

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕНУЛЕВЫМ УГЛОМ ВСТРЕЧИ

М. А. Боронина, В. А. Вшивков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 517.968

Схема Crab Waist фокусировки пучков была использована в физических экспериментах и продемонстрировала свою высокую эффективность для повышения светимости — количества актов взаимодействий частиц пучков при единичном сечении. На пути реализации полностью трехмерного алгоритма для проведения математического моделирования пучков с учетом параметров Crab Waist первым шагом явилось создание алгоритма для моделирования пучков с ненулевым углом встречи. В работе представлены результаты численных экспериментов и сравнения их с теми немногими аналитическими решениями, которые существуют для данной трехмерной задачи.

Ключевые слова: математическое моделирование, релятивистские пучки, коллайдеры, ненулевой угол встречи, метод частиц-в-ячейках.

Введение

Работа посвящена математическому моделированию динамики пучков заряженных частиц в современных линейных коллайдерах. Целью физических экспериментов является исследование фундаментальных физических явлений. Достижение высокой светимости при высокой энергии пучков представляет собой актуальную задачу и требует развития научных подходов и технологий, в том числе методов математического моделирования. Рассматривается динамика пучков в ультрарелятивистском случае, когда релятивистские факторы частиц достигают значений $10^3 - 10^5$. В этом случае сильные поперечные электромагнитные поля приводят к деформированию или разрушению пучка, оказывая существенное влияние на светимость. Для повышения светимости была предложена схема встречи пучков Crab Waist, которая предполагает наличие достаточно большого угла встречи между пучками и ограничений на конфигурации пучков [1]. В физических экспериментах схема продемонстрировала высокую эффективность и перспективность [2].

Стандартный подход для математического моделирования динамики пучков по сути двумерен: каждый из пучков представляется набором слоев частиц, слои взаимодействуют друг с другом при совпадающих продольных координатах [3]. Данный подход наилучшим образом подходит для моделирования динамики пучков в циклических коллайдерах, где изменения на каждом обороте невелики. Полностью трехмерный подход позволяет наиболее полно описать динамику частиц в случае сильных деформаций пучка в однопролетном режиме [4, 5, 6].

Для возможности математического моделирования схемы Crab Waist в полностью трехмерном случае необходимым шагом явилась реализация алгоритма динамики пучков с ненулевым углом встречи. В качестве тестовых решений использованы круглые гауссовы цилиндрические и эллипсоидальные пучки. В работе предложены результаты численных экспериментов и их сравнение с аналитическими решениями.

1 Модель и алгоритм

Предполагается, что пучок электронов движется навстречу пучку позитронов и взаимодействует с ним. Движение происходит в самосогласованных электромагнитных полях в вакууме. Расчетная область включает в себя пучки перед самым взаимодействием, границы области находятся достаточно близко к пучку [4]. Динамику системы можно описать кинетическим уравнением Власова и уравнениями Максвелла:

$$\frac{\partial f_{+,-}}{\partial t} + \vec{v}_{+,-} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{+,-} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi(n_- e^- + n_+ e^+) \quad (4)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad (5)$$

$$\vec{F}_{+,-} = e^{+,-}(\vec{E} + \vec{v}_{+,-} \times \vec{H}/c) \quad (6)$$

$\vec{p} = \gamma_{+,-} m_e \vec{v}_{+,-}$, где релятивистский фактор $\gamma_{+,-} = 1/\sqrt{1 - |\vec{v}_{+,-}|^2/c^2}$, n_+ , n_- — плотности заряда пучков, \vec{j} — токи, \vec{E} и \vec{H} — электрическое и магнитное поле.

Для обезразмеривания предполагается, что характерная скорость — скорость света $c = 2.9979 \cdot 10^{10}$ см/сек, а длина пучка — 1 см.

Задача решается методом частиц-в-ячейках [7] с использованием разнесенных сеток, позволяющих проводить расчеты со вторым порядком точности по времени и пространству. Для вычисления токов используется алгоритм Виллансенора-Бунемана [8], при этом разностный аналог уравнения неразрывности выполняется точно, что уменьшает погрешности и увеличивает устойчивость метода. Данный алгоритм позволяет учитывать движение пучков под углом, но необходимо задавать начальные и граничные условия для электрического поля. Магнитное поле в начальный момент можно вычислить через скорости частиц и электрическое поле, граничные значения для магнитного поля вычисляются по дополнительным узлам электрического поля. Таким образом, необходимо разработать алгоритм вычисления электрического поля пучка при движении его под углом.

Предположим, что один пучок движется под углом θ к оси z в плоскости (z, x) , а второй пучок движется строго вдоль продольной оси z (рис. 1, 2). В безразмерных переменных импульсы частиц равны $\vec{p}_{01} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)p_{01}$, $\vec{p}_{02} = (0, 0, -1)p_{02}$, где $p_{01} = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$, $p_{02} = \sqrt{\gamma_2^2 - 1}$.

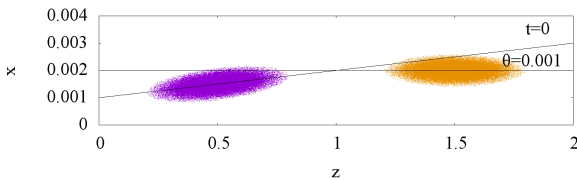


Рис. 1: Координаты пучков (z, x) при $t=0$

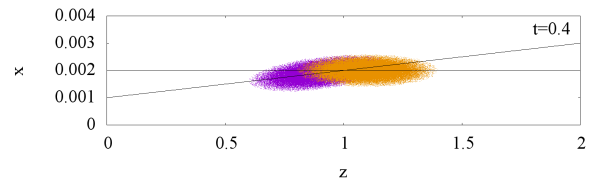


Рис. 2: Координаты пучков (z, x) при $t=0.4$

Поле пучка вычисляется через поперечное поле $E_r = E_\perp \cos\theta$, которое вычисляется по принципу суперпозиции через вклады полей

$$E_\perp = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \frac{q\vec{R}}{R^3},$$

где \vec{R} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется поле [9]. Таким образом, поле E_\perp в плоскости, проходящей через необходимый граничный узел (i_1, l_1, k_1) (рис. 3), задается с помощью формул

$$E_{\perp}(i_1, l_1, k_1) = \sum_{i,l} h_x h_y \rho(i, l, k_i) \frac{r}{r^3},$$

где $k_i = k_1 + xtg\theta/h_x$, $x = (i_1 - i)h_x$, $y = (l_1 - l)h_y$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и ρ — плотность модельных частиц в виде игл [10].

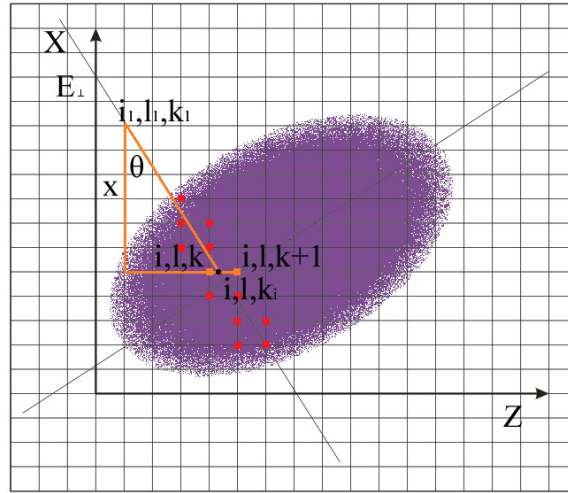


Рис. 3: Вычисление поля пучка

Величина продольного шага сетки определяет количество используемых ближайших узлов. В ускорительных установках пучки имеют большой продольный размер по сравнению с поперечным (соотношение их размеров достигает $1 : 10^3 : 10^5$) [11], а углы взаимодействия составляют 0.1 рад, поэтому использовать количество узлов для определения значения плотности более двух нецелесообразно. Значение плотности $\rho(i, l, k_i)$ определяется линейной интерполяцией между узлами $\rho(i, l, k)$ и $\rho(i, l, k + 1)$, $k < k_i < k + 1$. При использовании схемы на сдвинутых сетках все значения берутся с соответствующими сдвигами.

В качестве тестового решения взят пучок цилиндрической формы, распределение частиц которого гауссово в поперечных направлениях и равномерно в продольном:

$$\rho(r, z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 L_{cyl}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right),$$

где его длина L_{cyl} . Заряд пучков выбирается достаточно малым, и влияние поперечных полей на частицы обоих пучков не учитывается. Для длинного цилиндра по теореме Гаусса можно вычислить поперечное поле пучка аналитически:

$$E(r) = \frac{2Ne}{rL_{cyl}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right).$$

В центральной части пучка его поперечное поле постоянно в направлении z и совпадает с полем цилиндра в нерелятивистском случае. После вычисления поля по этой формуле в узлах сетки производится его поворот на угол θ .

Светимость определяется как количество взаимодействий между частицами встречных пучков в единицу времени при единичном сечении. Известная формула для интегральной светимости [12]

$$L = KN_1N_2 \iiint \rho_1(x)\rho_1(y)\rho_1(s-s_0)\rho_2(x)\rho_2(y)\rho_1(s+s_0)dx dy ds ds_0,$$

где $K = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}$ — кинематический фактор, равный 2 при лобовом взаимодействии, для гауссовых пучков с количеством частиц N_1 и N_2 , одинаковыми размерами и плотностями заряда

$$\rho_{1,2}(x, y, z) = \frac{N_{1,2}e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

превращается в

$$L = \frac{N_1 N_2}{4\sigma_x \sigma_y}.$$

При взаимодействии пучков под углом светимость L_0 уменьшается:

$$L = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \phi^2}},$$

где $\phi = \frac{\sigma_z}{\sigma_x} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ — угол Пивинского.

Численный метод расчета светимости предполагает суммирование соответствующих значений плотностей:

$$L = K N_1 N_2 \sum_m \sum_{i,l,k} \rho_1(x) \rho_1(y) \rho_1(z - ct) \rho_2(x) \rho_2(y) \rho_1(z + ct) h_x h_y h_z \tau,$$

где $x = (i - 1.5)h_x, y = (l - 1.5)h_y, z = (k - 1.5)h_z, t = m\tau$, и $c = 1$ в безразмерных переменных. Т.к. светимость в алгоритме вычисляется на основе плотности, которая, в свою очередь, вычисляется по координатам частиц, то правильное поведение светимости демонстрирует корректное вычисление координат частиц во все моменты времени взаимодействия пучков во всей области.

2 Результаты

Численные эксперименты проводились в расчетной области $[0 : L_x] \times [0 : L_y] \times [0 : L_z]$, $L_x = 0.004$ см, $L_y = 0.002$ см, $L_z = 2$ см, для пучков цилиндрической и эллипсоидальной формы радиусом $R = 3\sigma$, $\sigma = \sigma_x = \sigma_y = 2 \cdot 10^{-4}$ см. Длина цилиндрического пучка равна $L_{cyl} = 0.6$ см, дисперсия эллипсоидального пучка в продольном направлении $\sigma_z = 0.2$ см.

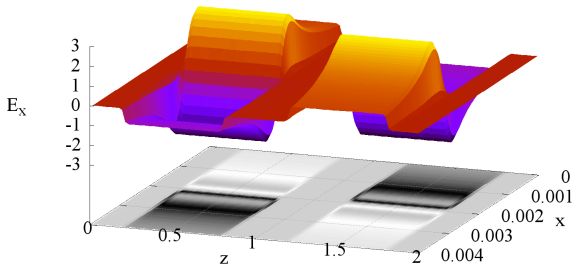


Рис. 4: Поле E_x при $\theta = 0$

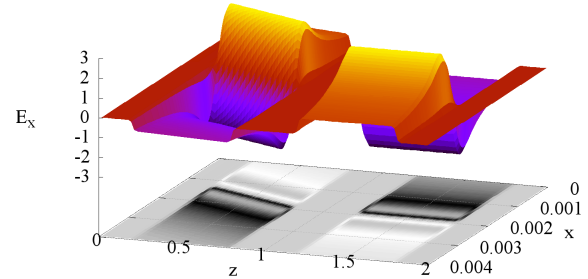


Рис. 5: Поле E_x при $\theta = 0.001$

Заряд пучков $Q_1 = -N_1 e$, $Q_2 = N_2 e$, $N_1 = N_2 = 10^6$. Релятивистские факторы частиц $\gamma = 6850$.

На рисунке 6 представлено поле E_x (единица измерения — Гс) в плоскости $y = 0.00087$ см, $z = 0.35$ см, вычисленное численно и аналитически в начальный момент времени для сетки $100 \times 100 \times 100$ и $2 \cdot 10^7$ модельных частиц в каждом пучке. Предлагаемый алгоритм вычисления поля в начальный момент достаточно хорошо задает электрическое поле.

На рисунках 7, 8 изображены графики поля E_x для различного количества узлов по направлению z (100, 200, 400) в плоскости $x = 0.00156$ см, $y = 0.00101$ см в различные моменты времени. В значениях поля присутствуют погрешности, характерные для метода частиц, которые появляются вследствие ограниченного числа частиц в ячейке. Из рисунков видно, что более мелкая в продольном направлении сетка позволяет точнее описывать высокие градиенты поля на границе пучка и обеспечивает сходимость метода. Тем не менее, в ускорительных установках используются пучки с гладким распределением частиц, и градиенты на границе пучков без деформации невелики. Данные тесты проводились для цилиндров с круглым сечением, провести аналогичные тесты для пучков с параметрами реальных физических установок не представляется возможным из-за отсутствия аналитических решений.

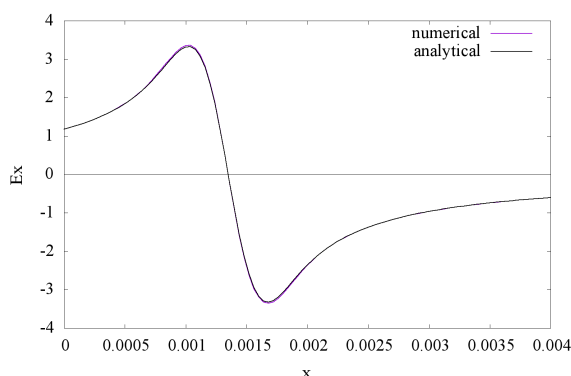
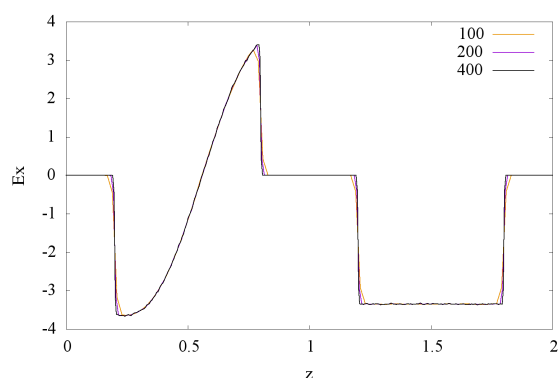
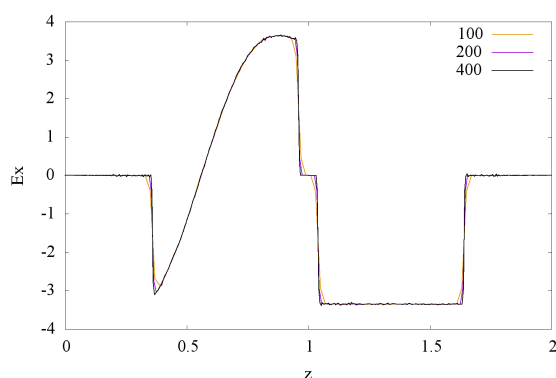


Рис. 6: Аналитические и численные значения поля

Рис. 7: Поле E_x при $t = 0$ Рис. 8: Поле E_x при $t = 0.53$

В качестве тестового решения для светимости были использованы пучки с гауссовым распределением во всех трех направлениях с 10^7 частиц в каждом пучке на сетке $100 \times 100 \times 100$. Алгоритм расчета динамики частиц показал хорошие результаты. На рисунке 9 представлена зависимость убывания светимости от угла встречи. Рисунок демонстрирует совпадение численной светимости с соответствующими аналитическими значениями.

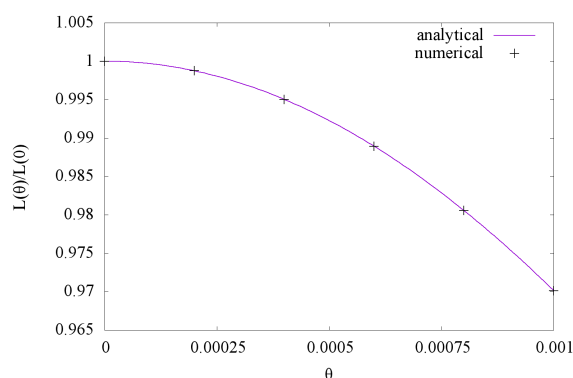
Расчеты проводились на суперкомпьютерах “Ломоносов” (МГУ) и “Политехник РСК Торнадо” (СПбПУ).

Заключение

Предложен алгоритм для моделирования динамики пучков заряженных ультрарелятивистских частиц с ненулевым углом встречи. Алгоритм наиболее полно учитывает трехмерную динамику системы. Особенностью алгоритма является его высокая эффективность для длинных пучков. Результаты численных экспериментов демонстрируют работоспособность и перспективность метода для проведения математического моделирования с параметрами Crab Waist.

Список литературы

- [1] P. Raimondi, D. Shatilov, M. Zobov. Beam-Beam Issues for Colliding Schemes with Large Piwinski Angle and Crabbed Waist // LNF-07/003 (IR), 2007, arXiv:physics/ 0702033.
- [2] M. Zobov et al. Phys. Rev. Lett. 104, 174801
- [3] Schulte D. Study of Electromagnetic and Hadronic Background in the Interaction Region of the Tesla Collider // Tesla Reports, Hamburg. — 1996. — Vol. 97–08.

Рис. 9: Зависимость светимости от угла встречи θ

- [4] Boronina M., Vshivkov V. Parallel 3-D particle-in-cell modelling of charged ultrarelativistic beam dynamics // Journal of Plasma Physics. 2015. 81(6).
- [5] M.A. Boronina, G. Dudnikova, and V.A. Vshivkov 3D Computer Simulations of the Ultrarelativistic Beam Dynamics in Super Colliders // Proc. of IPAC2015, Richmond, VA, USA. 2015. MOPJE023. P. 326–329.
- [6] Boronina M., Vshivkov V. Parallel three-dimensional PIC code for beam-beam simulation in linear colliders // Proc. of IPACT14, Dresden, Germany, MOPME027. – 2014.
- [7] Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — М. : Мир, 1962.
- [8] Villanzeno J., Buneman O. Rigorous Charge Conservation for Local Electromagnetic Field Solvers // Computer Physics Communications, 1992, v.69, p. 306–316.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика (Том 2. Теория поля). — М.: Наука, 1988.
- [10] В. А. Вшивков, М. А. Боронина, Трехмерное моделирование динамики ультрарелятивистских пучков заряженных частиц: особенности вычисления начальных и граничных условий // Матем. моделирование, 2012, том 24, номер 2, 67–83.
- [11] Adolphsen C et al. 2013 The International Linear Collider Technical Design Report — Volume 3.II: Accelerator Baseline Design
- [12] T. Suzuki. General formulae of luminosity for various types of colliding beam machines (KEK–76-3), Japan.

*Боронина Марина Андреевна — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;*

e-mail: boronina@ssd.sccc.ru;

*Вшивков Виталий Андреевич — д.ф.-м.н., зав. лабораторией Института вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН;*

e-mail: vsh@ssd.sccc.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.