

СТРУКТУРИРОВАНИЕ ПАМЯТИ В АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ ПЕРЕНОСА

Н. С. Аркашов, В. А. Селезнев

Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск

УДК 519.246

На основании феноменологии потока памяти структурируется память аномального процесса переноса в дискретном времени, для которого нелинейность по времени среднего квадрата формируется за счет пространственно-временных нелокальностей. Приведен статистический тест, который на определенном уровне значимости позволяет вычислить параметры, измеряющие пространственную нелокальность и временную память процесса. Рассматриваемая модель реализует один из способов структурирования памяти в аномальных процессах переноса.

Ключевые слова: аномальный перенос, диффузия, дробное броуновское движение, нелокальность, параметры нелокальности.

1 Модель блуждания

В работе построен случайный процесс, который позволяет моделировать процессы аномальной диффузии таким образом, чтобы учитывать одновременно структуру последовательности, определяемую степенной функцией, и корреляционные свойства процесса. Мотивацией для рассмотрения таких процессов является то, что разнообразные методы моделирования аномальной диффузии связаны со следующими свойствами соответствующих процессов: сильная форма зависимости приращений; нестационарность приращений (см., например, [1]–[3]). Известными примерами таких процессов являются модели блуждания в непрерывном времени (общепринятая аббревиатура CTRW), фрактальное (дробное) броуновское движение (см., например, [4]–[6]). На сегодняшний день по всей видимости не существует форматов моделирования, охватывающих все указанные свойства (см., например, [3]).

Классическая модель одномерного блуждания реализуется в виде суммы: $R_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 0$, $X_0 = 0$, где $(X_n)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и ненулевой дисперсией σ^2 . Дискретную скорость блуждающей точки в моменты времени $n \geq 1$ представим в безразмерном виде $v(n) = R_n - R_{n-1} = X_n$, положим $v(0) = 0$.

Тогда изменение импульса материальной точки единичной массы в единицу времени примет вид:

$$\Delta v(k) = \Delta X_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

где $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$. Кроме того, положим $\Delta X_0 = 0$, соответственно при этом $\Delta v(0) = 0$.

В данной работе мы откажемся от условия независимости и одинаковой распределенности случайных величин $(X_n)_{n \geq 1}$, заменив его на более слабое условие стационарности последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$, при этом элементы этой последовательности становятся вообще говоря *зависимыми*.

Последовательность $(\Delta X_k)_{k \geq 0}$ в силу (1) определяет воздействие среды на блуждающую частицу, при этом последовательность $(\Delta X_k)_{k \geq 2}$ является стационарной в силу стационарности последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$. Отметим, что отказ от условия независимости случайных величин $(X_n)_{n \geq 1}$ соответствует *нелокальности по времени воздействия среды на частицу*.

При условии стационарности последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$ в широких предположениях можно считать, что $(X_n)_{n \geq 1}$ задается следующим образом (см., например, [7], теорема 16.7.1))

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} a_k, \quad (2)$$

где $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией и $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ — неслучайная суммируемая с квадратом последовательность действительных чисел.

Мы несколько сузим общность представления (2). В качестве (ξ_k) будем рассматривать последовательность независимых одинаково распределенных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией, а в качестве (a_k) возьмем такую последовательность: $a_k = \sigma L_H^{-1/2}((k+1)^{H-1/2} - k^{H-1/2})$, $k \geq 1$, $a_0 = \sigma L_H^{-1/2}$ и $a_k = 0$, $k < 0$, где H — некоторый параметр, такой что $0 < H < 1$, σ — ненулевая константа и $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$. В случае $H = 1/2$, получаем, что $a_0 = \sigma$ и $a_k = 0$ при всех $k \neq 0$, в этом случае $X_n = \sigma \xi_n$, $n \geq 1$ — снова обычная последовательность независимых одинаково распределенных величин.

Выбор последовательности (a_k) мотивирован тем, что

$$\langle (\sum_{i=1}^n X_i)^2 \rangle \sim \sigma^2 n^{2H}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

т. е. с помощью такой последовательности мы можем моделировать весь содержательный спектр степенного изменения второго момента суммы $\sum_{i=1}^n X_i$ (см. [8], [9]).

Для реализации памяти частицы о воздействиях среды воспользуемся феноменологией потока памяти, следуя [10], [11], и заменим представление изменения импульса (1) следующим:

$$\Delta v(k) = \Delta X_k + \sum_{i=1}^k \Delta X_{k-i} p(i), \quad (4)$$

где $(p(i))_{i \geq 1}$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел. Положим $p(0) = 1$, тогда (4) перепишется в виде

$$\Delta v(k) = \sum_{i=0}^k \Delta X_{k-i} p(i), \quad (5)$$

Значение $p(i)$ в (5) будем называть памятью (или информацией) частицы в текущий момент времени k о $(k-i)$ -ом моменте времени предыстории, при этом память частицы заканчивается моментом времени 0 (соответствующее значение памяти равно $p(k)$). Принципиально иная ситуация реализуется представлением (2), в этом представлении «память среды» может не ограничиваться некоторым начальным моментом времени.

Последовательность $(p(i))_{i \geq 0}$ представляет память частицы о воздействиях среды и определяет вообще говоря *нелокальность памяти частицы по времени*.

Отметим, что формула (5) реализует «перемешивание» памяти частицы о воздействиях среды и нелокальности по времени воздействия среды.

Для каждого $i \geq 0$ значение $p(i)$ будем искать в виде $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$, где M — некоторая неубывающая на неотрицательной полуоси функция, при этом для удобства будем считать, что $M(0) = 0$, соответственно при этом $M(1) = 1$. Стало быть, соотношение (5) эквивалентно следующему

$$\Delta v(k) = \sum_{i=0}^k \Delta X_{k-i} \Delta M(i). \quad (6)$$

Из (6) выводим

$$v(k) = \sum_{i=0}^k X_{k-i} \Delta M(i), \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Теперь процесс блуждания с памятью реализуется в виде следующего процесса частных сумм

$$R_n = \sum_{i=0}^n v(i), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Последовательность R_n , построенную по функции M , будем обозначать через $R_n(M)$.

1.1 Формирование параметров памяти

В следующей теореме рассматривается произвольная возрастающая на положительной полуоси, ограниченная функция M , такая что $M(0) = 0$ и $M(1) = 1$.

В дальнейшем будем писать $g(n) \asymp f(n)$, если $g(n) = O(f(n))$ и $f(n) = O(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) < +\infty$. Тогда $\langle R_n^2(M) \rangle \asymp n^{2H}$.

Из теоремы 1 следует, что аномальность блуждания $R_n(M)$, в условиях теоремы 1, определяется нелокальностью воздействия среды на частицу. В этом случае можно говорить о «короткой памяти» частицы.

Через S_α обозначим степенную функцию с показателем α : $S_\alpha(t) = t^\alpha$, $\alpha \geq 0$ (считаем, что $S_0(0) = 0$). В случае $M = S_1$ выполняется равенство $S_1(i+1) - S_1(i) = 1$ для любого $i \geq 0$, т. е. можно говорить о полном сохранении информации о предыстории.

Рассмотрим случай степенной функции $M = S_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Имеет место соотношение $S_\alpha(i+1) - S_\alpha(i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$, чему можно придать смысл «старения информации» о предыстории. В дальнейшем для степенной функции S_α мы будем рассматривать именно случай $0 \leq \alpha \leq 1$, что соответствует представлению об уменьшении (возможно, в не строгом смысле) информации о предыстории.

Теорема 2. При $n \rightarrow +\infty$ выполняется следующее асимптотическое соотношение:

$$\langle R_n^2(S_\alpha) \rangle \sim \sigma^2 s_{\alpha,H}^2 n^{2\alpha+2H},$$

$$\text{где } s_{\alpha,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dS_\alpha(u) dS_\alpha(v).$$

Отметим, что в теореме 2 параметр H отвечает за нелокальность воздействия среды, а параметр α отвечает за нелокальность памяти частицы.

2 Предельная теорема. Метод тестирования адекватности модели

Через $B_H(t)$ обозначим так называемое дробное броуновское движение (см. [14]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad 0 < H < 1. \quad (9)$$

Легко видеть, что случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу. Стандартный винеровский процесс будем обозначать через $W(t)$.

Отметим известное свойство H -однородности дробного броуновского движения (см. [14]): для любого $\lambda > 0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H(\lambda t)\}$ и $\{\lambda^H B_H(t)\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H имеет стационарные приращения.

Определим гауссовский процесс: $Z_{t,H}(M) = \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s)$. В дальнейшем, там где это не вызывает двусмысленностей, мы будем опускать индекс H в обозначении $Z_{t,H}(M)$.

Через $[t]$ в дальнейшем обозначается целая часть числа t .

Теорема 3. Если $\langle |\xi_1|^\beta \rangle < \infty$ для некоторого $\beta > \max\{2, 1/H\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение:

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[nt]}(S_\alpha)|}{n^{H+\alpha}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(S_\alpha)|.$$

На теореме 3 основывается возможное тестирование адекватности предложенных моделей блуждания, а также вычисление параметров нелокальности.

Метод тестирования адекватности модели. Пусть для определенности мы проверяем адекватность данных, полученных в результате эксперимента, модели блуждания со степенной памятью. Обозначим полученную в ходе эксперимента выборку через (R_1, R_2, \dots, R_n) . Будем считать, что $\langle R_n \rangle = 0$ для любого n , кроме того, пусть известны оценки k и γ для параметров степенного изменения $\langle R_n^2 \rangle$, т. е. $\langle R_n^2 \rangle \approx k^2 n^{2\gamma}$. Таким образом, мы располагаем оценкой k для коэффициента $\sigma s_{\alpha,H}$, а также оценкой γ для $\alpha + H$ (см. теорему 2).

На выборке (R_1, R_2, \dots, R_n) вычислим значение $r = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[nt]}|}{n^\gamma}$. Поскольку нам известна лишь оценка для показателя степенного изменения $\langle R_n^2 \rangle$, но не известны слагающие ее параметры α и H , то для поиска этих параметров сформируем массивы значений $\{\alpha_l\}_{l \in \mathcal{M}} \subset (0, 1]$ и $\{H_l\}_{l \in \mathcal{M}} \subset (0, 1)$, где \mathcal{M} — некоторое множество индексов, такое что $\alpha_l + H_l = \gamma$ для любого $l \in \mathcal{M}$. Выберем уровень значимости ε . Обозначим $\Psi_{\alpha, H}(z) = \mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |Z_{t, H}(S_\alpha)| < z)$.

Далее, для каждого $l \in \mathcal{M}$ найдем $t_1(l)$ и $t_2(l)$, такие что

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |Z_{t, H_l}(S_{\alpha_l})| \in [t_1(l), t_2(l)]) = 1 - \varepsilon.$$

Для этого достаточно решить два уравнения:

$$\Psi_{\alpha_l, H_l}(t_1(l)) = \varepsilon/2 \quad (10)$$

и

$$\Psi_{\alpha_l, H_l}(t_2(l)) = 1 - \varepsilon/2. \quad (11)$$

Если найдется пара (α_l, H_l) , для которой $r \in [t_1(l), t_2(l)]$, то можно говорить об адекватности на уровне ε проверяемой модели экспериментальным данным.

Заметим, что условие $r \in [t_1(l), t_2(l)]$ эквивалентно неравенству $\varepsilon \leq 2 \min\{1 - \Psi_{\alpha_l, H_l}(r), \Psi_{\alpha_l, H_l}(r)\}$. Вычислим $\varepsilon^* = 2 \max_{l \in \mathcal{M}} \min\{1 - \Psi_{\alpha_l, H_l}(r), \Psi_{\alpha_l, H_l}(r)\}$, при этом пусть на паре (α_{l^*}, H_{l^*}) достигается этот максимум. В итоге, мы получим реально достигнутый уровень значимости ε^* , на котором можно говорить об адекватности модели (см. замечание 1). Кроме того, отметим, что метод тестирования приводит к определению параметров нелокальности, а именно: параметра нелокальности памяти частицы α_{l^*} и параметра нелокальности среды H_{l^*} .

Замечание 1. Численно моделируя достаточно большое количество траекторий гауссовского процесса $Z_{t, H_l}(S_{\alpha_l})$ (см. замечание 2), и, вычисляя на каждой траектории $\sup_{t \in [0,1]} |Z_{t, H_l}(S_{\alpha_l})|$, можно с некоторым приближением найти $\Psi_{\alpha_l, H_l}(r)$ и, стало быть, ε^* .

Замечание 2. Отметим следующее представление $Z_{t, H}(M)$ (см. [15]) в виде стохастического интеграла по винеровскому процессу (это представление можно использовать для численного моделирования $Z_{t, H}(M)$, рассматрив соответствующую дискретизацию интеграла)

$$Z_{t, H}(M) = \sigma \int_0^t R_H(t, u) dW(u). \quad (12)$$

Ядро интеграла в (12) имеет вид: $R_H(t, u) = \int_0^{t-u} K_H(t-s, u) dM(s)$, где $K_H(t, s) = c_H(t-s)^{H-1/2} + c_H(1/2-H) \int_s^t (u-s)^{H-3/2} (1-(s/u)^{1/2-H}) du$, константа c_H задается таким образом $c_H = \left(\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$, где Γ — гамма-функция Эйлера.

Заключение

В рамках феноменологии потока памяти (см. [10], [11]) построена одномерная модель случайного блуждания, для которой в условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим. Показатель степенного изменения дисперсии построенного процесса блуждания складывается из удвоенного параметра нелокальности воздействия среды и удвоенного параметра памяти частицы. Далее, вычисленные параметры нелокальности можно использовать для прямого стохастического моделирования процесса блуждания с соответствующими параметрами нелокальности и законом изменения дисперсии. Отметим, что, например, структурная ионно-звуковая турбулентность является вероятностным процессом с памятью, поэтому полученную модель можно использовать для моделирования временного ряда плотности турбулентной плазмы.

Список литературы

- [1] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Сиб. мат. журнал. 2013. Т. 54, № 6. С. 1216–1236.

- [2] Зеленый Л. М., Милованов А. В. УФН. 2004. Т. 174, № 8. С. 809–852.
- [3] Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика: пер. с англ. М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2010.
- [4] Metzler R., Klafter J., Physics Reports. 2000. V. 339, P. 1–77.
- [5] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. ТВП. 2015. Т. 60, № 2. С. 209–226.
- [6] Milovanov A., Lomin A. Phys. Rev. E. 2014. V. 89, iss. 6. P. 062921.
- [7] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
- [8] Аркашов Н. С., Борисов И. С. Сиб. мат. журнал. 2004. Т.45, № 6. С. 1221–1255.
- [9] Konstantopoulos T., Sakhanenko A. Сиб. электронные матем. известия. 2004. Т.1. С. 47–63.
- [10] Нигматуллин Р. Р. ТМФ. 1992. Т. 90, № 3. С. 354–368.
- [11] Олемской А. И., Флат А. Я. УФН. 1993. Т. 163, № 12. С. 1–50.
- [12] Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York: Springer, 2008.
- [13] Горин Е. А., Кукушкин Б. Н. Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 3. С. 188–220.
- [14] Mandelbrot B., Van Ness J. SIAM Review. 1968. V. 10. P. 422–437.
- [15] Alós E., Mazet O., Nualart D. Ann. Probab. 2001. Vol. 29, № 2. P. 766–801.

*Николай Сергеевич Аркашов — к.ф.-м.н., зав. каф. высшей математики
Новосибирского государственного технического университета;*

e-mail: nicky1978@mail.ru;

*Селезнев Вадим Александрович — д.ф.-м.н., зав. каф. инженерной математики
Новосибирского государственного технического университета;*

e-mail: selvad@ngs.ru.

Дата поступления — 24 мая 2017 г.