

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А. О. Савченко

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 519.63

Рассматривается применимость альтернирующего метода Шварца и его модификации для решения внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Для решения задачи производится декомпозиция расчётной области на две пересекающиеся подобласти, ограниченную и неограниченную, на смежных границах которых ставятся итерлируемые интерфейсные условия. Решение задачи во внешней подобласти производится с использованием формулы Грина, что позволяет получить достаточные условия сходимости метода в случае отрицательного коэффициента в уравнении Гельмгольца. Проведено исследование сходимости частного случая проблемы, позволяющее сделать вывод о применимости предложенного подхода для решения задачи с произвольным волновым числом.

**Ключевые слова:** Внешняя краевая задача, уравнение Гельмгольца, метод декомпозиции.

## Введение

Методы декомпозиции для решения внешних краевых задач стали активно внедряться ещё в конце прошлого века (см., например, [1] и ссылки). Основная идея их использования состоит в том, чтобы разбить всю бесконечную область, где необходимо найти решение задачи, на подобласти. Одна из них также является бесконечной, но ограниченной снизу поверхностью простой формы, удобной для решения внешней задачи. Другая подобласть ограничена сверху также поверхностью простой формы, а снизу — исходной поверхностью, на которой заданы граничные условия. Решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач в этих подобластях и к нахождению граничных значений на поверхности, принадлежащей области пересечения двух подобластей. Область пересечения может состоять только из поверхности  $\partial S$  (рис. 1а, декомпозиция без пересечения), или из области, ограниченной поверхностями  $\partial\Omega$  и  $\partial S$  (рис. 1б, декомпозиция с пересечением).

Необходимо отметить, что применение итерационного подхода, являющегося альтернирующим методом Шварца, в котором последовательно пересчитываются граничные условия на вспомогательных поверхностях, для решения задачи не всегда может приводить к её решению, ввиду необходимости удовлетворения условию сходимости этого итерационного процесса.

Предлагаемый в настоящей работе подход к решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца состоит в нахождении приближённых значений искомой функции и её нормальной производной на поверхности вспомогательной сферы, заключающей в себя исходную внутреннюю границу, поскольку тогда можно найти значения функции в любой точке области, используя формулу Грина. Введение вспомогательной сферы обусловлено тем обстоятельством, что исходная поверхность может иметь достаточно произвольную форму, и нахождение на ней значений нормальной производной, являющейся в общем случае разрывной функцией, является сложной вычислительной проблемой. Для решения задачи применяется альтернирующий метод Шварца, в котором последовательно пересчитываются граничные условия на сфере  $\partial S$  и внешней вспомогательной поверхности  $\partial\Omega$ . На каждой итерации метода решаются внутренняя и внешняя краевые задачи. Решение внутренней краевой задачи производится в области, ограниченной внешней

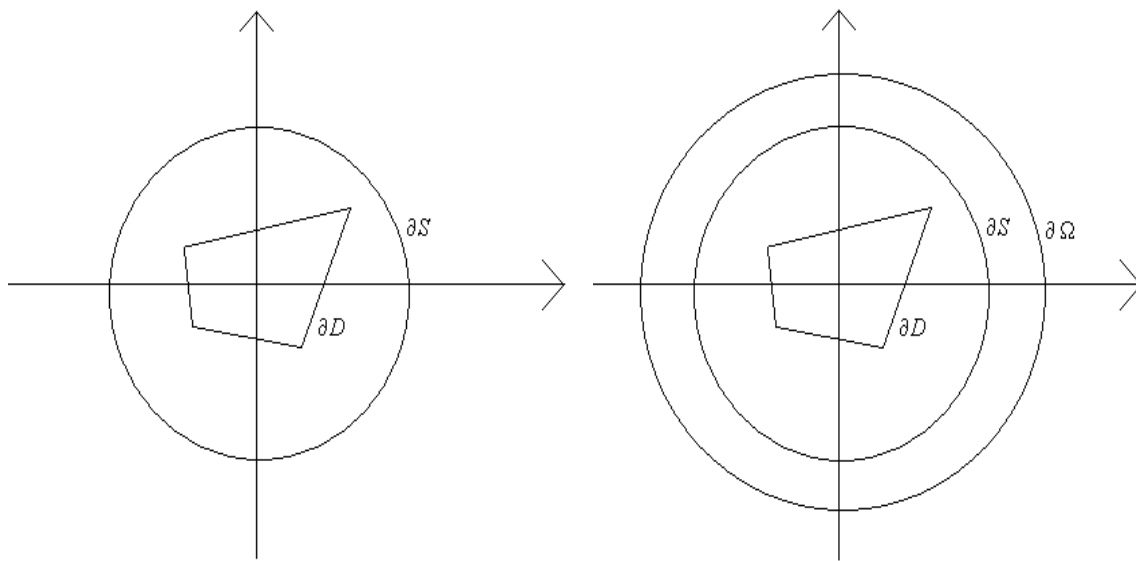


Рис. 1: a, b

вспомогательной поверхностью  $\partial\Omega$  и исходной границей  $\partial D$ , и находятся приближённые значения искомой функции и её нормальной производной на поверхности сферы  $\partial S$ . Для решения внешней задачи в области, ограниченной снизу сферой, в отличие от известных методов решения, предлагается использовать формулу Грина. Такой подход имеет следующие преимущества. Во-первых, формула Грина является более универсальной, и позволяет находить решения уравнения Гельмгольца не только при положительном коэффициенте в уравнении, но и при произвольном, в том числе комплексном. Во-вторых, эта формула не представлена в виде ряда, и поэтому нет необходимости аппроксимировать этот ряд частичной суммой, внося тем самым дополнительную погрешность в численный метод. Отметим, что в предлагаемом итерационном алгоритме искомыми значениями при решении внутренней краевой задачи будут значения функции и её нормальной производной только на сфере  $\partial S$ , а при решении внешней краевой задачи — только значения функции на поверхности  $\partial\Omega$ . Получены достаточные условия сходимости предложенного итерационного метода и оценка для производной решения уравнения Гельмгольца при отрицательном коэффициенте в этом уравнении. Проведено исследование сходимости метода для частного случая рассмотренной проблемы, которое позволило сделать выводы об ограничении применимости предложенного подхода для решения общей проблемы с произвольным волновым числом.

## 1 Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим открытую область  $D$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , ограниченную поверхностью  $\partial D$ . Внешняя краевая задача для уравнения Гельмгольца состоит в нахождении функции  $u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ , удовлетворяющей решению уравнения

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1)$$

краевому условию

$$u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad (2)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (3)$$

Задача (1)–(2) предполагается решённой, если удастся найти значения искомой функции  $u_S$  и её нормальной производной  $u_n$  на сфере  $\partial S$ , ограничивающей шар  $\bar{S} = S \cup \partial S$ ,  $\bar{D} \subset S$ . Действительно, в этом случае можно

найти значения функции в произвольной точке пространства  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  по формуле Грина

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \left[ u_n \frac{e^{ikR}}{R} - u_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] ds, \quad (4)$$

где  $r_0$  — радиус сферы  $\partial S$ ,  $\mathbf{r}_0 \in \partial S$ ,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2r_0r \cos \gamma + r_0^2}$ ,  $\gamma$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$ ,  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по нормали к поверхности в точке  $\mathbf{r}_0$ .

Формула (4) является основой для предлагаемого итерационного метода решения задачи (1)–(2), который заключается в последовательном решении вспомогательных краевых задач в ограниченной и неограниченной области.

Введём дополнительную ограниченную область  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  такую, что  $\bar{S} \subset \Omega$ . Будем решать внутреннюю краевую задачу в области  $\Omega \setminus \bar{D}$ , при заданных граничных условиях на  $\partial D$  и пересчитываемых на каждой итерации краевых условиях на  $\partial\Omega$ . На первой итерации метода задаём нулевые граничные условия на поверхности  $\partial\Omega$  и решаем внутреннюю краевую задачу для области  $\Omega \setminus \bar{D}$ . При этом нас будет интересовать полученные значения для функции и её нормальной производной только на поверхности  $\partial S$ . По этим значениям определим новые граничные условия на внешней границе расчётной области  $\partial\Omega$  по формуле (4), и проведём аналогично вторую и последующие итерации. Количество итераций  $J$  определяется по условию сходимости метода с заданной точностью  $\varepsilon \ll 1$ .

## 2 Сходимость итерационного метода

Докажем сходимость предложенного метода для решения уравнения

$$\Delta u(\mathbf{r}) - k^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями (2), (3), где  $k$  — вещественное число.

### 2.1 Итерационные формулы для искомого приближённого решения и его погрешности

Запишем формулу (4) в виде

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - u(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds,$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-kR}}{R}$ . Тогда итерационный процесс определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u^{j+1}(\mathbf{r}) - k^2 u^{j+1}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{D}, \\ u^{j+1}(\mathbf{r}) = \Phi^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial\Omega, \\ u^{j+1}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial D, \quad j = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\Phi^0(\mathbf{r}) = 0, \quad \Phi^j(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - u^j(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds, \quad (7)$$

$$\mathbf{r} \in \partial\Omega, \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определим погрешность метода как

$$\omega^j(\mathbf{r}) = u^j(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{D}, \quad (8)$$

$$\omega_n^j(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial u^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S.$$

Тогда

$$\omega^{j+1}(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \omega_n^j(\mathbf{r}_0) - \omega^j(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds \equiv \varphi^j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega, \quad (9)$$

и погрешность будет удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \Delta \omega^{j+1}(\mathbf{r}) - k^2 \omega^{j+1}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \Omega \setminus \bar{D}, \\ \omega^{j+1}(\mathbf{r}) = \varphi^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial\Omega, \\ \omega^{j+1}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial D. \end{cases} \quad (10)$$

## 2.2 Оценка производной по нормали

Для определения условия сходимости метода необходимо найти оценку для производной по нормали от решения уравнения Гельмгольца на поверхности  $\partial S$ . Обозначим за  $\rho_0$  расстояние между сферой и границей расчётной области,  $\rho_0 = \min_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ ,  $\mathbf{r} \in \partial\Omega \cup \partial D$ ,  $\mathbf{r}_0 \in \partial S$ ; а за  $u_l$  производную от функции  $u$  по направлению

$l$ ,  $u_l = \frac{\partial u}{\partial l}$ . Если функция  $u$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то и функция  $u_l$  будет удовлетворять такому же уравнению, и для любых  $\delta$ ,  $\delta \leq \rho_0$  справедлива теорема о среднем для решения уравнения Гельмгольца [2]

$$\int_{\partial S_\delta} u_l ds_\delta = u_l(\mathbf{r}_0) \frac{4\pi\delta}{k} \sin(k\delta), \quad (11)$$

где  $\partial S_\delta$  сфера радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\mathbf{r}_0$ . Проинтегрируем уравнение (11) от 0 до  $\rho$  по переменной  $\delta$ ,  $0 \leq \delta \leq \rho \leq \rho_0$ . Тогда получим

$$I_\rho = \int_{S_\rho} u_l dv_\rho = 4\pi u_l(\mathbf{r}_0) \alpha(k, \rho), \quad (12)$$

где  $S_\rho$  — шар радиуса  $\rho$ , и

$$\alpha(k, \rho) = \frac{\sin(k\rho)}{k^3} - \frac{\rho \cos(k\rho)}{k^2}. \quad (13)$$

Интегрируя равенство (12) по частям, получим

$$I_\rho = \int_{\partial S_\rho} u \frac{\partial l}{\partial n_S} ds_\rho,$$

где  $n_S$  — нормаль в текущей точке на сфере  $\partial S_\rho$ .

Произведём оценку интеграла  $I_\rho$ , что позволит не только получить искомую оценку производной в точке  $\mathbf{r}_0$ , но и уточнить оценку для производной гармонической функции, полученной в [2]. Выберем ось  $Z$  в декартовой системе координат, совпадающей с направлением  $l$ . Тогда

$$I_\rho = \rho^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi d\theta d\varphi.$$

Для оценки  $|I_\rho|$  разобьём промежутки интегрирования по переменной  $\varphi$  на интервалы  $\Phi_1 = [\pi/2, 3\pi/2]$  и  $\Phi_2 = [0, 2\pi] \setminus \Phi_1$ , на которых  $\cos \varphi$  знакопостоянная функция. Тогда

$$|I_\rho| \leq \rho^2 \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left\{ \int_{\Phi_1} |\cos \varphi| d\varphi + \int_{\Phi_2} \cos \varphi d\varphi \right\} = 8\rho^2 \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})|.$$

Отсюда, с учётом (12), следует оценка

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{2\rho^2}{\pi \alpha(k, \rho)} \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})|, \quad (14)$$

где  $\alpha(k, \rho)$  определено формулой (13).

Заметим, что правая часть неравенства (14) является функцией, зависящей от произвольного радиуса шара  $\rho$ ,  $\rho \leq \rho_0$ , и поэтому естественно выбрать этот радиус таким образом, чтобы правая часть в (14)

принимала минимальное значение. При относительно больших значениях  $k$  это можно сделать достаточно просто. Обозначим  $x = k\rho$ . Тогда, с учётом (13),

$$\frac{\rho^2}{\alpha(k, \rho)} = \frac{k x^2}{\sin(x) - x \cos(x)}. \quad (15)$$

Функция в правой части формулы (15) имеет минимум при  $x_* \approx 2.08$  и принимает в точке  $x_*$  значение  $\rho_*^2/\alpha(k, \rho_*) \approx 2.3k$ , где  $\rho_* = x_*/k$ . Тогда неравенство (14) примет вид

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq 1.465k \max_{\mathbf{r} \in \partial S_{\rho_*}} |u(\mathbf{r})|. \quad (16)$$

Если  $\rho_* > \rho_0$ , то в силу убывания функции в правой части формулы (15) на промежутке  $(0, x_*]$ , выбираем  $\rho = \rho_0$  и неравенство (14) примет вид

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{2\rho_0^2}{\pi\alpha(k, \rho_0)} \max_{\mathbf{r} \in \partial S_{\rho_0}} |u(\mathbf{r})| = \frac{2kx_0^2}{\pi(\sin(x_0) - x_0 \cos(x_0))} \max_{\mathbf{r} \in \partial S_{\rho_0}} |u(\mathbf{r})|, \quad (17)$$

где  $x_0 = k\rho_0$ .

Нетрудно показать, что  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho_0^2}{\alpha(k, \rho_0)} = \frac{3}{\rho_0}$ . Отсюда следует, что при  $k = 0$  оценка производной для

уравнения Лапласа в (17) в  $\pi/2$  раз лучше оценки  $|u_x(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{3M}{\rho_0}$ , приведённой в [2], где  $M$  максимальное по модулю значение функции  $u(\mathbf{r})$  в заданной области.

## 2.3 Сходимость метода

Найдём явный вид производной по нормали от фундаментального решения, и интегралы от фундаментального решения и от его нормальной производной по поверхности сферы.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= -\frac{\partial G}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = e^{-kR} \frac{1+kR}{R^2} \cos(\widehat{R, n}) = e^{-kR} \frac{(1+kR)(r_0^2 + R^2 - r^2)}{R^3 2r_0}, \\ I_0(\mathbf{r}) &= \int_{\partial S} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) ds = \frac{r_0}{2kr} e^{-kr} [e^{kr_0} - e^{-kr_0}], \end{aligned} \quad (18)$$

$$I_1(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) ds = \frac{1}{2kr} e^{-kr} [(1 - kr_0) e^{kr_0} - (1 + kr_0) e^{-kr_0}], \quad (19)$$

где  $r = |\mathbf{r}|$ . Нетрудно заметить, что  $I_0(\mathbf{r}) > 0$ ,  $I_1(\mathbf{r}) < 0$ , и обе функции убывают по модулю с возрастанием аргумента  $r$ .

Оценим норму погрешности метода на  $j + 1$ -ой итерации через норму погрешности на  $j$ -ой итерации. Ввиду того, что для уравнения Гельмгольца вида (5) применим принцип максимума, из (9) следует неравенство

$$\max_{\mathbf{r} \in \Omega \setminus D} |\omega^{j+1}(\mathbf{r})| \leq \max_{\mathbf{r} \in \partial S} |\omega_n^j(\mathbf{r})| \max_{\mathbf{r} \in \partial \Omega} I_0(\mathbf{r}) + \max_{\mathbf{r} \in \partial S} |\omega^j(\mathbf{r})| \max_{\mathbf{r} \in \partial \Omega} |I_1(\mathbf{r})|,$$

где интегралы  $I_0(\mathbf{r})$  и  $I_1(\mathbf{r})$  определены формулами (18), (19). Отсюда, принимая во внимание формулы (16) и (17), получаем окончательную оценку

$$\max_{\mathbf{r} \in \Omega \setminus D} |\omega^{j+1}(\mathbf{r})| \leq M(k, d, r_0, x_0) \max_{\mathbf{r} \in \Omega \setminus D} |\omega^j(\mathbf{r})|,$$

где

$$\begin{aligned} M(k, d, r_0, x_0) &= \frac{e^{-kd}}{2kd} [e^{kr_0} (kr_0 + r_0\beta - 1) + e^{-kr_0} (kr_0 - r_0\beta + 1)], \\ d &= \min_{\mathbf{r} \in \partial \Omega} |\mathbf{r}|, \quad x_0 = k\rho_0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\beta = \beta(k, x_0) = \begin{cases} \frac{2kx_0^2}{\pi(\sin(x_0) - x_0 \cos(x_0))}, & x_0 < 2.08 \\ 1.465k, & x_0 \geq 2.08 \end{cases}.$$

Таким образом, достаточным условием сходимости итерационного процесса для решения уравнения (5) будет

$$M(k, d, r_0, x_0) < 1. \quad (21)$$

### 3 Анализ сходимости частного решения с произвольным волновым числом

Проведём анализ сходимости альтернирующего метода Шварца для решения задачи (1)–(3) для частного случая, когда поверхность  $\partial D$  является сферой радиуса  $r_D$ , функция  $f$  в формуле (2) — константа, а решением задачи (1)–(3) является функция  $u(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$ .

Пусть на сфере  $\partial S$  задано некоторое начальное значение искомой функции, являющейся константой:  $u^0(r_0) = V_R^0 + iV_I^0 = \text{const}$ . Выберем в качестве области  $\Omega$  шар, ограниченный сферой радиуса  $r_\Omega$ ,  $r_D < r_0 < r_\Omega$ . Исследование сходимости сведётся к следующим шагам:

1. По заданному начальному значению искомой функции на сфере  $\partial S$  решим внешнюю задачу и найдём значение функции на сфере  $\partial\Omega$ .
2. Решим внутреннюю задачу в области  $\Omega \setminus \bar{D}$  с учётом полученного значения на  $\partial\Omega$  и заданного на  $\partial D$ , и найдём новое значение для искомой функции на сфере  $\partial S$ .
3. Сравним новые и начальные значения на сфере  $\partial S$  с точным значением и определим условия для убывания погрешности решения.

1. Решением внешней задачи для уравнения Гельмгольца вне сферы  $\partial S$  является функция  $(C_R + iC_I) \frac{e^{ikr}}{r}$ , где

$$C_R = r_0 (V_R^0 \cos(kr_0) + V_I^0 \sin(kr_0)), \quad C_I = r_0 (-V_R^0 \sin(kr_0) + V_I^0 \cos(kr_0)),$$

поэтому

$$u^1(r_\Omega) = \frac{r_0}{r_\Omega} \{V_R^0 \cos \phi - V_I^0 \sin \phi + i[V_R^0 \sin \phi + V_I^0 \cos \phi]\}, \quad (22)$$

где  $\phi = k(r_\Omega - r_0)$ .

2. Решением внутренней задачи для уравнения Гельмгольца в области  $\Omega \setminus \bar{D}$  с граничными условиями  $u^1(r_\Omega) = U_R + iU_I$  и  $u^1(r_D) = u_R + iu_I$  является функция

$$u^1(r) = [a \cos(kr) + b \sin(kr) + i\{c \cos(kr) + d \sin(kr)\}] \frac{1}{r \sin(k(r_\Omega - r_D))}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} a &= r_D u_R \sin(kr_\Omega) - r_\Omega U_R \sin(kr_D), & b &= r_\Omega U_R \cos(kr_D) - r_D u_R \cos(kr_\Omega), \\ c &= r_D u_I \sin(kr_\Omega) - r_\Omega U_I \sin(kr_D), & d &= r_\Omega U_I \cos(kr_D) - r_D u_I \cos(kr_\Omega). \end{aligned}$$

Если значения  $U_R$  и  $U_I$  определены формулой (22), а значения функции на сфере  $\partial D$  равны  $u_R = \frac{\cos(kr_D)}{r_D}$ ,

$u_I = \frac{\sin(kr_D)}{r_D}$ , то функция  $u^1(r)$  из формулы (23) примет на сфере  $\partial S$  значение

$$u^1(r_0) = \frac{V_R^1 + iV_I^1}{\sin(k(r_\Omega - r_D))},$$

где

$$\begin{aligned} V_R^1 &= a_R V_R^0 + b_R V_I^0 + c_R, & V_I^1 &= a_I V_R^0 + b_I V_I^0 + c_I, \\ a_R &= \sin(k(r_0 - r_D)) \cos \phi, & b_R &= -\sin(k(r_0 - r_D)) \sin \phi, \\ a_I &= \sin(k(r_0 - r_D)) \sin \phi, & b_I &= \sin(k(r_0 - r_D)) \cos \phi, \\ c_R &= \sin \phi \cos(kr_D)/r_0, & c_I &= \sin \phi \sin(kr_D)/r_0. \end{aligned}$$

3. Перейдём к уравнениям для погрешностей решения. Обозначим

$$\varepsilon_R^i = V_R^i - \cos(kr_0)/r_0, \quad \varepsilon_I^i = V_I^i - \sin(kr_0)/r_0, \quad i = 0, 1.$$

Тогда  $\varepsilon_R^1 = a_R \varepsilon_R^0 + b_R \varepsilon_I^0$ ,  $\varepsilon_I^1 = a_I \varepsilon_R^0 + b_I \varepsilon_I^0$ , или

$$\begin{cases} \varepsilon_R^1 = \chi [\varepsilon_R^0 \cos \phi - \varepsilon_I^0 \sin \phi] \\ \varepsilon_I^1 = \chi [\varepsilon_R^0 \sin \phi + \varepsilon_I^0 \cos \phi] \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\chi = \frac{\sin(k(r_0 - r_D))}{\sin(k(r_\Omega - r_D))}.$$

Формула (24) задаёт преобразование вращения, помноженное на постоянный множитель  $\chi$ , который и определяет сходимость метода для рассмотренного частного случая.

Условие сходимости  $|\chi| < 1$  для рассмотренной простейшей задачи имеет непростую структуру ввиду наличия бесконечного количества интервалов расходимости. Для более общего случая, скорее всего, сходимость метода (6)–(7) для решения задачи (1)–(3) имеет место только на интервалах, где выполняются определённые соотношения между входными параметрами, характеризующими поверхности  $\partial D$  и  $\partial \Omega$ , волновым числом  $k$ , и радиусом вспомогательной сферы  $r_0$ . Выбор соотношений для исходных параметров, необходимых для сходимости в общем случае, является пока открытой проблемой. По этой причине автор не рекомендует решать уравнение Гельмгольца с произвольным волновым числом, отличное от вида (5), предложенным методом.

## Список литературы

- [1] V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf. An Introduction to Domain Decomposition Methods: algorithms, theory and parallel implementation. // Master, France, <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01100932v3>, 2015.
- [2] Р. Курант, Д. Гилберт. Методы математической физики. Том 2. // М., Мир, 1964, 830 стр.

*Александр Оливерович Савченко — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: savch@ommfao1.ssc.ru.  
Дата поступления — 5 мая 2017 г.*