

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

Х. Х. Имомназаров<sup>1</sup>, М. В. Урев<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

<sup>3</sup> *Сибирский институт управления — филиал РАНХиГС, 630102, Новосибирск*

УДК 517.956.3

Рассматривается стационарная система двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению и неоднородными дивергентными и краевыми условиями для двух скоростей. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является переопределенной. В докладе показана, что решение системы дифференциальных уравнений сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной системы для другой скорости. Приведены обобщенные постановки этих задач. Для решения переопределенной задачи применяется вариант метода регуляризации.

**Ключевые слова:** переопределенная стационарная система двухскоростной гидродинамики, множитель Лагранжа.

## Введение

Формы движения двухфазных потоков значительно многообразнее, а законы, ими управляющие, существенно сложнее, чем формы движения и законы гидродинамики однородных сред. Интерес исследователей к проблемам и задачам механики многофазных сред обусловлен широким распространением таких систем в природе и их интенсивным использованием в современной технике. Математические модели многофазных или гетерогенных сред описывают различные явления гидро- и газодинамики, теории фильтрации, ракетостроения, угле- и нефтедобычи, ядерной и неядерной теплоэнергетики, металлургической и строительной промышленности, астрофизики. Модели многофазных сред возникают также при рассмотрении разнообразных задач описания техногенных систем: моделирование динамических процессов в нефтяных скважинах и приповерхностных пластах; а так же при описании эндогенных процессов и при решении связанных с ними задач геодинамики и моделирования рудообразующих структур в рамках единой согласованной модели эволюции системы, включающей верхнюю мантию, мантийную литосферу и земную кору, включая геоэкологический мониторинг за конкретными природными и техногенными объектами.

В [1, 2] для объяснения локализации и генерации магмы предложена нелинейная математическая модель на основе метода законов сохранения. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представлена как вязкая жидкость-1 за счет собственной вязкости, либо достигающая необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода по другим причинам. По границам зерен и межзеренным узлам начинает скапливаться магма-жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта модель представляет собой динамику взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду, как своеобразный процесс фильтрации.

В ограниченной односвязной области  $\Omega$  трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  рассматривается линеаризованная стационарная неоднородная система двухскоростной гидродинамики [3]–[5].

$$\nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (1)$$

$$\nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{g}_2 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3)$$

где  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  — массовая сила,  $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\operatorname{grad}$  — оператор градиента по  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — соответствующие сдвиговые вязкости фаз [5]. Через  $\Delta$  и  $\triangle$  будем обозначать векторный и скалярный операторы Лапласа соответственно, так что

$$\Delta \mathbf{v} := -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \triangle \varphi := \operatorname{div} \nabla \varphi.$$

В п. 2 для исходной переопределенной системы (1)–(3) устанавливается необходимое условие разрешимости. Затем система (1)–(3) заменой неизвестных скоростей и правых частей в векторных уравнениях (1) и (2) приводится к системе с однородными дивергентными ограничениями и однородными краевыми условиями для скоростей. Для преобразованной системы необходимым условием разрешимости является равенство дивергенций от правых частей векторных уравнений. Наличие условий согласования данных связано с переопределенностью системы (1)–(3). В полученную переопределенную систему вводится дополнительное слагаемое в виде градиента от новой неизвестной скалярной функции с нулевым граничным условием. Такая функция называется множителем Лагранжа. Далее решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и задачи с множителем Лагранжа для второй скорости.

В п. 3 приводятся необходимые сведения из функционального анализа и формулируются обобщенные постановки для приведенных выше двух краевых задач. Для задачи Стокса принята хорошо изученная смешанная обобщенная постановка в терминах скорость–давление. Для второй векторной задачи смешанная обобщенная постановка оригинальным приемом приводится к регуляризированному уравнению.

## 1 Рассмотрение системы при гладких данных

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (1)–(3), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью.

Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (1) и (2) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  получим, что

$$\operatorname{div} \Delta \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \triangle(\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (4)$$

Далее, действуя на первые векторные уравнения в (1) и (2) оператором дивергенции, получим из одного уравнения

$$\triangle p = \nu_1 \triangle q_1 + \rho \operatorname{div} \mathbf{f},$$

а из другого

$$\triangle p = \nu_2 \triangle q_2 + \rho \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad (5)$$

откуда

$$\nu_1 \triangle q_1 = \nu_2 \triangle q_2. \quad (6)$$

Граничные функции  $\mathbf{g}_i$  в (3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} q_i \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial\Omega$ . Систему уравнений (1)–(3) можно свести к равносильной системе с однородными дивергентными и краевыми условиями. Для этого вводим функции  $\tilde{\mathbf{u}}_i = \operatorname{grad} \psi_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\psi_i$  — решения граничных задач

$$\triangle \psi_i = q_i \quad \text{в } \Omega, \quad \psi_i = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Тогда новые искомые функции  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i$  будут удовлетворять системе уравнений

$$\nu_i \Delta \tilde{\mathbf{v}}_i - \operatorname{grad} p = \tilde{\mathbf{f}}_i, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_i = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{a}_2 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (9)$$

где  $\tilde{\mathbf{f}}_i = -\nu_i \Delta \text{grad} \psi_i - \rho \mathbf{f}$  в  $\Omega$  и  $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}_i - \text{grad} \psi_i$  на  $\partial\Omega$ . Отметим, что если имеют место соотношения (6) и (7), то правые части  $\tilde{\mathbf{f}}_i$  в (8) и граничные функции  $\mathbf{a}_i$  в (9) удовлетворяют условиям

$$\text{div} \tilde{\mathbf{f}}_1 = \text{div} \tilde{\mathbf{f}}_2, \quad \text{в } \Omega, \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Граничные функции  $\mathbf{a}_i$  в (9), удовлетворяющие условиям (10), могут быть продолжены в область  $\Omega$  в виде соленоидальных функций  $\mathbf{z}_i$ , то есть так, что  $\text{div} \mathbf{z}_i = 0$  в  $\Omega$  и  $\mathbf{z}_i = \mathbf{a}_i$  на  $\partial\Omega$  [см. [6] с. 38, [7] Лемма 2.2]. Положим  $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{z}_i$ . Тогда из системы (8)–(9) получим следующую систему уравнений относительно функций  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, p$ :

$$\nu_i \Delta \mathbf{v}_i - \text{grad} p = \mathbf{f}_i, \quad \text{div} \mathbf{v}_i = 0, \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $\mathbf{f}_i = \tilde{\mathbf{f}}_i - \nu_i \Delta \mathbf{z}_i$  в  $\Omega$ . Кроме того, функции  $\mathbf{f}_i$  должны удовлетворять условию разрешимости системы (11)–(12), а именно, необходимо, чтобы

$$\text{div} \mathbf{f}_1 = \text{div} \mathbf{f}_2, \quad \text{в } \Omega. \quad (13)$$

Далее будем рассматривать систему уравнений (11)–(12), которая является переопределенной, так как состоит из восьми уравнений и семи искомыми скалярными функциями и, следовательно, не является эллиптической. Следуя [8] мы добавим к нашей системе градиент от новой искомой функции  $\varphi$  с нулевым граничным условием так, что наша система станет эллиптической. Такую функцию  $\varphi$  принято называть множителем Лагранжа. Итак, вместо системы (11)–(12) будем рассматривать расширенную систему

$$\nu_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \text{grad} p = \mathbf{f}_1, \quad \text{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \text{в } \Omega \quad (14)$$

$$\nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 - \text{grad} p + \text{grad} \varphi = \mathbf{f}_2, \quad \text{div} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \text{в } \Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (16)$$

Решение системы (14)–(16) сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача для  $(\mathbf{v}_1, p)$ :

$$\nu_1 \Delta \mathbf{v}_1 - \text{grad} p = \mathbf{f}_1, \quad \text{div} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \text{ на } \partial\Omega. \quad (17)$$

Затем определяется пара  $(\mathbf{v}_2, \varphi)$  как решение системы

$$\begin{aligned} \nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \text{grad} \varphi &= \text{grad} p + \mathbf{f}_2, \quad \text{div} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Для задач (17) и (18) выполнение условия согласования (13) не предполагается. Если же условие (13) выполнено, то  $\varphi = 0$  в  $\Omega$  и тройка функций  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, p)$  удовлетворяет системе (11)–(12). Действительно, пусть выполнено условие (13). Тогда после применения к первому уравнению системы (17) и к первому уравнению системы (18) оператора  $\text{div}$ , ввиду (4), (13) и равенств  $\text{div} \mathbf{v}_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , получим:

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \text{div} \mathbf{f}_1, \\ \text{div}(\nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \text{grad} \varphi) &= \Delta \varphi, \\ \text{div}(\text{grad} p + \mathbf{f}_2) &= \Delta p + \text{div} \mathbf{f}_2 = -\text{div} \mathbf{f}_1 + \text{div} \mathbf{f}_2 = 0. \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Значит  $\varphi = 0$  в  $\Omega$ .

Отметим, что множитель Лагранжа  $\varphi$  можно было ввести в первое векторное уравнение системы (14) и последовательно решать две краевые задачи в обратном порядке. При выполнении условия согласования (13) результат решения не изменится.

## 2 Обобщенная постановка

Сначала приведем обобщенную постановку задачи (17). Для этого введем необходимые гильбертовы функциональные пространства [9]. Через  $H^k(\Omega)$ , где  $k$  положительное целое, будем обозначать скалярные гильбертовы пространства Соболева  $W_2^k(\Omega)$

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  — мультииндекс,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $D^\alpha$  — это дифференциальный оператор

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

Норма и полунорма в них обозначаются через  $\|\cdot\|_{k,\Omega}$  и  $|\cdot|_{k,\Omega}$  соответственно и определяются равенствами

$$\|f\|_{k,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f)^2 d\mathbf{x}, \quad |f|_{k,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha f)^2 d\mathbf{x}.$$

Введем также пространства

$$\mathbf{H}^k(\Omega) = (H^k(\Omega))^3, \quad H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$X = \mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^3, \quad P = L_0^2(\Omega) = \left\{p \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} p d\mathbf{x} = 0\right\}.$$

Для пространства вектор-функций  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{H}^k(\Omega)$  норма и полунорма в нем обозначаются аналогично скалярному случаю и определяются равенствами

$$\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{s=0}^k |\mathbf{u}|_{s,\Omega}^2\right)^{1/2}, \quad |\mathbf{u}|_{s,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 |u_i|_{s,\Omega}^2\right)^{1/2}, \quad s = 0, \dots, k.$$

Для функций  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in X$  и  $p \in P$  имеем

$$\|\mathbf{u}\|_X = \left(\sum_{i=1}^3 |u_i|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}, \quad \|p\|_P = \|p\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} p^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Далее для  $G \subset \mathbb{R}^3$  через  $(\cdot, \cdot)_{0,G}$ , или просто  $(\cdot, \cdot)_0$  в очевидных случаях, будем обозначать скалярное произведение как в  $L^2(G)$ , так и в  $\mathbf{L}^2(G) = (L^2(G))^3$ . Таким образом, если  $p, q \in L^2(G)$ , а  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(G)$ , то

$$(p, q)_{0,G} = \int_G pq d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,G} = \int_G \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Введем билинейные формы  $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  на  $X \times X$  и  $b_1(\mathbf{v}, q)$  на  $X \times P$

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_1(\operatorname{grad} \mathbf{u}, \operatorname{grad} \mathbf{v})_0 = \nu_1 \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_0,$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v})_0.$$

Система (17) является стационарной задачей Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве ее обобщенной постановки примем широко распространенную смешанную формулировку: найти вектор-функцию  $\mathbf{v}_1 \in X$  и функцию  $p \in P$ , удовлетворяющие равенствам

$$a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + b_1(\mathbf{u}, p) = -(\mathbf{f}_1, \mathbf{u})_0 \quad \forall \mathbf{u} \in X, \quad (19)$$

$$b_1(\mathbf{v}_1, q) = 0 \quad \forall q \in P. \quad (20)$$

Смешанная постановка (19)–(20) задачи Стокса в терминах скорость–давление исследована, например, в [7]. Там же подробно рассмотрен метод конечных элементов для численного решения данной задачи.

Теперь сформулируем обобщенную постановку для задачи (18). Для этого введем гильбертовы пространства, см. [7]

$$\begin{aligned} H(\text{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\}, \\ H_0(\text{rot}; \Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}, \\ V &= H_0(\text{rot}; \Omega), \quad Q = H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Пространство  $V$  снабжается следующей нормой:

$$\|\mathbf{u}\|_V = (\|\text{rot } \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \quad \mathbf{u} \in V.$$

Обозначим через  $-\mathbf{F}_2$  правую часть в первом уравнении системы (18):  $-\mathbf{F}_2 = \text{grad} p + \mathbf{f}_2$ . Имея ввиду формулу векторного анализа для определения векторного оператора Лапласа, перепишем систему (18) в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu_2 \text{rot rot } \mathbf{v}_2 - \text{grad } \varphi = \mathbf{F}_2 & \text{в } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{v}_2 = 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad \varphi = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (21)$$

Теперь вариационную постановку задачи (21) в области  $\Omega$  сформулируем следующим образом: пусть  $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , требуется найти пару функций  $(\mathbf{v}_2, \varphi) \in V \times Q$ , удовлетворяющих равенствам

$$\begin{cases} a_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}) + b_2(\mathbf{u}, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0 & \forall \mathbf{u} \in V, \\ b_2(\mathbf{v}_2, \psi) = 0 & \forall \psi \in Q. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь  $a_2(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  обозначают билинейные формы на пространствах  $V \times V$  и  $V \times Q$  соответственно

$$a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_2 \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad (23)$$

$$b_2(\mathbf{u}, \psi) = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall \psi \in Q. \quad (24)$$

Очевидно, что  $a_2(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  являются непрерывными билинейными формами на пространствах  $V \times V$  и  $V \times Q$  соответственно, а  $F(\mathbf{u}) = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0$  — непрерывным линейным функционалом на пространстве  $V$ .

Билинейным формам  $a_2(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  отвечают два ограниченных линейных оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V')$  и  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H^{-1}(\Omega))$ , определяемые как

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$\langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \psi \rangle = b_2(\mathbf{u}, \psi) \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall \psi \in Q,$$

где  $V'$  и  $H^{-1}(\Omega) = Q'$  — сопряженные пространства для  $V$  и  $Q$  соответственно, а запись  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает отношение двойственности между элементами исходного и сопряженного ему пространства.

Воспользуемся теперь спецификой нашей исходной задачи (22), связанной с конкретным видом билинейных форм  $a_2(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$ , которая позволяет исключить из системы (22) множитель Лагранжа  $\varphi$ . Отметим, что если  $\psi \in Q$ , то  $\nabla \psi \in V$ , и тогда

$$a_2(\mathbf{u}, \nabla \psi) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall \psi \in Q,$$

что позволяет выделить из системы (22) отдельную задачу для множителя Лагранжа  $\varphi$ , а именно, найти  $\varphi \in Q$ :

$$b_2(\nabla \psi, \varphi) = (\mathbf{F}_2, \nabla \psi)_0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (25)$$

Используя (25), перепишем второе уравнение в системе (22) в следующем виде:

$$b_2(\mathbf{v}_2, \psi) + \beta b_2(\nabla \psi, \varphi) = \beta (\mathbf{F}_2, \nabla \psi)_0 \quad \forall \psi \in Q, \quad (26)$$

где  $\beta > 0$  — произвольная постоянная.

Равенство (26) будем рассматривать как другое уравнение относительно функции  $\varphi$ , то есть как задачу определения  $\varphi \in Q$ :

$$c(\varphi, \psi) = \beta^{-1} b_2(\mathbf{v}_2, \psi) - (\mathbf{F}_2, \nabla \psi)_0 \quad \forall \psi \in Q. \quad (27)$$

Здесь  $c(\cdot, \cdot) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  — билинейная форма, определенная равенством

$$c(\varphi, \psi) = -b_2(\nabla\psi, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in Q.$$

Непрерывность формы  $c(\cdot, \cdot)$  на  $Q \times Q$  и ее  $Q$  — эллиптичность показаны в [10]. Ограниченность линейного функционала в правой части (27) на пространстве  $Q$  также устанавливается просто:

$$|(\mathbf{F}_2, \nabla\psi)_0 - \beta^{-1}b_2(\mathbf{v}_2, \psi)| \leq (\|\mathbf{F}_2\|_0 + \beta^{-1}\|\mathbf{v}_2\|_0)\|\psi\|_1 \quad \forall \psi \in Q.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса–Мильграма для однозначной разрешимости вариационной задачи (27).

Представим задачу (27) в операторном виде. Известно (см. [7], п.1.2), что ограниченный линейный оператор  $\mathcal{C} : Q \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , определяемый равенством

$$\langle \mathcal{C}\varphi, \psi \rangle = c(\varphi, \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in Q,$$

является изоморфизмом и, следовательно, имеет ограниченный обратный оператор  $\mathcal{C}^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow Q$ . Напомним также определение обобщенной дивергенции функции  $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  как функционала  $\div \mathbf{F}_2 \in H^{-1}(\Omega)$ , который задается равенством

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{F}_2, q \rangle = -(\mathbf{F}_2, \nabla q)_0 \quad \forall q \in Q.$$

Теперь вариационную задачу (27) можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathcal{C}\varphi, \psi \rangle = \langle \beta^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2, \psi \rangle + \langle \operatorname{div} \mathbf{F}_2, \psi \rangle \quad \forall \psi \in Q,$$

что соответствует операторному уравнению

$$\mathcal{C}\varphi = \beta^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2 + \div \mathbf{F}_2.$$

Таким образом, решение задачи (27) можно представить как

$$\varphi = \beta^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_2 + \mathcal{C}^{-1}\operatorname{div} \mathbf{F}_2. \quad (28)$$

Подставляя в первое уравнение системы (22) вместо функции  $\varphi$  ее выражение в правой части (28), получим отдельную вариационную задачу для определения векторной функции  $\mathbf{v}_2$  во всем пространстве  $V$ . Именно, найти  $\mathbf{v}_{2,\beta} \in V$ :  $\forall \mathbf{u} \in V$

$$a_2(\mathbf{v}_{2,\beta}, \mathbf{u}) + \beta^{-1} \langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v}_{2,\beta} \rangle = (\mathbf{F}_2, \mathbf{u})_0 - \langle \mathcal{B}\mathbf{u}, \mathcal{C}^{-1}\operatorname{div} \mathbf{F}_2 \rangle. \quad (29)$$

Теорема существования и единственности решения вариационной задачи (29) доказана в [10] [10].

Отметим, что в отличие от общего случая регуляризации (см. [7], п. 4.3) использование специфики билинейной формы  $a_2(\cdot, \cdot)$  и билинейной формы  $c(\cdot, \cdot)$ , связанной с оператором Лапласа  $\mathcal{C}$ , позволило сформулировать регуляризованную задачу в виде уравнения (29) так, что пара  $(\mathbf{v}_{2,\beta}, \varphi_\beta)$  будет точным решением системы (22) при любом  $\beta > 0$ . Здесь  $\mathbf{v}_{2,\beta}$  — решение задачи (29), а  $\varphi_\beta$  определяется формулой (28). В случае выполнения равенства  $\operatorname{div} \mathbf{F}_2 = 0$ , что соответствует условию согласования  $\operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{f}_2$  для задач (17) и (18), нетрудно видеть, что  $\varphi_\beta = 0$  и  $\mathbf{v}_{2,\beta}$  является решением задачи (21) без множителя Лагранжа  $\varphi$ .

## Заключение

- Исходная переопределенная система (1)–(3) с неоднородными дивергентными и краевыми условиями приведена заменами искоемых скоростей к системе (14)–(16) с однородными условиями.
- Решение системы (14)–(16) сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной задачи для второй скорости.
- Для задачи Стокса принята смешанная обобщенная постановка в терминах скорость–давление, которая хорошо изучена.
- Для решения второй переопределенной задачи использован новый вариант метода регуляризации, ранее предложенный и исследованный в работах [10], [13], [14] с участием одного из авторов.

## Список литературы

- [1] Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика, 1987, No. 6, с. 108–117.
- [2] Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, No. 9, с. 56–64.
- [3] Джураев Д., Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тезисы республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа 26–27 ноября 2015 г., Бухара, с. 197–198.
- [4] Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, с. 60–66.
- [5] Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012., 212 с.
- [6] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Изд. "Наука", 1970, 288 с.
- [7] Girault V. and Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [8] Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М. Краевые задачи для уравнений Максвелла // Доклады АН СССР, 1972, т. 207, № 2, с. 321–324.
- [9] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
- [10] Кремер И.А., Урев М.В. Регуляризация стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде и решение ее методом конечных элементов // Сиб. журн. вычисл. матем., 2009, т. 12, № 2, с. 161–170.
- [11] Nedelec J.C. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$  // Numer. Math., 1986, v. 50, p. 57–81.
- [12] Ф.Сьярле Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
- [13] Кремер И.А., Урев М.В. Решение методом конечных элементов регуляризованной версии стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл. матем., 2010, т. 13, № 1, с. 33–49.
- [14] Иванов М.И., Кремер И.А., Урев М.В. Решение методом регуляризации квазистационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т. 52, № 3, с. 564–576.

*Холматжон Худайназарович Имомназаров — д.ф.-м.н., ведущий науч. сотр.  
Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: itot@otzg.sscs.ru.*

*Михаил Вадимович Урев — д.ф.-м.н., ведущий науч. сотр.  
Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
Новосибирский государственный университет,  
Сибирский институт управления — филиал РАНХиГС;  
e-mail: urev@nmsf.sscs.ru.*

*Дата поступления — 29 мая 2017 г.*