

РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ЭНТРОПИЙНОГО НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СХЕМЫ КАБАРЕ

Н. А. Зюзина¹, В. В. Остапенко^{1,2}

¹ *Институт гидродинамики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.63

Для схемы КАБАРЕ получен разностный аналог энтропийного неравенства и предложен метод, обеспечивающий в разностном решении полный распад неустойчивых сильных разрывов для любых чисел Куранта, при которых схема КАБАРЕ является устойчивой. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие данные свойства схемы КАБАРЕ.

Ключевые слова: монотонная схема КАБАРЕ, скалярный закон сохранения, сильный разрыв, разностный аналог энтропийного неравенства.

Введение

Для численного решения гиперболических уравнений была предложена трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Upwind Leapfrog [1], которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах Куранта $r \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы был проведен в работах [2] и [3], в которых с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона она была названа схемой КАБАРЕ. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта $r = 0.5, 1$, что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами [3]. Для численного моделирования гидродинамических течений широко применяется двухслойная по времени форма записи схемы КАБАРЕ [4]. Монотонность этой схемы при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [5] и [6], а в двумерном — в [7]. Условия монотонности двухслойной по времени схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком, исследовались в [8] и [9].

В настоящей работе изучается схема КАБАРЕ, аппроксимирующая скалярный закон сохранения с выпуклым потоком, в случае, когда скорость распространения характеристик аппроксимируемого дивергентного уравнения является положительной. Показано, что стандартная схема КАБАРЕ [4] при числах Куранта $r \in (0.5, 1]$ не обеспечивает полного распада неустойчивых сильных разрывов в начальных данных. Для схемы КАБАРЕ получен разностный аналог энтропийного неравенства, с учетом которого предложен метод, гарантирующий монотонность этой схемы и одновременно обеспечивающий полный распад неустойчивых сильных разрывов в ее разностных решениях для любых чисел Куранта, при которых схема КАБАРЕ является устойчивой. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие данные свойства схемы КАБАРЕ.

1 Стандартная и монотонная схемы КАБАРЕ

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00333).

со строго монотонно возрастающей и строго выпуклой функцией потока $f(v)$:

$$a(v) = f'(v) > 0, \quad a'(v) = f''(v) > 0.$$

Аппроксимируем эту задачу двухслойной по времени схемой КАБАРЕ, заданной на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\} : x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (2)$$

в которой h — постоянный шаг сетки по пространству, а τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = rh / \max_j |a_{j+1/2}^n|, \quad (3)$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта, $a_{j+1/2}^n = a(U_{j+1/2}^n)$. В этой схеме используются потоковые $u_j^n = u(x_j, t_n)$ и консервативные $U_{j+1/2}^n = u(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные соответственно в целых x_j и полуцелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ пространственных узлах разностной сетки.

Пусть $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ — известное численное решение задачи (1) на n -ом временном слое t_n , при $n = 0$ — сеточная аппроксимация начальной функции $v_0(x)$. Численное решение $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} находится по стандартной схеме КАБАРЕ [4] в три этапа. На первом этапе по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0, \quad (4)$$

где $f_j^n = f(u_j^n)$, вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2} = U(x_{j+1/2}, t_{n+1/2})$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На втором этапе путем экстраполяции

$$\bar{u}_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \quad (5)$$

находятся предварительные значения потоковых переменных \bar{u}_{j+1}^{n+1} , которые корректируются по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = F\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n\right), \quad (6)$$

где

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (7)$$

$$m_{j+1/2}^n = \min(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n), \quad M_{j+1/2}^n = \max(u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n). \quad (8)$$

На третьем, заключительном этапе, по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = 0 \quad (9)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$ на $(n+1)$ -ом временном слое t_{n+1} .

В работе [8] показано, что стандартная схема КАБАРЕ (4)–(9) является немонотонной и предложена ее монотонная модификация, содержащая четыре этапа. В настоящей работе на втором и четвертом этапах мы модифицируем алгоритм, предложенный в [8]. На первом этапе по разностным уравнениям (4) вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1/2}$. На втором этапе по формуле (5) находятся величины \bar{u}_{j+1}^{n+1} , используемые для определения предварительных значений потоков

$$\bar{f}_{j+1}^{n+1/2} = f\left(\bar{u}_{j+1}^{n+1/2}\right), \quad \bar{u}_{j+1}^{n+1/2} = (u_{j+1}^n + \bar{u}_{j+1}^{n+1})/2, \quad (10)$$

которые корректируются по формуле

$$f_{j+1}^{n+1/2} = F\left(\bar{f}_{j+1}^{n+1/2}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n\right), \quad (11)$$

где

$$m_{j+1/2}^n = \min \left(f_{j+1/2}^n, \max(f_{j+1}^n, \varphi_{j+1/2}^n) \right), \quad M_{j+1/2}^n = \max \left(f_{j+1/2}^n, \min(f_{j+1}^n, \varphi_{j+1/2}^n) \right), \quad (12)$$

$$f_{j+1/2}^n = f(U_{j+1/2}^n), \quad \varphi_{j+1/2}^n = \frac{U_{j+1/2}^n - u_j^n}{r_n} + f_j^n, \quad r_n = \frac{\tau_n}{h}. \quad (13)$$

На третьем этапе по разностным уравнениям типа "крест"

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_j^n}{\tau_n} + \frac{f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}}{h} = 0 \quad (14)$$

вычисляются значения консервативных переменных $U_{j+1/2}^{n+1}$. На четвертом этапе по формулам

$$\tilde{u}_j^{n+1} = 2u_j^{n+1/2} - u_j^n, \quad u_j^{n+1/2} = f^{-1}(f_j^{n+1/2}) \quad (15)$$

где f^{-1} — функция, обратная к f , находятся вторые предварительные значения потоковых переменных на $(n+1)$ -ом временном слое, которые корректируются по формуле

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} F(\tilde{u}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), & a_{j-1/2}^{n+1} \geq a_{j+1/2}^{n+1}, \\ \frac{1}{2} (U_{j-1/2}^{n+1} + U_{j+1/2}^{n+1}), & a_{j-1/2}^{n+1} < a_{j+1/2}^{n+1}, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$m_j^{n+1} = \min \left(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1} \right), \quad M_j^{n+1} = \max \left(U_{j-1/2}^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1} \right). \quad (17)$$

2 Распад неустойчивого сильного разрыва

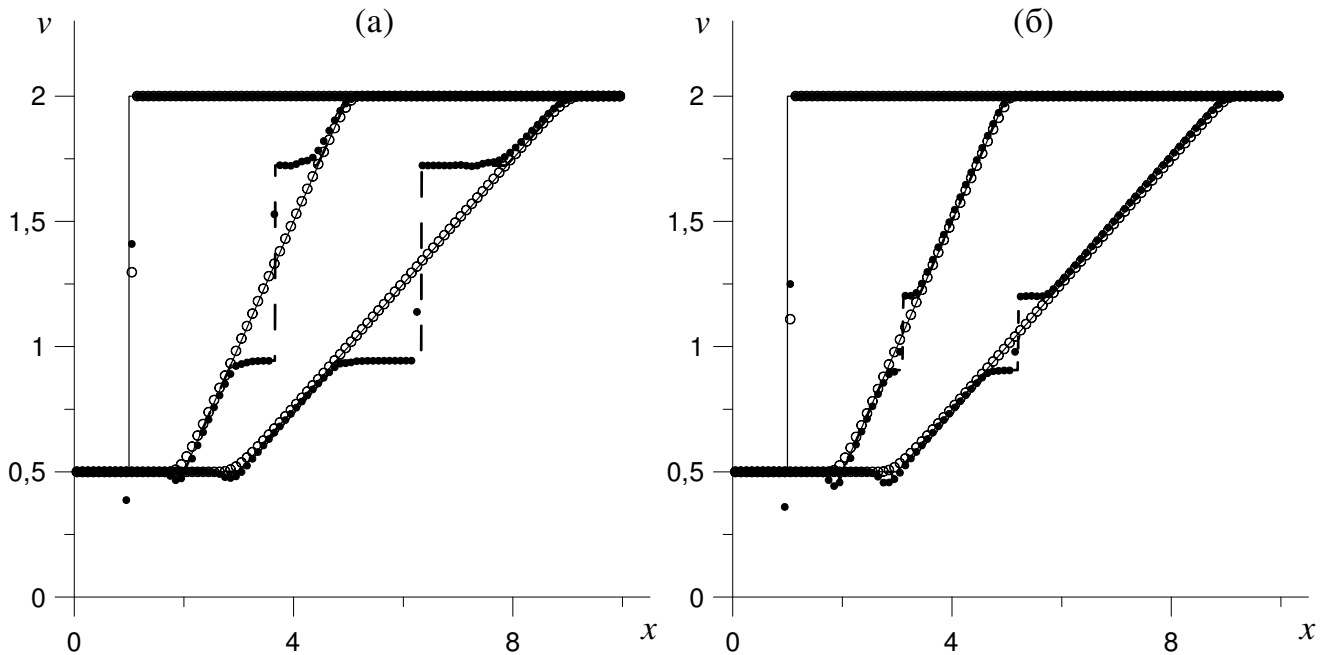


Рис. 1: Сравнение точного и численных решений задачи (1), (18) на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ при числах Куранта $r = 0.75$ (а) и $r = 0.95$ (б). Точки — стандартная схема КАБАРЕ, кружки — монотонная схема КАБАРЕ.

На рис. 1 на три последовательных момента времени $t = \tau$, $t = 2$ и $t = 4$ приведено сравнение точного и численного решений задачи Коши (1), для которой

$$f(v) = \frac{v^2}{2}, \quad v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Начальная функция $v_0(x)$ имеет в точке $x = 1$ неустойчивый сильный разрыв, который при $t > 0$ преобразуется в центрированную волну разрежения, показанную на рис. 1 сплошными линиями. Расчеты проводились по схемам КАБАРЕ на разностной сетке (2), (3), где $h = 0.1$, $r = 0.75$ (рис. 1а) и $r = 0.95$ (рис. 1б), со следующими сеточными начальными данными

$$U_{j+1/2}^0 = v_0(x_{j+1/2}), \quad u_j^0 = \frac{U_{j-1/2}^0 + U_{j+1/2}^0}{2}. \quad (19)$$

Точками изображены результаты расчета консервативной переменной $U_{j+1/2}^n$ по стандартной схеме (4)–(9), а кружками — по монотонной схеме (4), (5), (10)–(17).

Из рис. 1 видно, что стандартная схема КАБАРЕ (в отличие от монотонной схемы) существенно искажает профиль точного решения, не обеспечивая полного распада неустойчивого сильного разрыва, за фронтом которого в этой схеме возникает нефизическая осцилляция, которая с течением времени постепенно сглаживается. При этом численные расчеты, проведенные на последовательности сгущающихся сеток, показали, что разностное решение, получаемое по монотонной схеме, при $h \rightarrow 0$ сходится к непрерывному решению аппроксимируемой задачи (1), (18), в то время как разностное решение, получаемое по стандартной схеме, при $h \rightarrow 0$ сходится к другому решению, содержащему неустойчивый сильный разрыв (на рис. 1 это решение показано пунктирными линиями). Теоретическое объяснение данных результатов дается в следующем разделе.

3 Разностный аналог энтропийного неравенства

Дифференциальным следствием уравнения (1) является дивергентное дифференциальное уравнение

$$V(v)_t + F(v)_x = 0, \quad V(v) = v^2/2, \quad F(v) = \int a(v)vdv, \quad (20)$$

получаемое в результате умножения уравнения (1) на функцию $v(x, t)$. Поскольку функция $V(v)$ является выпуклой, то уравнение (20) представляет собой выпуклое расширение [10] базисного закона сохранения (1), которое в форме интегрального (энтропийного) неравенства

$$\oint_{\partial S} V(v)dx - F(v)dt \leq 0 \quad (21)$$

можно использовать для отбора устойчивых сильных разрывов [11], [12]. Во многих работах, например [13]–[15], при построении разностных схем повышенной точности для обеспечения распада неустойчивых сильных разрывов используются различные варианты разностного аналога энтропийного неравенства.

Применим разностный аналог энтропийного неравенства (21) для обоснования результатов численных расчетов, приведенных в предыдущем разделе. Умножая разностное уравнение (4) на сеточную функцию

$$\hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_{j+1/2}^n + U_{j+1/2}^{n+1}), \quad (22)$$

получим, что для монотонной схемы КАБАРЕ разностное уравнение, аппроксимирующее дополнительный закон сохранения (20), имеет вид

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2})}{h} = 0,$$

где $V_{j+1/2}^n = V(U_{j+1/2}^n)$. Перепишем это уравнение в стандартной форме

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{F_{j+1}^{n+1/2} - F_j^{n+1/2}}{h} = \frac{\psi_{j+1/2}^{n+1/2}}{h}, \quad (23)$$

где

$$F_j^{n+1/2} = F(u_j^{n+1/2}), \quad \psi_{j+1/2}^{n+1/2} = \int_{u_{j+1/2}^{n+1/2}}^{u_{j+1}^{n+1/2}} a(u)udu - \hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (f_{j+1}^{n+1/2} - f_j^{n+1/2}).$$

Для получения разностного уравнения, аппроксимирующего дополнительный закон сохранения (20) в случае стандартной схемы КАБАРЕ необходимо сеточную функцию (22) умножить на полусумму уравнений (4) и (9), т.е. на симметричное разностное уравнение

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2}}{h} = 0,$$

где $\hat{f}_j^{n+1/2} = (f_j^n + f_j^{n+1})/2$. В результате получаем уравнение

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\tau_n} + \frac{\hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2})}{h} = 0,$$

при записи которого в стандартной форме (23) имеем

$$\psi_{j+1/2}^{n+1/2} = \int_{\hat{u}_j^{n+1/2}}^{\hat{u}_{j+1}^{n+1/2}} a(u) u du - \hat{U}_{j+1/2}^{n+1/2} (\hat{f}_{j+1}^{n+1/2} - \hat{f}_j^{n+1/2}), \quad \hat{u}_j^{n+1/2} = \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}.$$

Предположим, что задача Коши (1), (18) численно решается в сеточной области, содержащей $M+1$ пространственный узел $x_j = jh$, где $j = 0, M$. Поскольку максимальное значение точного решения этой задачи равно 2, то шаг по времени с учетом условия устойчивости (3) возьмем постоянным $\tau_n = \tau = r/20$. Суммируя разностное уравнение (23), умноженное на h и $\tau_n = \tau$, по пространственным узлам и временным слоям, получаем

$$h \sum_{j=0}^{M-1} (V_{j+1/2}^N - V_{j+1/2}^0) + \tau \sum_{n=0}^{N-1} (F_M^{n+1/2} - F_0^{n+1/2}) = \tau W_N, \quad (24)$$

где

$$W_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (25)$$

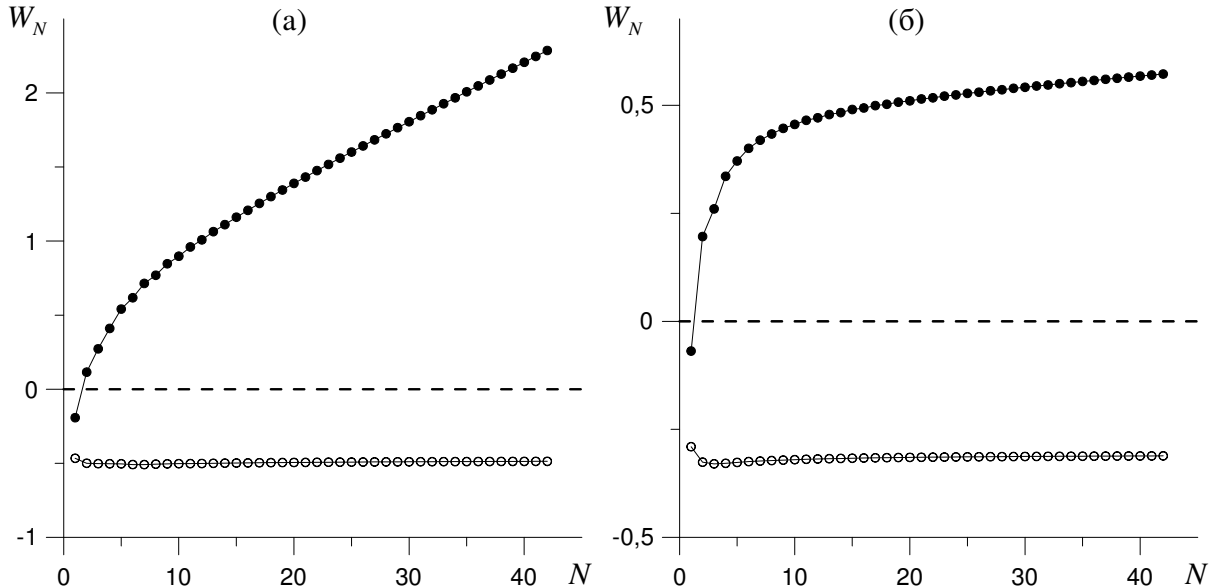


Рис. 2: Графики сеточной функции (25), задающей дисбаланс разностного энтропийного закона сохранения при численном решении задачи (1), (18) для чисел Куранта $r = 0.75$ (а) и $r = 0.95$ (б). Точки — стандартная схема КАБАРЕ, кружки — монотонная схема КАБАРЕ.

Из уравнения (24) следует, что условие $W_N \leq 0$ представляет собой разностный аналог энтропийного неравенства (21) в прямоугольной области $S = \{(x, t) : 0 \leq x \leq Mh, 0 \leq t \leq N\tau\}$. На рис. 2 для стандартной

(точки) и монотонной (кружки) схем КАБАРЕ приведены графики сеточной функций W_N , задающей дисбаланс разностного энтропийного закона сохранения. Из этого рисунка следует, что в отличие от монотонной, стандартная схема КАБАРЕ при $N \geq 2$ не удовлетворяет разностному аналогу энтропийного неравенства $W_N \leq 0$, что и приводит к формированию неустойчивых сильных разрывов в ее разностном решении.

Применим монотонную схему КАБАРЕ для численного решения задачи Коши (1), в которой

$$f(v) = \frac{v^2}{2}, \quad v_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 6, & 1 \leq x < 3.5, \\ 1, & 3.5 \leq x < 6, \\ 3, & x \geq 6. \end{cases} \quad (26)$$

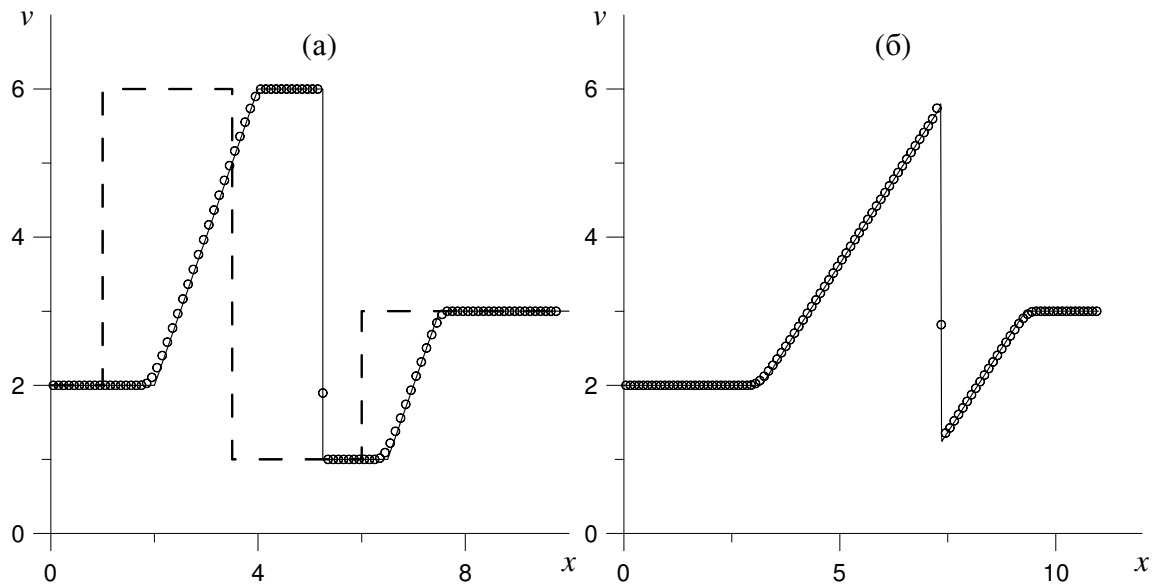


Рис. 3: Сравнение точного и численного решений по монотонной схеме КАБАРЕ задачи (1), (26) на два последовательных момента времени $t = 0.5$ (а) и $t = 1.1$ (б) при числе Куранта $r = 0.95$.

Начальная функция этой задачи имеет один устойчивый и два неустойчивых сильных разрыва. На рис. 3 на два последовательных момента времени приведены результаты численного решения задачи Коши (1), (26) на разностной сетке (1.3), (1.4), где $h = 0.1$ и $r = 0.95$. Пунктирной линией показана начальная функция, сплошными линиями приведено точное решение, а кружками изображены значения консервативной переменной $U_{j+1/2}^n$, получаемые при численном решении, в котором сеточные начальные данные задаются по формулам (19). Из рис. 3 следует, что разностное решение, получаемое по монотонной схеме КАБАРЕ (при числе Куранта близком к максимальному значению $r = 1$, допустимому условию устойчивости) не имеет схемных осцилляций, хорошо воспроизводит профили центрированных волн разрежения, возникающих из неустойчивых сильных разрывов начальных данных, и сохраняет повышенную точность при локализации сильных и слабых разрывов точного решения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00333).

Список литературы

- [1] Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. V. 6. N. 3. P. 381–392.
- [2] Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
- [3] Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы "Кабаре" // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.

- [4] Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд. МГУ, 2013.
- [5] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности двухслойной по времени схемы кабаре // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 9. С. 97–112.
- [6] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815.
- [7] Ковыркина О. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае // ДАН. 2015. Т. 462. № 4. С. 385–390.
- [8] Зюзина Н. А., Остапенко В. В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // ДАН. 2016. Т. 466. № 5.
- [9] Зюзина Н. А., Остапенко В. В. Монотонная аппроксимация схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 375–379.
- [10] Friedrichs K. O., Lax P. D. Systems of conservation equation with convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci: USA. 1971. V. 68. N 8. P. 1686–1688.
- [11] Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math., 1972.
- [12] Остапенко В. В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск, НГУ, 2014.
- [13] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
- [14] Остапенко В. В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. Т. 42. № 7. С. 1018–1037.
- [15] Fisher T. C., Carpenter M. H. High-order entropy stable finite difference schemes for nonlinear conservation laws: finite domains. Hampton, Virginia: Langley Research Center, 2013.

*Надежда Александровна Зюзина — аспирант Института
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН;
e-mail: nzyuzina1992@gmail.com;*

*Владимир Викторович Остапенко — д.ф.-м.н., г.н.с. Института
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН;
профессор Новосибирского государственного университета;
e-mail: ostapenko_vv@ngs.ru.*

Дата поступления — 29 мая 2017 г.