

# О РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. В. Табаринцева

*Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск*

УДК 517.948

Рассматривается некорректно поставленная задача Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Получены двусторонние оценки модуля непрерывности для данной задачи. Устойчивые приближенные решения задачи строятся с помощью метода квазиобращения и метода вспомогательных граничных условий. Получены точные по порядку оценки погрешности рассмотренных методов на одном из классов равномерной регуляризации. В качестве примеров применения полученных общих результатов рассмотрены обратная граничная задача для нелинейного параболического уравнения с условиями периодичности и граничная обратная задача для нелинейного параболического уравнения без начальных условий. Приводятся примеры численного решения граничных обратных задач.

**Ключевые слова:** обратная задача, нелинейное дифференциальное уравнение, метод приближенного решения, модуль непрерывности обратного оператора.

## Введение

В настоящей работе рассматривается некорректно поставленная задача Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Приближенное решение строится методом вспомогательных граничных условий, который состоит в замене неустойчивой исходной задачи устойчивой задачей с «малым» параметром в граничных условиях и методом квазиобращения, который состоит в замене неустойчивой исходной задачи задачей для уравнения с «малым» параметром. Получена точная по порядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов корректности обратной граничной задачи.

Для исследования рассмотренного метода приближенного решения на оптимальность основную роль играет модуль непрерывности обратного оператора, техника вычисления которого хорошо известна для широкого класса линейных задач ([2]), но недостаточно разработана в нелинейном случае.

В настоящей работе получены двусторонние оценки норм решений нелинейной задачи через нормы решений соответствующей линейной задачи, что позволяет получить двусторонние оценки модуля непрерывности для нелинейной обратной задачи.

Доказана оптимальность по порядку метода вспомогательных граничных условий с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева на рассмотренном классе корректности.

В качестве примера применения полученных результатов рассматриваются граничная обратная задача для нелинейного параболического уравнения на конечном промежутке времени и граничная обратная задача для нелинейного параболического уравнения без начальных условий.

Вопросы теплообмена имеют особое значение в таких областях техники, как авиационная и ракетно-космическая техника, энергетика, металлургия. При этом большое значение имеют экспериментальные исследования, стендовая и натурная отработка тепловых режимов, создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов по результатам экспериментов и испытаний. В основу этих методов могут быть положены решения обратных задач теплообмена, причем в ряде случаев обратные задачи являются практически единственным средством получения необходимых результатов. Методы обратных

задач обладают высокой информативностью и позволяют проводить экспериментальные исследования в условиях, максимально приближенных к натурным.

Диагностика и идентификация процессов теплообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов, однако, граничные обратные задачи — это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Граничные обратные задачи представляют и методический интерес, т.к. задачи данного типа, по сравнению с коэффициентными и геометрическими задачами, как правило, имеют большую склонность к искажению результатов, связанную с некорректностью постановок, априорная информация о точном решении граничных обратных задач бывает ограниченной ([3]). При исследовании тепловых процессов высокой интенсивности особое значение имеет учет эффектов, связанных с нелинейностью процесса.

## 1 Постановка задачи

Пусть  $H$  — гильбертово пространство над полем комплексных чисел,  $A : H \rightarrow H$  — линейный неограниченный самосопряженный оператор с областью определения, плотной в  $H$ . Рассмотрим задачу вычисления элемента  $h = u(l)$ ,  $h \in H$ , где  $u(x)$  удовлетворяет условиям

$$u''_{xx} = iAu + f(u); \quad u_x(0) = 0; \quad u(0) = \varphi. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi \in H$  — заданный элемент, — отображение, удовлетворяющее условию Липшица.

$$\|f(u) - f(v)\|_H \leq L\|u - v\|_H,$$

где  $L$  — постоянная.

Задача (1) поставлена некорректно. Пусть вместо точного условия  $\varphi \in H$  известны  $\delta$ -приближения  $\varphi_\delta$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что  $\|\varphi_\delta - \varphi\| < \delta$ . Требуется по исходным данным задачи построить приближенное решение и оценить его отклонение от точного решения.

### 1.1 Исследование «прямой» задачи.

Рассмотрим «прямую» задачу, соответствующую задаче (1), т.е. задачу вычисления элемента  $\varphi \in H$ ,  $\varphi = u(0)$ , где  $u(x)$  является решением краевой задачи для уравнения второго порядка, т.е. удовлетворяет условиям

$$u''_{xx} = iAu + f(u); \quad u_x(0) = 0; \quad u(l) = h. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть отображение  $f : H \rightarrow H$  удовлетворяет условию Липшица с постоянной  $L < 1$ . Тогда задача (2) имеет единственное решение для любого элемента  $h \in D(A)$ .

Наряду с задачей (2) рассмотрим соответствующую линейную задачу, т.е. задачу вычисления элемента  $\psi \in H$ ,  $\psi = v(0)$ , где  $v(x)$  является решением краевой задачи для уравнения второго порядка, т.е. удовлетворяет условиям

$$v''_{xx} = iAv; \quad v_x(0) = 0; \quad v(l) = h. \quad (3)$$

Для норм решений линейной и нелинейной краевых задач выполняется следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $h_1, h_2 \in H$ ,  $\varphi_1 = u_1(0)$ ,  $\varphi_2 = u_2(0)$ ,  $\psi_1 = v_1(0)$ ,  $\psi_2 = v_2(0)$ , где  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  — соответствующие решения задачи (2),  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  — решения задачи (3). Тогда выполняются неравенства

$$e^{-Ll}\|\psi_1 - \psi_2\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq e^{Lle^{Ll}}\|\psi_1 - \psi_2\|.$$

## 2 Исследование обратной задачи.

Пусть  $M \subset H$  — компактное множество.

Предположим, что для заданного элемента  $\varphi \in H$  существует точное решение  $h \in H$  нелинейной обратной задачи (1), принадлежащее множеству  $M$ , но элемент  $\varphi(t)$  нам не известен, а известен элемент  $\varphi_\delta \in H$  такой, что  $\|\varphi - \varphi_\delta\| < \delta$ . Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение  $h_\delta$  граничной обратной задачи и оценить его отклонение от точного решения.

Наряду с нелинейной обратной задачей рассмотрим обратную задачу для соответствующего линейного уравнения, т.е. задачу вычисления эоэлемента  $h = v(l)$ ,  $h \in H$ , где  $v(x)$  удовлетворяет условиям

$$v''_{xx} = iAv; \quad v_x(0) = 0; \quad v(l) = \psi. \quad (4)$$

Рассмотрим величины:

$\omega(M, \delta) = \sup\{\|h_1 - h_2\| : h_1, h_2 \in M, \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \delta\}$  — модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup\{\|h_1 - h_2\| : h_1, h_2 \in M, \|\psi_1 - \psi_2\| \leq \delta\}$  — модуль непрерывности для линейной обратной задачи. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Существует  $\delta_0 > 0$ , такое, что для всех  $0 < \delta < \delta_0$  выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-Ll}\delta) \leq \omega(M, \delta) \leq \hat{\omega}(M, e^{Le^{Ll}}\delta).$$

### 3 Метод квазиобращения

Вместо неустойчивой задачи (1) рассмотрим задачу с малым параметром — задачу восстановления элемента  $h_\delta^\epsilon = u_\delta^\epsilon(l)$ , где  $h_\delta^\epsilon \in H$ ,  $u_\delta^\epsilon(x)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{d^2 u_\delta^\epsilon}{dx^2} = iAu_\delta^\epsilon - \epsilon A^2 u_\delta^\epsilon + f(u_\delta^\epsilon); \quad \frac{du_\delta^\epsilon}{dx}(0) = 0; \quad u_\delta^\epsilon(0) = \varphi_\delta. \quad (5)$$

В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать элемент

$$h_\delta^\epsilon = u_\delta^\epsilon(l),$$

где  $u_\delta^\epsilon(x)$  — решение задачи (5) при подходящем выборе зависимости  $\epsilon = \epsilon(\delta)$ .

### 4 Оценка погрешности метода квазиобращения

Пусть  $h \in H$  — точное решение задачи (1). В качестве характеристики точности приближенного решения задачи (1), вычисленного с помощью метода квазиобращения (5), на множестве  $M$ , рассмотрим величину

$$\Delta = \sup\{\|h_\delta^\epsilon - h\| : h \in M; \|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta\}.$$

Здесь зависимость  $\epsilon$  от  $\delta$  выбирается по схеме М.М. Лаврентьева. Используем очевидную оценку

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_2 = \sup_{\|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta} \|h_\delta^\epsilon - h_\epsilon\|;$$

$$\Delta_1 = \sup_{h \in M} \|h_\epsilon - h\|.$$

Здесь  $h_\epsilon = u_\epsilon(l)$ , где  $u_\epsilon(x)$  — решение вспомогательной задачи (5) при точно заданном  $\varphi$ .

Имеем оценки

$$\Delta_2(\epsilon, \delta) \leq e^{Ll} e^{\frac{l}{4\epsilon}} \delta \quad (6)$$

$$\Delta_1 \leq C e^{C_1 l} \epsilon. \quad (7)$$

Выберем зависимость  $\epsilon = \epsilon(\delta)$  из условия

$$\epsilon \simeq \frac{1}{\ln^2(r/\delta)},$$

при  $\delta \rightarrow 0$ . Следовательно, при  $\delta \rightarrow 0$

$$\Delta \simeq \frac{1}{\ln^2(r/\delta)}.$$

## 5 Метод вспомогательных граничных условий

Вместо неустойчивой задачи (1) рассмотрим задачу с малым параметром — задачу восстановления элемента  $h_\delta^\varepsilon = u_\delta^\varepsilon(l)$ , где  $u_\delta^\varepsilon(x)$  удовлетворяет условиям

$$\frac{d^2 u_\delta^\varepsilon}{dx^2} = i A u_\delta^\varepsilon + f(u_\delta^\varepsilon), \quad (0 < x < l) \quad (8)$$

$$\frac{du_\delta^\varepsilon}{dx}(0) = 0; \quad u_\delta^\varepsilon(0) + \varepsilon u_\delta^\varepsilon(l) = \varphi_\delta. \quad (9)$$

В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать элемент

$$h_\delta^\varepsilon = u_\delta^\varepsilon(l),$$

где  $u_\delta^\varepsilon(x)$  — решение задачи (8)–(9) при подходящем выборе зависимости  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ .

## 6 Оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий

Пусть  $h(t)$  — точное решение задачи (1). В качестве характеристики точности приближенного решения задачи (15), вычисленного с помощью метода вспомогательных граничных условий, на классе  $M$ , рассмотрим величину

$$\Delta = \sup\{\|h_\delta^\varepsilon - h\| : h \in M; \|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta\}.$$

Здесь зависимость  $\varepsilon$  от  $\delta$  выбирается по схеме М.М. Лаврентьева. Используем очевидную оценку

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sup_{\|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta} \|h_\delta^\varepsilon - h^\varepsilon\|; \\ \Delta_1 &= \sup_{h \in M} \|h_\varepsilon - h\|. \end{aligned}$$

Здесь  $h_\varepsilon$  — решение вспомогательной задачи (8) при точно заданном граничном условии.

Обозначим

$$\varepsilon_l = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)},$$

При  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \neq \varepsilon_l$  имеем оценки

$$\Delta_2(\varepsilon, \delta) \leq \frac{2e^{Ll}}{C\varepsilon} \delta \quad (10)$$

$$\Delta_1(\varepsilon) \leq re^{Ll} \frac{2l^2}{C(\ln(C+1)\varepsilon)^2}. \quad (11)$$

Выберем зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  по схеме М.М. Лаврентьева, т.е. зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  выбирается из условий

$$\frac{1}{\varepsilon} \delta = re^{Ll} \frac{l^2}{(\ln(C+1)\varepsilon)^2} \quad (12)$$

$$|\varepsilon - \varepsilon_l| > C\varepsilon. \quad (13)$$

Имеем равенство

$$\delta = \frac{l^2 \varepsilon}{(\ln(C+1)\varepsilon)^2}.$$

Следовательно,  $\ln \varepsilon(\delta) \simeq \ln \delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ . При таком выборе параметра регуляризации из полученной оценки для  $\Delta(\varepsilon(\delta), \delta)$  следует что, существуют числа  $C_1 > 0$ ,  $\delta_1 > 0$ , такие, что для всех  $\delta < \delta_1$ , таких что для соответствующих значений  $\varepsilon$ , удовлетворяющих условию (12), выполняется неравенство (13), справедлива оценка

$$\Delta(\varepsilon(\delta), \delta) \leq \frac{C}{\ln^2(r/\delta)}. \quad (14)$$

## 7 Примеры

**Пример 1.** (граничная обратная задача без начальных условий)

Рассмотрим граничную обратную задачу без начальных условий, т.е. задачу восстановления функции  $h(t) = u(l, t)$  (граничного условия), где  $h(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ ,

$$u(x, t) \in C([0; l]; W_2^{1,0}(-\infty; \infty)) \cap C^2((0; l); W_2^{1,0}(-\infty; \infty)),$$

удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (0 < x < l) \quad (15)$$

$$u_x(0, t) = 0; \quad u(0, t) = \varphi(t). \quad (16)$$

Здесь  $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$  — заданная функция,  $f : L_2(-\infty, \infty) \rightarrow L_2(-\infty, \infty)$  — отображение, удовлетворяющее условию Липшица

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq L \|u_1 - u_2\|_{L_2(-\infty, \infty)}.$$

Задача (15)–(16) имеет вид (1), где  $A$  — линейный оператор в  $L_2(-\infty, \infty)$ , действующий по правилу

$$Au = u'_t; D(A) = \{u \in L_2(-\infty, \infty) : u'_t \in L_2(-\infty, \infty)\}.$$

**Пример 2.** (граничная обратная задача на конечном промежутке времени)

Рассмотрим граничную обратную задачу на конечном промежутке времени, т.е. задачу восстановления функции  $h(t) = u(l, t)$  (граничного условия), где  $h(t) \in L_2[0, T]$ ,

$$u(x, t) \in C([0; l]; W_2^{1,0}[0, T]) \cap C^2((0; l); W_2^{1,0}[0, T]),$$

удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (0 < x < l) \quad (17)$$

$$u_x(0, t) = 0; \quad u(0, t) = \varphi(t); \quad u(x, 0) = u(x, T) = 0. \quad (18)$$

Здесь  $\varphi(t) \in L_2[0, T]$  — заданная функция,  $f : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$  — отображение, удовлетворяющее условию Липшица

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_{L_2[0, T]} \leq L \|u_1 - u_2\|_{L_2[0, T]}.$$

Задача (16) имеет вид (1), где  $A$  — линейный оператор в  $L_2[0, T]$ , действующий по правилу

$$Au = u'_t; D(A) = \{u \in L_2[0, T] : u'_t \in L_2[0, T] \mid u(0) = u(T) = 0\}$$

(оператор, имеющий самосопряженные расширения).

## 8 Численное решение обратной граничной задачи

На рис. 1 представлены результаты численного решения обратной граничной задачи для параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий. Для конечно-разностной аппроксимации регуляризованной задачи использовалась стандартная неявная разностная схема [7]. Приближенное решение построено для задачи с возмущенными исходными данными.

## Заключение

В работе получены следующие результаты: получены двусторонние оценки модуля непрерывности для неустойчивой задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка через модуль непрерывности соответствующей линейной задачи; получены точные по порядку оценки погрешности метода вспомогательных граничных условий и метода квазиобращения на одном из классов равномерной регуляризации нелинейной задачи, доказана оптимальность по порядку рассмотренных методов приближенного решения.

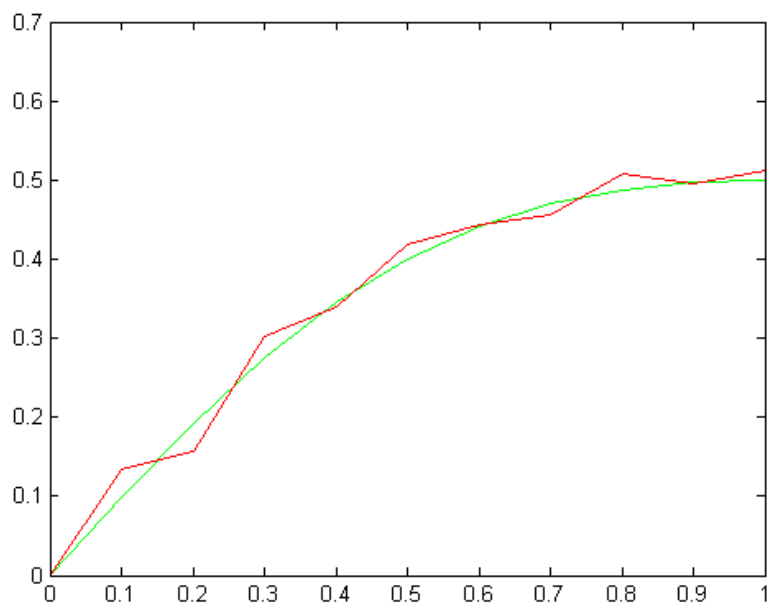


Рис. 1: Результаты численного решения

## Список литературы

- [1] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
- [3] Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
- [4] Танана В.П. Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 39, № 5. С. 503–507.
- [5] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
- [6] Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 262 с.
- [7] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989

*Елена Владимировна Табаринцева — к.ф.-м.н., доцент  
Южно-Уральского государственного университета  
e-mail: tabarintcevaev@susu.ru.*

*Дата поступления — 31 мая 2017 г.*