\eta)^{-(2n-2)/n} D\eta, \quad Ek_{eff}^2 \approx Dk_{eff} + (\eta_0)^{\frac{2}{n}},$$

причём для оценки Dk_{eff} методом рандомизации необходимо использовать две условно независимые траектории Ω_1, Ω_2 . В случае необходимости разложение (7) можно продлить до кубического слагаемого, которое оценивается с использованием $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

2 Гомогенизация случайно возмущённой среды

Далее для простоты обозначений в некоторых случаях будем полагать $k_{eff} = k$. Возможности использования гомогенизации далее будут показаны на примере случайного возмущения плотности ρ среды, то есть будет предполагаться, что $\sigma = \sigma^{(0)}\rho$, $\sigma_s = \sigma_s^{(0)}\rho$, $\sigma_f = \sigma_f^{(0)}\rho$ и $\rho = \rho(r)$ — случайная функция, такая, что $E\rho(r) = \bar{\rho}$, причём величина $d = \sqrt{D\rho(r)}$ невелика, сравнительно с $\bar{\rho}$.

Предполагается также, что существует эффективная аналитическая оценка $g(x)$ решения однородного уравнения переноса для $\rho(r) \equiv \bar{\rho}$ и соответствующее достаточно точное выражение $k_{eff} = k_{eff}(\bar{\rho})$ в подходящем интервале значений $\bar{\rho}$.

В [10] (раздел 26.1) на основе диффузионного приближения для плоского слоя среды показано, что значение k_{eff} может достаточно хорошо сохраняться, если переходить от $\rho(r)$ к постоянной плотности $\bar{\rho}$ (то есть использовать гомогенизацию) по формуле:

$$\bar{\rho} = \frac{\int \rho(r) g_0(r) dr}{\int g_0(r) dr}, \quad (8)$$

где $g_0(r) = \int g(x) d\omega$.

Для рассматриваемого варианта задачи формулу (8) можно пояснить следующим образом. Гомогенизация с сохранением значения линейного функционала [10] осуществляется по формуле вида (8) с дополнительным умножением функции g_0 на “функцию ценности”, которая равна значению функционала для источника, локализованного в точке x . В данном случае естественно определить эту функцию корнем n -й степени из интеграла в (3), предельное значение которого, соответственно сказанному в разделе 2, в достаточно широких условиях не зависит от x ; это подтверждает целесообразность использования формулы (8).

Можно предложить следующий способ тестирования этой формулы с помощью дополнительных расчётов методом Монте — Карло. Если в некоторой области D_i исходной однородной среды плотность $\rho_i = \rho$ заменяется на $\rho_i + \delta$, $|\delta| \ll 1$, то величина $[k(\rho_i + \delta) - k(\rho_i)]\delta^{-1}$ даёт оценку $k'_{\delta,i}$ соответствующей производной. Эта производная эффективно оценивается методом Монте — Карло на основе дифференцирования вспомогательного веса [11]; получаемые таким способом оценки позволяют осуществить тестирование рассматриваемого метода гомогенизации путём сравнения их с $k'_{\delta,i}$, $i = 1, 2, \dots$.

Требуемые статистические оценки моментов Ek_{eff} , Ek_{eff}^2 и вероятности $P(k_{eff} > 1)$ получаются путём многократной реализации плотности $\rho(r)$ и формулы $k_{eff}(\bar{\rho})$ для значений $\bar{\rho}$, определяемые формулой (8). Трудоемкость вычислений можно существенно сократить путём эффективного табулирования функции $k_{eff}(\bar{\rho})$.

Как показали расчёты (см. далее), предложенный здесь способ гомогенизации даёт более точные результаты, чем разработанный в [12] способ на основе линеаризации с использованием производных по ρ_i .

3 Тестовые расчёты

Для проведения тестовых расчётов рассматривалась сферически симметричная среда с кусочно-постоянной случайной плотностью $\rho = \rho(r)$ в шаре радиуса $R = 7.72043$ с макроскопическими сечениями $\rho\sigma^{(0)}$, $\rho\sigma_s^{(0)}$, $\rho\sigma_f^{(0)}$, где

$$\sigma^{(0)} = 1, \quad \sigma_s^{(0)} = 0.97, \quad \sigma_f^{(0)} = 0.03, \quad \nu = 2.5.$$

Для построения реализации среды шар делится на m одинаковых по объёму сферических слоёв, в каждом слое случайная величина $\rho \equiv \rho_i$ выбирается независимо и равномерно на отрезке $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Известно, что при $\rho \equiv \bar{\rho} = 1$ для такого шара $k_{eff} = k \approx 1$ с погрешностью около 10^{-5} .

Для такой системы были проведены расчёты величин Ek_{eff} , Ek_{eff}^2 , $P(k_{eff} > 1)$ с помощью гомогенизации случайных реализаций среды и диффузионного приближения, а также величин Ek_{eff} , Ek_{eff}^2 методом

Таблица 1: Оценки величины $(1 - \mathbb{E}k) \cdot 10^5$ методом гомогенизации

m	$(1 - \hat{\mathbb{E}}k) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.3$	$(1 - \hat{\mathbb{E}}k) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.5$
1	309.561 ± 0.146	968.085 ± 0.294
2	187.764 ± 0.112	565.694 ± 0.213
3	129.893 ± 0.092	383.935 ± 0.171
4	98.422 ± 0.080	287.566 ± 0.145
5	79.117 ± 0.071	229.222 ± 0.127
6	66.035 ± 0.065	190.183 ± 0.115
7	56.566 ± 0.060	162.270 ± 0.105
8	49.466 ± 0.056	141.443 ± 0.098
9	44.031 ± 0.052	125.475 ± 0.091
10	39.654 ± 0.049	112.697 ± 0.086
11	35.998 ± 0.047	102.160 ± 0.082
12	32.986 ± 0.045	93.462 ± 0.078

Монте — Карло. В расчетах использовался метод максимального сечения и простейший вариант метода математических ожиданий (см. раздел 1).

Как было сказано в разделе 2, гомогенизацию можно осуществлять с весом собственной функции оператора $K = K_0$, которая здесь в улучшенном диффузионном приближении равна $\sin(\mu r)/r$, где r — расстояние до центра шара, $\mu = 0.3739866$ [11]; эта функция была также использована в качестве плотности φ_0 распределения начальных точек траекторий в алгоритме метода Монте — Карло. Таким образом, для каждой реализации среды получается набор из m значений ρ_i и осреднённое значение $\tilde{\rho}$ вычисляется по формуле:

$$\tilde{\rho} = \left[\int_0^R \sin(\mu r) r dr \right]^{-1} \sum_{i=1}^m \rho_i \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sin(\mu r) r dr, \quad r_i = R (i/m)^{1/3}.$$

Соответствующая величина k_{eff} получается из диффузионного приближения [13]:

$$k_{eff}(\tilde{\rho}) = \frac{\nu \tilde{\rho} \sigma_f^{(0)} + \tilde{\rho} \sigma_s^{(0)}}{p}, \quad \frac{Rp + \alpha}{\pi} \arctg \left(\frac{\pi p}{(Rp + \alpha) \tilde{\rho} \sigma^{(0)}} \right) = 1. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = 0.71044$. Для уменьшения трудоёмкости вычислений функция $k(\tilde{\rho})$ была достаточно точно затабулирована; здесь в диффузионном приближении $k_{eff}(1) = 0.9999999 \dots$

В таблице 1 приведены оценки $1 - \hat{\mathbb{E}}k_{eff}$ значений $1 - \mathbb{E}k_{eff}$ рандомизированным методом гомогенизации при $m = 1, 2, \dots, 12$ для вариантов с $\varepsilon = 0.3, 0.5$. В качестве погрешности здесь приведена оценка величины $\sqrt{Dk_{eff}/N}$ при $N = 10^8$.

Сравнительные значения производных $\partial k_{eff}/\partial \rho_i$ приведены в таблице 2. Эти значения были получены, как указано в разделе 2: методом Монте — Карло путём дифференцирования вспомогательных весов [11] и методом рандомизированной гомогенизации с вычислением $k_{eff}(\tilde{\rho})$ для $\rho_i = 1$ и $\rho_i = 1.00001$, т.е. при $\delta = 0.00001$, $i = 1, 2, \dots$. Сравнительно плохое совпадение вариантов таких значений для двух внешних слоев объясняется увеличением погрешности диффузионного приближения вблизи границы. Хорошая, в основном, точность оценок производных методом гомогенизации показывает возможность его использования для решения рассматриваемых задач с дополнительным тестированием методом Монте — Карло.

В таблицах 3, 4 приведены оценки, полученные методом Монте — Карло (ММК) для $n = 30$ (см. соотношение (2)) и $N = 10^8$ реализаций среды, т.е. для $2N = 2 \cdot 10^8$ траекторий в алгоритме двойной рандомизации, а также соответствующие диффузионные оценки.

В таблице 5 приведены тестовые оценки величины $P(k > 1)$ на основе метода рандомизированной гомогенизации для проверки возможности использования с этой целью оценок соответствующих вероятностных моментов; при этом, согласно изложенному в разделе 1, целесообразно переходить к оценке величины $P(k^n > 1)$ на основе улучшенного нормального приближения (5) соответствующей плотности распределения. Это подтверждают результаты расчётов из таблицы 6, в первой колонке которой приведены эталонные

Таблица 2: Оценки производных $\partial k_{eff}/\partial \rho_i$ для системы из m слоёв (i считается от внутреннего к внешнему слою; $\delta = 10^{-5}$)

i	$m = 2$		$m = 12$	
	ММК	гомогенизация	ММК	гомогенизация
1	0.7823 ± 0.0127	0.7974	0.21136 ± 0.00432	0.20011
2	0.2970 ± 0.0050	0.2755	0.16202 ± 0.00336	0.16218
3			0.12707 ± 0.00282	0.13646
4			0.10585 ± 0.00217	0.11593
5			0.09229 ± 0.00189	0.09874
6			0.07968 ± 0.00170	0.08397
7			0.06636 ± 0.00151	0.07098
8			0.05947 ± 0.00124	0.05949
9			0.05153 ± 0.00104	0.04925
10			0.04437 ± 0.00060	0.04002
11			0.03940 ± 0.00063	0.03164
12			0.03362 ± 0.00043	0.02403

Таблица 3: Оценки величины $(1 - \mathbb{E}k_{eff}) \cdot 10^5$

m	$(1 - \hat{\mathbb{E}}k_{eff}) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.3$		$(1 - \hat{\mathbb{E}}k_{eff}) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.5$	
	ММК $n = 30, N = 10^8$	гомогенизация	ММК $n = 30, N = 10^8$	гомогенизация
1	278.27 ± 0.32	309.57 ± 0.14	622.74 ± 0.40	968.09 ± 0.29
2	156.56 ± 0.33	187.77 ± 0.11	362.83 ± 0.34	565.70 ± 0.21
6	63.74 ± 0.33	66.04 ± 0.06	143.53 ± 0.31	190.19 ± 0.11
12	38.51 ± 0.30	32.99 ± 0.04	91.41 ± 0.32	93.47 ± 0.07

Таблица 4: Оценки величины $(1 - \mathbb{E}k_{eff}^2) \cdot 10^5$

m	$(1 - \hat{\mathbb{E}}k_{eff}^2) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.3$		$(1 - \hat{\mathbb{E}}k_{eff}^2) \cdot 10^5, \varepsilon = 0.5$	
	ММК $n = 30, N = 10^8$	гомогенизация	ММК $n = 30, N = 10^8$	гомогенизация
1	539.70 ± 0.30	596.59 ± 0.29	1202.44 ± 0.32	1840.07 ± 0.58
2	304.38 ± 0.29	362.55 ± 0.22	702.67 ± 0.31	1082.50 ± 0.42
6	124.49 ± 0.29	127.80 ± 0.13	279.06 ± 0.29	366.72 ± 0.23
12	75.54 ± 0.29	63.89 ± 0.09	158.73 ± 0.29	180.69 ± 0.16

Таблица 5: Оценки вероятностей $P(k^n > 1), \varepsilon = 0.3$

m	гомогенизация	норм. закон, $n = 1$	норм. закон, $n = 30$	с учётом ψ_3 , $n = 30$	с учётом ψ_3 , $n = 40$
1	0.500005 ± 0.000049	0.41652	0.49295	0.49517	0.51194
2	0.500011 ± 0.000049	0.43365	0.49380	0.49642	0.50725
6	0.500013 ± 0.000049	0.45957	0.49580	0.49881	0.50173
12	0.500036 ± 0.000049	0.47111	0.49691	0.49955	0.50066

статистические оценки величины $P(k > 1)$. Следует заметить, что на основе таких предварительных модельных расчётов можно подбирать оптимальные значение n и аппроксимацию соответствующего закона распределения для оценки величины $P(k > 1)$ методом Монте — Карло, как указано в разделе 1.

Можно полагать, что с учётом погрешностей диффузионного приближения, гомогенизации, линейаризации и реализации допредельного варианта соотношения (2) согласование полученных результатов является удовлетворительным.

Список литературы

- [1] Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
- [2] Владимиров В.С. О применении метода Монте — Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения // Теория вероятностей и ее применение. 1956. Т. 1, № 1, С. 113–130.
- [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
- [4] Михайлов Г. А. Эффективные алгоритмы метода Монте — Карло для вычисления корреляционных характеристик условных математических ожиданий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17, № 1. С. 246–249.
- [5] Бреднихин С.А., Медведев И.Н., Михайлов Г.А. Оценка параметров критичности ветвящихся процессов методом Монте — Карло // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 2. С. 362–374.
- [6] Амбос А.Ю. Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и соответствующие задачи переноса излучения // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 19–32.
- [7] Ермаков С.М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
- [8] Mikhailov, G.A., Prigarin, S.M., Rozhenko, S.A. Weighted Monte Carlo estimators for angular distributions of the solar radiation reflected from a cloud layer // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2016. V. 31, № 4. P. 197–205.
- [9] Соболев И.М. Численные методы Монте — Карло. М.: Наука, 1973.
- [10] Марчук Г. И. Методы расчёта атомных реакторов. М.: Атомная энергия, 1961.
- [11] Lotova G.Z., Mikhailov G.A., Estimates of the fluctuations of criticality parameters in the particle transport process in a random medium // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2004. V. 19, № 2. P. 173–183.
- [12] Лотова Г.З., Михайлов Г.А. Моменты параметров критичности процесса переноса частиц в случайной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 12. С. 2225–2236.
- [13] Романов Ю.А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчёта диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследование критических параметров реакторных систем. М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

*Геннадий Алексеевич Михайлов — чл.-корр. РАН, Советник РАН Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный
университет;
e-mail: gam@sscc.ru;*

*Лотова Галия Зуфаровна — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: lot@osmf.sscc.ru.*

Дата поступления — 22 мая 2017 г.