

АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В. М. Ковеня

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.688

Для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса, записанных в интегральной форме, предложен класс неявных конечно-объемных алгоритмов предиктор-корректор, основанных на расщеплении уравнений на этапе предиктора. Возможность введения различных форм расщепления (по физическим процессам или пространственным направлениям) позволила построить класс экономичных алгоритмов, сведя решение исходной системы уравнений к независимому решению отдельных уравнений на дробных шагах и обеспечить запас устойчивости алгоритма в целом. Построенные схемы консервативны, обладают необходимой точностью, экономичны по числу операций на расчетную ячейку и допускают распараллеливание вычислений при их реализации на многопроцессорных вычислительных системах. Проведенные расчеты решения различных задач подтвердили теоретические оценки эффективности алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, метод конечных объемов, сверхзвуковые течения, ударные волны и скачки уплотнения.

Введение

Уравнения Навье — Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа являются наиболее общей моделью при решении различных классов задач аэромеханики. Их решения характеризуется наличием областей больших градиентов, пограничных слоев и висячих скачков, отрывных зон и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые численные алгоритмы. Поэтому задача построения экономичных численных алгоритмов решения уравнений Навье — Стокса является актуальной и сегодня. Эти алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять свойствам консервативности и другим требованиям. Важным свойством численного метода является его экономичность, понимаемая как минимизация числа арифметических операций при решении задач с заданной точностью и возможность его адаптации на многопроцессорных вычислительных системах. Некоторые подходы построения конечно-разностных и конечно-объемных алгоритмов приведены, например, в [1, 2, 3, 4, ?]. В последние десятилетия часто используется метод конечных объемов (см. [4, ?]), более удобный при решении многомерных задач в сложных, в том числе в многосвязных областях. В нем аппроксимация уравнений строится для каждой расчетной ячейки, их вид и формы легче адаптируются к границам подобластей.

Известно, что явные алгоритмы более просты в реализации, чем неявные, хотя они не являются экономичными в силу жестких ограничений на соотношение временного и пространственных шагов сетки [2, 3]. Неявные схемы свободны от этих ограничений или они значительно слабее, но при решении многомерных задач возникает необходимость обращения матриц большой размерности. Для построения эффективных алгоритмов широко используются методы расщепления и приближенной факторизации, позволяющие свести решение исходных уравнений к решению их одномерных аналогов (см. [2, 3, 5, 6]). В данной предлагается алгоритм типа предиктор-корректор при аппроксимации уравнений Эйлера и Навье — Стокса, записанных в интегральной форме, методом конечных объемов. На этапе предиктора могут вводиться различные формы расщепления, что позволяет свести решение системы расщепленных уравнений к решению отдельных уравнений и обеспечить запас устойчивости алгоритма в целом, а на этапе корректора аппроксимировать исходные уравнения в консервативной форме. Среди рассмотренных форм расщепления могут быть выбраны

те из них, которые обеспечивают максимальную устойчивость схем при минимальном влиянии расщепления на ее свойства. В отличие от классических неявных схем расщепления по направлениям, реализуемых векторными прогонками или итерациями, этот подход позволяет построить более экономичные алгоритмы по числу операций на отдельную ячейку, сведя их реализацию к скалярным прогонкам или схемам бегущего счета, а по скорости сходимости к стационарному решению он приближается к не факторизованным схемам. Получаемые схемы консервативны, что позволяет использовать их при решении стационарных и нестационарных задач, и обладают вторым (или более высоким) порядком аппроксимации. Отметим, что в целях повышения устойчивости алгоритмов порядок аппроксимации может быть различным на этапе предиктора и корректора. Предложенные алгоритмы были апробированы на решении ряда задач: о регулярном и нерегулярном отражении скачков в угловых конфигурациях и течении в канале (см. [7]).

1 Исходные уравнения. Расщепление уравнений по физическим процессам

Рассмотрим систему уравнения Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа в интегральной форме в декартовых координатах

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV + \int_S \mathbf{W} \mathbf{n} dS = 0, \quad (1)$$

где V — замкнутая область, $S = \partial V$, \mathbf{n} — его поверхность и нормаль к ней, $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, E)^T$, $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$ — вектор искомых функций и матрица потоков, состоящая из трех векторов-столбцов $\mathbf{W}_m = (\rho v_m, \rho v_1 v_m + P_1^m, \rho v_2 v_m + P_2^m, \rho v_3 v_m + P_3^m, v_m(E + p) - Q_m)^T$ ($m = 1, 2, 3$), $P_l^m = \delta_l^m p - \sigma_l^m$, $E = \rho(e + v^2/2)$, $\sigma_j^i = \mu(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) - 2\delta_j^i(\mu/3) \operatorname{div} v$, $Q_j = \sum_{l=1}^3 v_l \sigma_j^l + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$, μ, κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности [3]. Для замыкания системы уравнений (1) заданы уравнения состояния $p = p(\rho, e)$, $e = e(T)$. При $\kappa_0 = \mu = 0$ уравнения (1) переходят в уравнения Эйлера. Система уравнений (1) справедлива как для всей расчетной области, так и для отдельной её ячейки (рис. 1).

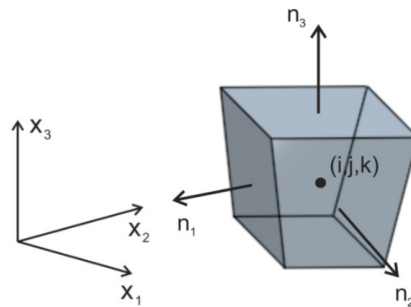


Рис. 1: Расчетная ячейка

Так как грани ячейки могут не совпадать с осями координат, то вводится локальная невырожденная система координат

$$q_l = q_l(x_m) \quad l, m = 1, 2, 3,$$

отображающая ячейку в единичный квадрат. Тогда $\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{m=1}^3 z_l^m \frac{\partial}{\partial q_m}$, где $z_l^m = \frac{\partial q_l}{\partial x_m}$, и уравнения (1) сохраняют прежний вид с заменой σ_j^i, Q_j на их значения в новых координатах $\bar{\sigma}_j^i, \bar{Q}_m$. Вводя $S_m = \mathbf{S} \mathbf{n}_m$, представим систему уравнений (1) для каждой ячейки в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \mathbf{U} d\omega + \oint_S \overline{\mathbf{W}} \mathbf{n} dS = 0, \text{ где } \overline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{S} \mathbf{n} = \overline{\mathbf{W}} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho v_1 V - \sigma_1 + p S_1 \\ \rho v_1 V - \sigma_2 + p S_2 \\ \rho v_1 V - \sigma_3 + p S_3 \\ (E + p)V - Q \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_l &= \sum_{m=1}^3 \bar{\sigma}_m^l S_m \\ Q &= \sum_{m=1}^3 \bar{Q}_m S_m \\ V &= \sum_{m=1}^3 v_m S_m \end{aligned} \quad (2)$$

Так как операторы σ_l , Q в $\overline{\mathbf{W}} \mathbf{S}$ содержат производные по всем направлениям, то ведение расщепления по пространственным направлениям для уравнений Навье–Стокса не позволяет свести их к решению одномерных задач. Для построения экономичных схем перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{U} d\mathbf{V} + \oint_S \widetilde{\mathbf{W}} d\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho v_1 V - \tilde{\sigma}^1 + p S_1 \\ \rho v_1 V - \tilde{\sigma}^2 + p S_2 \\ \rho v_1 V - \tilde{\sigma}^3 + p S_3 \\ (E + p)V - \sigma - q \end{pmatrix} \quad (3)$$

В вектор $\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}$ включены часть диссипативных членов в уравнениях движения и энергии, содержащих производные только по нормали к площади граней \mathbf{S} по каждому направлению, а все остальные члены перенесены в вектор $\mathbf{F} = \oint_S \widetilde{\mathbf{W}} d\mathbf{S} - \oint_S \overline{\mathbf{W}} d\mathbf{S}$. Введем расщепление оператора $\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}$ по физическим процессам

$$\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_1 + \mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_2, \quad \mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p S_1 \\ p S_2 \\ p S_3 \\ (p + \rho e)V - q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_2 = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho v_1 V - \tilde{\sigma}_1 \\ \rho v_2 V - \tilde{\sigma}_2 \\ \rho v_3 V - \tilde{\sigma}_3 \\ \rho v^2 V / 2 - \sigma \end{pmatrix},$$

где вектор $\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_1$ содержит члены с давлением в уравнениях движения, а в уравнении энергии часть газодинамических членов и членов с теплопроводностью q , а вектор $\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}}_2$ — конвективные и вязкие члены в уравнениях движения и диссипативные члены σ в уравнении энергии. Тогда уравнения (3) могут быть переписаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{U} d\mathbf{V} + \sum_{l=1}^2 \oint_S \widetilde{\mathbf{W}}_l d\mathbf{S} &= \mathbf{F}, \text{ или в виде,} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{U} d\mathbf{V} + \oint_S \widetilde{\mathbf{W}}_1 d\mathbf{S} &= \mathbf{F}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{U} d\mathbf{V} + \oint_S \widetilde{\mathbf{W}}_2 d\mathbf{S} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

слабо аппроксимирующим исходные уравнения (см. [3]).

2 Численный алгоритм

Решение уравнений (2), (4) будем искать в расчетной области $\mathbf{V} \times [0, T]$, где \mathbf{V} — регулярная сетка, состоящая из ячеек-параллелепипедов $\omega = \mathbf{V}_{i,j,k}$ (рис. 1). Во временном интервале $[0, T]$ введем сетку с шагом τ . Вводя усреднение искомых функций по ячейке ω по формуле

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \mathbf{U} d\omega, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \mathbf{F} d\omega, \quad (5)$$

аппроксимируем интегральные операторы $\int_S \overline{\mathbf{W}} d\mathbf{S}$, $\int_S \widetilde{\mathbf{W}}_l d\mathbf{S}$ симметричными или несимметричными операторами $\bar{\Omega}_h = \sum_{m=1}^3 \Delta_m^k(\mathbf{S} \overline{\mathbf{W}})$, $\tilde{\Omega}_h = \sum_{m=1}^3 \Delta_m^k(\mathbf{S} \widetilde{\mathbf{W}})$ с порядком k . Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta_m^1(Sf) &= S_{m+1/2}f_m - S_{m-1/2}f_{m-1}, \quad \bar{\Delta}_m^1(Sf)_m = S_{m+1/2}f_{m+1} - S_{m-1/2}f_m \quad \text{при } v_m \geq 0, \\
\Delta_m^1(Sf) &= S_{m+1/2}f_{m+1} - S_{m-1/2}f_m, \quad \bar{\Delta}_m^1(Sf)_m = S_{m+1/2}f_m - S_{m-1/2}f_{m-1} \quad \text{при } v_m \leq 0, \\
\Delta_m^2(Sf) &= [S_{m+1/2}(f_{m+1} + f_m) - S_{m-1/2}(f_m + f_{m-1})]/2
\end{aligned} \tag{6}$$

$\Delta_m^1, \bar{\Delta}_m^1$ — несимметричная (1) или Δ_m^2 — симметричная (2) аппроксимация потоков в ячейке с первым или вторым порядком подобно [3]. Производные в операторах $\tilde{\sigma}_l, \tilde{q}_l$ в (3), (4) аппроксимируем симметричными разностями в центре ячейки.

Для численного решения уравнений (2), (4) рассмотрим конечно-объемную схему предиктор-корректор

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\mathbf{U}^{n+1/4} - \mathbf{U}^n}{\tau\alpha} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^s(\mathbf{S}\widetilde{\mathbf{W}}_h^{n+1/2}) &= 0, \\
\omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^k(\mathbf{S}\overline{\mathbf{W}}_h^{n+1/2}) &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Она консервативна, нелинейная на этапе предиктора при $\alpha \neq 0$, и аппроксимирует уравнения Навье — Стокса (2) с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$, где $h = (\omega)^{1/3}$. Для повышения устойчивости алгоритма (7) порядок аппроксимации на этапе предиктора может быть выбран первый ($s = 1$), а на этапе корректора — второй ($k = 2$) или больший. В качестве искоемых функций для уравнений газовой динамики удобнее рассматривать плотность, компоненты скорости (или проекции импульсов) и давление, для уравнений Навье — Стокса вместо давления можно выбирать температуру, т.к. именно для этих переменных задаются краевые условия. Построение алгоритма проведем для вектора $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, p)^T$ и для уравнения состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho e$ подобно [3, 5]. Для других газодинамических переменных и уравнения состояния более общего вида численный алгоритм строится аналогично. Схема (7) на этапе предиктора нелинейная при $\alpha \neq 0$. Линеаризуем ее по формулам

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{n+1/2} &= \mathbf{U}^n + \mathbf{A}^n(\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n) + O(\tau^2) = \mathbf{A}^n\mathbf{f}^{n+1/2} + O(\tau^2), \quad \mathbf{A} = \partial\mathbf{U}/\partial\mathbf{f} \\
\widetilde{\mathbf{W}}_{lh}^{n+1/2} &= \widetilde{\mathbf{W}}_{lh}^n + \widetilde{\mathbf{B}}_l^n(\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n) + O(\tau^2) = \widetilde{\mathbf{B}}_l^n\mathbf{f}^{n+1/2} + O(\tau^2), \quad \widetilde{\mathbf{B}}_l = \partial\widetilde{\mathbf{W}}_l/\partial\mathbf{f}
\end{aligned}$$

Так как значения коэффициентов в операторах \mathbf{A}^n и $\widetilde{\mathbf{B}}_l^n$ в ячейке ω в соответствии с усреднением (5) полагаются постоянными, то $(\mathbf{A}^n)^{-1}\widetilde{\mathbf{B}}_l^n = \mathbf{B}_l^n + O(h^2)$. Тогда с учетом линеаризации вместо (7) для численного решения уравнений Навье — Стокса (2) рассмотрим схему предиктор-корректор

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^3 \Delta_m^s(\mathbf{S}\widetilde{\mathbf{B}}_{lh}^{n+1/2}) &= 0, \\
\omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^k(\mathbf{S}\overline{\mathbf{W}}_h^{n+1/2}) &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{где } \Delta_m \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{B}}_{lh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \\ 0 & bS_1 & bS_2 & bS_3 & V - \Delta_m \eta_4 \end{pmatrix} \Delta_m, \quad \Delta_m \mathbf{S}\mathbf{B}_2 = \Delta_m \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V - \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V - \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V - \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_l = \xi_l^m S_m \Delta_m (1/\rho^n) \quad (l = 1, 2, 3), \quad \eta_4 = S_m \kappa_0 z_m^m / \rho^n.$$

Как и (6), она консервативна и аппроксимирует уравнения (1) с тем же порядком, но является линейной.

Замечание 1. Известно, что симметричная аппроксимация операторов Δ_m^2 может приводить к осцилляциям решения. Для их устранения введем, подобно [3], оператор сглаживания по каждому пространственному направлению второго порядка малости по формулам

$$\Delta_m g = g_{m+1/2} - g_{m-1/2} - \text{sign}(V_m) \cdot [\varepsilon_{m+1/2} \Delta_{m+1/2} g_m - \varepsilon_{m-1/2} \Delta_{m-1/2} g_m]. \tag{9}$$

Здесь V_m — проекция вектора скорости на нормаль к поверхности грани S_m , а

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{|(\Delta_{m+1/2} - \Delta_{m-1/2})|}{t}, & t = |\Delta_{m+1/2}g_m| + |\Delta_{m-1/2}g_m| \\ 0, & \text{если } t = 0 \end{cases}, \quad \varepsilon_{m\pm 1/2} = \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_{m\pm 1}}{2}$$

На этапе предиктора схема (8) может быть реализована матричными прогонками для каждой компоненты вектора \mathbf{f} . Этот подход неэкономичен и обычно используются различные итерационные алгоритмы [6], LU -факторизация операторов [6], расщепление уравнений по пространственным направлениям [2, 3, 4] или по физическим процессам и пространственным направлениям (как в [5] при построении конечно-разностных схем). Остановимся на последнем подходе и рассмотрим конечно-объемную схему

$$\begin{aligned} \omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/12} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \Delta_1^1(\mathbf{SB}_1^n \mathbf{f}^{n+1/12}) &= 0 \quad \dots \quad \omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^{n+3/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^1(\mathbf{SB}_1^n \mathbf{f}^{n+1/4}) = 0 \\ \omega \frac{\mathbf{f}^{n+4/12} - \mathbf{f}^{n+3/12}}{\tau\alpha} + \Delta_1^1(\mathbf{SB}_2^n \mathbf{f}^{n+4/12}) &= 0 \quad \dots \quad \omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+5/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^1(\mathbf{SB}_2^n \mathbf{f}^{n+1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^2(\mathbf{SW}_h^{n+1/2}) = 0$$

аппроксимирующую исходные уравнения с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$, как и схема (8). Остановимся на её реализации. В силу структуры матрицы \mathbf{SB}_1 решение уравнений на первых трех дробных шагах схемы (10) находится скалярной прогонкой для давления, а остальные компоненты вектора \mathbf{f} вычисляются явно. Покажем это, например, для первого дробного шага. На слое $n + 1/12$ уравнения представляются в виде

$$\begin{aligned} \rho^{n+1/12} &= \rho^n \\ v_l^{n+1/12} &= v_l^n - (r/\rho^n) \bar{\Delta}_1 S_l p^{n+1/12} \quad (l = 1, 2, 3) \\ p^{n+1/12} - p^n + r \left[\sum_{l=1}^3 b \Delta_1 S_l v_l^{n+1/12} + (V \Delta_1 - \Delta_1 \eta_4 \Delta_1 (1/\rho^n)) p^{n+1/12} \right] &= 0 \end{aligned}$$

где $r = \tau\alpha/\omega$, $b = \gamma p^n$. Исключая скорости $v_l^{n+1/12}$ из уравнения для давления, получим

$$\{1 + r[V \Delta_1 - \Delta_1 S_l \eta_4 \Delta_1 (1/\rho^n) - r b \sum_{l=1}^3 \bar{\Delta}_1 (S_l/\rho^n) \Delta_1 S_l]\} p^{n+1/12} = p^n - r b \sum_{l=1}^3 \Delta_l S_l v_l^n.$$

Его решение находится трехточечными скалярными прогонками, после чего явно вычисляются новые значения компоненты скорости. Два последующих дробных шагов вычисляются аналогично. Для 4–6-го дробных шагов схемы (10), как следует из вида матрицы \mathbf{SB}_2^n , система уравнений

$$\begin{aligned} [I + r_1 \Delta_m V] v \rho^{n+(4+m)/12} &= \rho^{n+(3+m)/12} \\ [I + r_1 \Delta_m (V - \xi_l^m S_m \Delta_m)] v_l^{n+(4+m)/12} &= v_l^{n+(3+m)/12} \quad (l = 1, 2, 3; m = 1, 2, 3) \\ p^{n+(4+m)/12} &= p^{n+1/4}, \quad r_1 = \tau\alpha/(\omega \rho^n). \end{aligned}$$

может быть решена скалярными прогонками на каждом дробном шаге независимо для первых четырех уравнений (при вычислении плотности и компонент скорости), а давление переносится с предыдущего шага. На этапе корректора в схеме (10) новые значения функций на слое $n + 1$ вычисляются по явным формулам. Таким образом, реализация схемы (10) свелась к $N \times t$ скалярным прогонкам на этапе предиктора и явному вычислению на этапе корректора, где N — число уравнений, t — размерность задачи по пространству. Рассмотренный алгоритм является экономичным по числу операций на узел сетки, обладает свойством консервативности для каждой расчетной ячейки. Для декартовой сетки он подобен разностной схеме с расщеплением по физическим процессам и пространственным направлениям [5] и, как следствие, обладает теми же свойствами — он безусловно устойчив в двумерном случае и условно устойчив в трехмерном. Наиболее эффективным представляется его использование при решении стационарных задач методом установления, когда параметр τ может выбираться лишь из условия наиболее быстрой сходимости. Апробация алгоритма проведена на решении ряда задач (см. [7]).

Заключение

Для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса предложены конечно-объемные алгоритмы типа предиктор-корректор с различными формами расщепления операторов. Возможность выбора на этапе предиктора различных форм расщепления и способов реализации алгоритма позволяет в рамках единого подхода рассматривать различные классы схем для численного решения многомерных задач. Предложенный алгоритм является экономичным по числу операций на узел сетки, обладает свойством консервативности и, как показали расчеты, является устойчивым в широком диапазоне параметров сетки.

Список литературы

- [1] Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [2] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 3-е изд., 1989.
- [3] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981, 304 с.
- [4] Vos J.B., Rizzi A., Darrac D., Hirschel E. H., Navier-Stokes solvers in European aircraft design, Progress in Aerospace Sciences, 38, 2002, p.601–697.
- [5] Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, 2014, 280 с.
- [6] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 614 с.
- [7] Ковеня В.М., Бабинцев П.В. Алгоритмы расщепления в методе конечных объемов // Вычислительные технологии. – 2015, Т. 20, N 6. С. 65–84.

*Виктор Михайлович Ковеня — д.ф.-м.н., г.н.с. Института вычислительных технологий СО РАН;
e-mail: kovenya@ict.nsc.ru.*

Дата поступления — 30 апреля 2017 г.