

# ЭКОНОМИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. Б. Сорокин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.632

Одним из широко используемых подходов к решению задачи Коши для уравнения Лапласа является сведение ее к обратной задаче [1],[2]. Как правило, для решения последней применяется итерационная процедура. В работе будет описан экономичный прямой метод численного решения обратной задачи в областях прямоугольной формы. Идея основана на разложении искомого решения по базису, состоящему из собственных функций разностного аналога оператора Лапласа. Метод близок к предлагавшимся в [3],[4] алгоритмам, решающим задачу на дифференциальном уровне.

**Ключевые слова:** задача Коши для уравнения Лапласа, обратная задача, численное решение, экономичный прямой метод.

## 1 Постановка задачи

В области

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \in (a, b), x_2 \in (c, d)\}$$

рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Лапласа (задачу продолжения)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) &= 0, & x_2 \in (c, d), \\ u(a, x_2) &= u_a(x_2), & x_2 \in (c, d), \\ -\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, & x_1 \in (a, b). \end{aligned} \tag{1}$$

Необходимо найти функцию  $u(x_1, x_2)$  в области  $\Omega$  по данным  $u_a(x_2)$ .

Следуя [1],[2], сведем задачу продолжения (1) к обратной задаче:

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Фундаментальных исследований ОМН РАН "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач", программы Фундаментальных исследований Президиума РАН "Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация".

Определить функцию  $q(x_2)$  из соотношений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1}(a, x_2) &= 0, \quad x_2 \in (c, d), \\ u(b, x_2) &= q(x_2), \quad x_2 \in (c, d), \\ -\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, c) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, d) = 0, \quad x_1 \in (a, b). \end{aligned} \quad (2)$$

по дополнительной информации

$$u(a, x_2) = u_a(x_2), \quad x_2 \in (c, d). \quad (3)$$

Т.о. среди всех задач (2), отличающихся друг от друга функцией  $q(x_2)$ , надо указать такую задачу (такую  $q(x_2)$ ) чтобы ее решение  $u(x_1, x_2)$  удовлетворяло равенству (3).

Будем решать обратную задачу на дискретном уровне. Построим дискретный аналог (2),(3).

## 2 Дискретизация обратной задачи

Построим равномерные сетки:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \{x_{1,i} = x_{1,i-1} + h_1, \quad 1 \leq i \leq N_1 + 1, \quad x_{1,0} = a, \quad x_{1,N_1+1} = b, \quad h_1 = \frac{b-a}{N_1+1}\}, \\ \bar{\omega}_2 &= \{x_{2,j} = x_{2,j-1} + h_2, \quad 1 \leq j \leq N_2 + 1, \quad x_{2,0} = c, \quad x_{2,N_2+1} = d, \quad h_2 = \frac{d-c}{N_2+1}\} \\ \bar{\omega} &= \{x_{i,j} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega}, \quad x_{1,i} \in \bar{\omega}_1, \quad x_{2,j} \in \bar{\omega}_2\}. \end{aligned}$$

Дискретная аналог обратной задачи (2),(3) формулируется следующим образом:

Среди всех задач

$$\Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1} \quad (4)$$

$$u^h(x_{1,N_1+1}, x_{2,j}) = q^h(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1} \quad (5)$$

отличающихся друг от друга сеточной функцией  $q^h(x_{2,j})$ , надо указать такую задачу (такую сеточную функцию  $q^h(x_{2,j})$ ) чтобы ее решение  $u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$  удовлетворяло равенству

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}), \quad x_{2,j} \in [c, d]. \quad (6)$$

Здесь действие операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y^{(1)}(x_{1,i}) &= \begin{cases} -\frac{2}{h_1} y_{x_1}^{(1)}(x_{1,0}), & i = 0, \\ -y_{\bar{x}_1 x_1}^{(1)}(x_{1,i}), & i = \overline{1, N_1}, \end{cases} \\ \Lambda_2 y^{(2)}(x_{2,j}) &= \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}^{(2)}(x_{2,0}), & j = 0, \\ -y_{\bar{x}_2 x_2}^{(2)}(x_{2,j}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_2} y_{\bar{x}_2}^{(2)}(x_{2,N_2+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

### 3 Численный метод

Выберем в качестве базиса сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_2$  набор собственных функции дискретной спектральной задачи

$$\Lambda_2 \mu_{k_2}^{(2)}(x_{2,j}) = \lambda_{k_2}^{(2)} \mu_{k_2}^{(2)}(x_{2,j}), \quad x_{2,j} \in \bar{\omega}_2, \\ k_2 = \overline{0, N_2 + 1}.$$

Разложим подлежащую определению сеточную функцию  $q^h = \{q^h(x_{2,j})\}_{j=0}^{N_2+1}$  (заданную на сетке  $\bar{\omega}_2$ ) по этому базису:

$$q^h = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}.$$

Очевидно, что определение  $q^h$  эквивалентно отысканию коэффициентов  $\alpha_k$  в ее разложении по базису.

Для каждой базисной функции  $\mu_k^{(2)}$  находим решение

$$U_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}$$

вспомогательной задачи

$$\Lambda_1 U_k(x_{1,i}, x_{2,j}) + \Lambda_2 U_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ U_k(x_{1,N_1+1}, x_{2,j}) = \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (7)$$

Тогда, в силу линейности задачи (4),(5), ее решение представимо виде линейной комбинации

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k U_k(x_{1,i}, x_{2,j}).$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  можно определить из дополнительного условия (6)

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) \equiv \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k U_k(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_a(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (8)$$

Для нахождения решения  $U_k(x_{1,i}, x_{2,j})$  вспомогательной задачи (7) можно использовать один из двух широко известных алгоритмов: разложение в двойной ряд и разложение в однократный ряд. В обоих случаях решение для каждого номера задачи  $k$  представляется в форме

$$U_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \gamma_k(x_{1,i}) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (9)$$

В первом случае сеточная функция  $\gamma_k(x_{1,i})$ , заданная на сетке  $\bar{\omega}_1$ , выписывается в явном виде

$$\gamma_k(x_{1,i}) = \sum_{n=1}^{N_1+1} \left[ \frac{\mu_n^{(1)}(x_{1,N_1})}{h_1} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_k^{(2)}} \right] \mu_n^{(1)}(x_{1,i}), \\ k = 0, 1, 2, \dots, N_2 + 1.$$

Здесь  $\lambda_n^{(1)}$ ,  $\mu_n^{(1)}(x_{1,i})$  собственные числа и собственные функции спектральной задачи

$$\Lambda_1 \mu_n^{(1)}(x_{1,j}) = \lambda_n^{(1)} \mu_n^{(1)}(x_{1,j}), \quad x_{1,j} \in \bar{\omega}_1, \\ n = \overline{0, N_1}.$$

Во втором случае для вычисления  $\gamma_k(x_{1,i})$  необходимо решить трехточечное уравнение

$$\Lambda_1 \gamma_k(x_{1,i}) + \lambda_k^{(2)} \gamma_k(x_{1,i}) = \frac{1}{h_1^2} \delta_{i,N_1} \quad i = 0, 1, \dots, N_1.$$

Разложим дополнительную информацию  $u_a(x_{2,j})$  по базису  $\mu_k^{(2)}$ :

$$u_a(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2+1}. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (8) получаем

$$\sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \gamma_k(x_{1,0}) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Отсюда коэффициенты  $\alpha_k$  равны

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k(x_{1,0})}$$

и искомое краевое условие вычисляется по формуле

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2 + 1.$$

## Заключение

В работе представлен экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа. Стоимость его реализации составляет величину порядка  $O(N_1 N_2)$  арифметических операций.

Метод очевидным образом обобщается на случай различных других типов неоднородных краевых условий и уравнение Пуассона.

Второй из используемых алгоритмов позволяет применять описанный подход к операторам с переменными коэффициентами вида

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(k_1(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(k_2(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_2}) + k_3(x_1)u.$$

Возможна так же его реализация в цилиндрических координатах для операторов имеющих следующую форму

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rk_1(r) \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}(k_2(r) \frac{\partial u}{\partial \varphi}) + k_3(r)u.$$

Наконец, не представляет труда распространить метод на трехмерный случай.

## Список литературы

- [1] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 3. 1 (1995), 21-46.
- [2] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [3] A.L. Karchevsky Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs. EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL AND COMPUTER APPLICATIONS Volume 1, Issue 2(2013) 4-20
- [4] Ai-lin Qian Spectral method and its application to a Cauchy problem of the Laplace equation. IJRRAS 14 (1) January 2013

Сергей Борисович Сорокин — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: sorokin@sscc.ru;

Дата поступления — 25 апреля 2017 г.