

# О МЕТОДЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

С. И. Кабанихин, И. М. Куликов, М. А. Шишленин

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 517.968

В статье представлен новый гидродинамический программный код AstroPhi 2.0 для численного моделирования. В работе описан новый численный метод высокого порядка точности для решения уравнений гравитационной газовой динамики, записанных в виде решения прямой и обратной задачи, в сферической симметрии. Метод основан на комбинации метода крупных частиц, метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. Приведены результаты верификации численного метода, результаты численного решения прямой задачи коллапса Эврада, а также подходы к решению обратной задачи.

**Ключевые слова:** Numerical simulation, High order accurate numerical method, Computational astrophysics, Direct and inverse problems, Evrard collapse problem.

## Введение

Динамика большинства астрофизических течений происходит в течение нескольких миллионов лет, поэтому наблюдения за ними доступны лишь в настоящий момент времени, а основным вопросом является нахождение некоторого класса начальных данных, из которых может получиться наблюдаемая конфигурация астрофизических объектов. Основным способом решения таких задач является подбор начальных данных, приводящих в рамках рассматриваемой модели к качественному соответствию наблюдаемым данным. Такой подход достаточно трудоемкий и неформализуемый, поэтому актуальной проблемой является решение обратной задачи динамики астрофизических объектов. Существенная трехмерность и нестационарность астрофизических задач даже при использовании суперкомпьютеров в настоящее время не позволяет решать такие обратные задачи в полной постановке. В связи с этим рассматриваются некоторые упрощенные (прежде всего с точки зрения мерности пространства) постановки, которые с одной стороны адекватно описывают динамику астрофизического объекта, а с другой позволяют разрешить обратную задачу.

Процессы коллапса астрофизических объектов в настоящее время активно исследуются теоретически в связи с появлением значительного числа наблюдательных данных. Явление коллапса имеет место как на начальной стадии звездной эволюции, так и на конечной стадии эволюции звезд (взрывы сверхновых с коллапсирующим ядром) [1]. В настоящей работе в качестве такой задачи рассматривается задача коллапса звезды в постановке Эврада [2] в сферической симметрии. Задача Эврада активно исследуется многими авторами и является основной тестовой задачей для численных методов и их программных реализаций, которые используются для моделирования образования звезд [3].

Основной фокус данной статьи — описание методологии решения прямой и обратной задачи коллапса астрофизических объектов, в том числе: численного метода высокого порядка точности для решения уравнений гравитационной газовой динамики, его верификации на задаче о разлете газа в вакуум, решение прямой задачи Эврада и описание подхода к формулировке и решению обратной задачи. Для решения прямой и

обратной задачи коллапса Эвварда самогравитирующего газа в одномерных сферических координатах разработан и реализован численный метод решения, основанный на комбинации метода разделения операторов, метода крупных частиц, метода С.К. Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне.

## 1 Уравнения гравитационной газовой динамики в сферических координатах

Запишем уравнения гравитационной газовой динамики в операторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ E + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \rho \vec{u} \vec{u} + p \\ (E + \frac{\rho \vec{u}^2}{2} + p) \vec{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \nabla \Phi \\ \rho \vec{u} \cdot \nabla \Phi \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\vec{u}$  — вектор скорости,  $E$  — внутренняя энергия газа,  $p$  — давление газа,  $\Phi$  — гравитационный потенциал. Внутренняя энергия  $E$  и давление  $p$  связаны уравнением состояния идеального газа:

$$p = E(\gamma - 1) \quad (2)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Система уравнений дополнена уравнением Пуассона для гравитационного потенциала:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (3)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная. Для формулировки прямой и обратной задачи коллапса мы будем рассматривать неконсервативную форму уравнений (1), (2) и (3) в сферической симметрии. Таким образом, получим следующие решаемые уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho u r^2 \\ \rho u^2 r^2 \\ p u r^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ (\gamma - 1)p \frac{1}{r^2} \frac{\partial u r^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Уравнение Пуассона записывается в виде:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho \quad (5)$$

Такая форма уравнений является прямым следствием законов сохранения и более удобная для формулировки обратной задачи, а с учётом того, что в коллапсе отсутствуют сильные ударные волны не вносит значительной погрешности в закон сохранения полной (сумма внутренней, кинетической и потенциальной) энергии в численном решении.

## 2 Описание численного метода решения

В основе численного метода решения будем использовать метод крупных частиц (в зарубежной литературе такой подход в основном называется "operator splitting approach"), в котором система (4) разбивается на два этапа: эйлеров этап, на котором решаются уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ (\gamma - 1)p \frac{1}{r^2} \frac{\partial u r^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

и лагранжев этап, на котором решаются уравнения в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho r^2 \\ \rho u r^2 \\ p r^2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho r^2 u \\ \rho u r^2 u \\ p r^2 u \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

Последний вид (7) уравнений лагранжевого этапа нам более удобен для организации единой вычислительной процедуры. Уравнение Пуассона решается на отдельном этапе.

## 2.1 Эйлеров этап численного метода

Для аппроксимации пространственных производных на эйлеровом этапе численного метода используется решение задачи на каждой границе между расчетными ячейками. Для этого перепишем систему (4) без учета градиента гравитационного потенциала в следующем квазилинейной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \rho^{-1} \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{r}\rho u \\ 0 \\ \frac{2\gamma}{r}pu \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

Исключая из последней системы (8) члены, связанные с адвективным переносом, который мы учтем на лагранжевом этапе, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\gamma}{r}pu \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

Система (9) решается на каждой границе между ячейками в два этапа: на первом решается "плоская" задача Римана для уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \gamma p & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

на втором этапе добавляется правая часть, связанная с использованием сферических координат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\gamma}{r}pu \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

Будем также предполагать, что в каждой ячейке построена локальная парабола [4, 5]. Тогда итоговые формулы для аппроксимации величин скорости  $U$  и давления  $P$  на границе между левой (L) и правой (R) ячейками имеют вид:

$$U = \frac{u_L(-\lambda\tau) + u_R(\lambda\tau)}{2} + \frac{p_L(-\lambda t) - p_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}} \quad (12)$$

$$P = \frac{p_L(-\lambda\tau) + p_R(\lambda\tau)}{2} + \frac{u_L(-\lambda t) - u_R(\lambda t)}{2} \sqrt{\frac{\gamma(\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2})(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}} - \frac{2\tau\gamma}{r} \cdot \frac{p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \cdot \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (13)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma(p_L\sqrt{\rho_L} + p_R\sqrt{\rho_R})}{\rho_L^{3/2} + \rho_R^{3/2}}}$$

$$q_L(-\lambda\tau) = q_i^R - \frac{\lambda\tau}{2h} \left( \Delta q_i - q_i^6 \left( 1 - \frac{2\lambda\tau}{3h} \right) \right)$$

$$q_R(\lambda\tau) = q_i^L + \frac{\lambda\tau}{2h} \left( \Delta q_i + q_i^6 \left( 1 - \frac{2\lambda\tau}{3h} \right) \right)$$

где  $\tau$  — шаг по времени, выбираемый из условия Куранта,  $h$  — шаг по пространству. Алгоритм вычисления значений  $q_i^L$ ,  $q_i^R$ ,  $\Delta q_i$ ,  $q_i^6$  подробно описан в работе [6]. Формулы (12, 13) используются для аппроксимации производных в уравнениях (6). Для аппроксимации градиента гравитационного потенциала используется центральная разность, в связи с тем, что гравитационный потенциал суть гладкая функция.

## 2.2 Лагранжев этап численного метода

На лагранжевом этапе происходит адвективный перенос гидродинамических параметров и все уравнения на лагранжевом этапе имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (fr^2) + \frac{\partial}{\partial r} (fr^2u) = 0$$

где  $f$  — это функции плотности, импульса или давления газа. Для решения уравнений используется аналогичный, что и на эйлеровом этапе подход. Для вычисления потока  $F = fr^2u$  при  $\lambda = |u|$  используется формула:

$$F = u \times \begin{cases} f_L(-\lambda\tau)r^2, u \geq 0 \\ f_R(\lambda\tau)r^2, u < 0 \end{cases} \quad (14)$$

где  $f_L(-\lambda\tau)$  и  $f_R(\lambda\tau)$  — кусочно-параболические функции для величины  $f$  и скорость на интерфейсе между ячейками вычисляется по формуле:

$$u = \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (15)$$

Для построения кусочно-параболического решения используется аналогичная процедура, которая приведена в предыдущем разделе.

### 2.3 Решение уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона в одномерной постановке может быть решено алгебраическим прямым методом, например методом прогонки. Для этого аппроксимируем уравнение Пуассона на трехточечном шаблоне:

$$\Phi_{i+1} \left( \frac{r_{i+1/2}^2}{h^2} \right) - \Phi_i \left( \frac{r_{i+1/2}^2}{h^2} + \frac{r_{i-1/2}^2}{h^2} \right) + \Phi_{i-1} \left( \frac{r_{i-1/2}^2}{h^2} \right) = 4\pi Gr_i^2 \rho_i \quad (16)$$

с граничными условиями:

$$\Phi_0 = \Phi_1 \quad \Phi_N = -M/r_N$$

где  $M$  — масса газа в области.

## 3 Задача о сферически симметричном разлете газа в вакуум

Для верификации численного метода решения уравнений газовой динамики будем рассматривать сферически симметричный разлёт статического в начальный момент времени газового шара, ограниченного радиусом  $R = 1$  и имеющий равномерное распределение плотности  $\rho = 1$  и давления  $p = 1$ . Результаты моделирования разлёт газового облака на момент времени  $t = 0.4$  в вакуум приведены на рисунке (3).

Из рисунка видно, что контактный разрыв движется по направлению от центра газового шара, за ним идёт волна разрежения. Численное решение имеет небольшую диссипацию в области стыковки волны разрежения и невозмущенной области, а также небольшие колебания численного решения плотности и импульса после контактного разрыва, что по всей видимости связано со способом деления на функцию плотности на границе газ-вакуум и возникающие отсюда отражения с малой амплитудой.

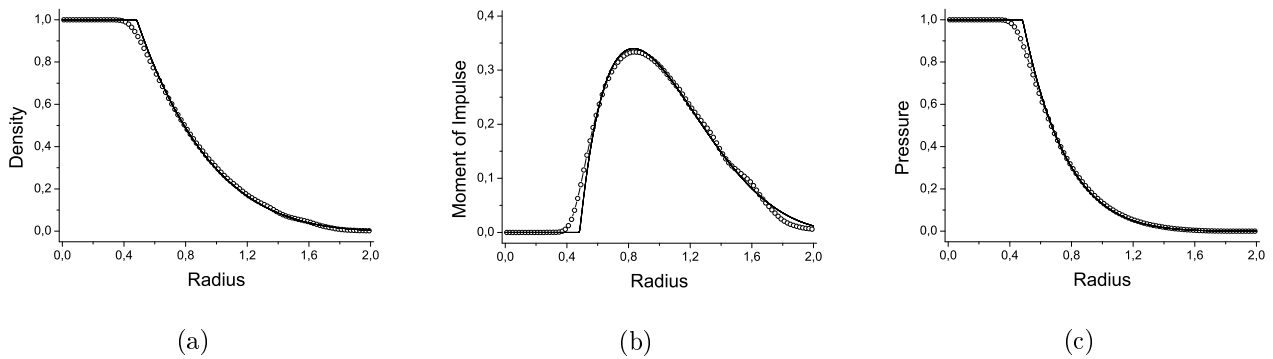


Рис. 1: Результаты моделирования на момент времени  $t = 0.4$  миллионов лет. Плотность — (а), импульс — (б), давление — (с). Численное решение нарисовано кружками, точное решение нарисовано тонкой линией.

## 4 Задача Эвварда

Задача коллапса Эвварда является одним из основных тестов для проверки качества SPH методов, при этом достаточно мало эйлеровых численных методов было апробировано на этой задаче, хотя такие тесты были сделаны [7]. Интерес к задаче коллапса Эвварда связан с тем, что в начальные моменты времени происходит резкое сжатие самогравитирующей газовой сферы, затем быстрый нагрев центральной области и образование ударной волны.

В качестве начальных данных задана самогравитирующая сфера при  $G = 1$ , ограниченная радиусом  $R = 1$ . Профиль плотности задается в виде  $\rho(r) = 1/(2\pi r)$ , профиль давления задается в виде  $p(r) \sim \rho^\gamma$ ,  $E_0 = 0.05$  — начальная внутренняя энергия газа,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. Поведение каждого вида энергий приведены на рисунке (4). В момент времени  $t = 0.7$  происходит наибольшее сжатие, после которого начинается процесс расширения с образованием ударной волны. В графике полной энергии в этот момент времени образуется некоторый провал, который затем частично компенсируется, это связано с проблемой пространственного разрешения для описания сколлапсированного шара даже в случае использования одномерных сферических координат. Стоит отметить, что такая погрешность достаточно мала и устраняется до необходимого предела с помощью измельчения пространственной сетки.

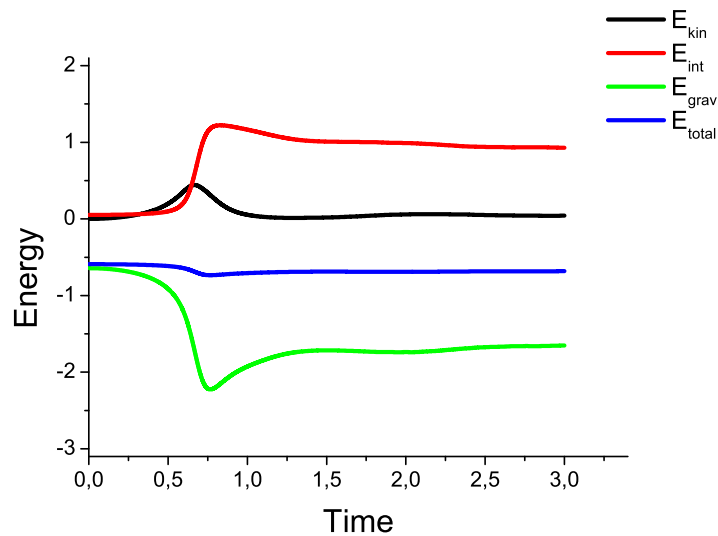


Рис. 2: Поведение различных видов энергий: кинетической (черная линия), внутренней (красная линия), потенциальная (зеленая линия) и полная (синяя линия).

## 5 Задача Седова

Задача Седова о точечном взрыве в астрофизике формулируется как задача о взрыве сверхновой. Для моделирования задачи о точечном взрыве будем рассматривать область  $[-0.5; 0.5]^3$ , показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , начальную плотность в области  $\rho_0 = 1$ , и начальное давление  $p_0 = 10^{-5}$ . В момент времени  $t = 0$  выделяется внутренняя энергия  $E_0 = 0.6$ . Область взрыва ограничена радиусом  $r_{central} = 0.02$ . Для вычислительного эксперимента использовалась расчетная сетка  $100^3$ . Смоделированный профиль плотности и момента импульса на момент времени  $t = 0.05$  изображен на рисунке (3). Задача Седова о точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность метода и его реализации воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха. Скорость звука фоновой среды пренебрежимо мала, поэтому число Маха достигает значения  $M = 1432$ . Авторский численный метод достаточно хорошо воспроизводит положение ударной волны, а также профиль плотности и импульса.

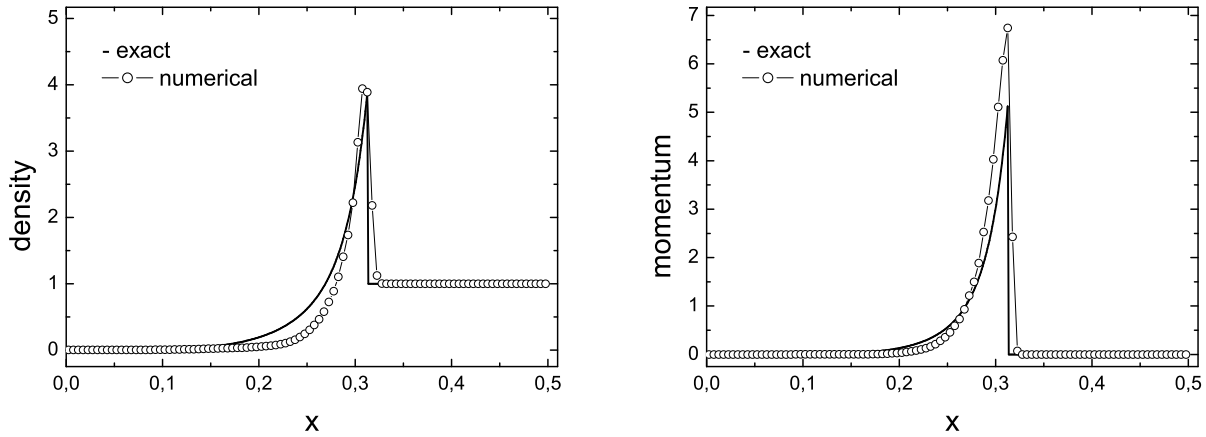


Рис. 3: Плотность (слева) и момент импульса (справа), полученные при численном решении задачи Седова о точечном взрыве. Сплошной линией изображено точное решение

## 6 Метод решения обратной задачи взрыва сверхновой звезды

Рассмотрим постановку прямой задачи для системы (4), (5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ p \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho u r^2 \\ \rho u^2 r^2 \\ p u r^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ (\gamma - 1) p \frac{1}{r^2} \frac{\partial u r^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho \quad (18)$$

с начальными условиями:

$$\rho(r, 0) = q_1(r), \quad p(r, 0) = q_2(r), \quad u(r, 0) = q_3(r) \quad (19)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \rho(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \rho(R, t) = \rho_R(t), \quad (20)$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial r} = 0, \quad p(R, t) = p_R(t), \quad (21)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial r} = 0, \quad u(R, t) = u_R(t). \quad (22)$$

Должны выполняться условия согласования в начальный момент времени:

$$\frac{\partial \rho(0, 0)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p(0, 0)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial r} = 0 \quad (23)$$

Обратная задача заключается в определении начального положения  $q_1(r)$ ,  $q_2(r)$ ,  $q_3(r)$  по заданной дополнительной информации в наблюдаемый сейчас момент времени  $T$ :

$$\rho(r, T) = f_1(r), \quad p(r, T) = f_2(r), \quad u(r, T) = f_3(r). \quad (24)$$

Для решения нелинейной обратной задачи (17), (18), (19), (24) будем минимизировать целевой функционал [9, 11]

$$J(\vec{q}) = \int_0^R \left[ (\rho(r, T; \vec{q}) - f_1(r))^2 + (p(r, T; \vec{q}) - f_2(r))^2 + (u(r, T; \vec{q}) - f_3(r))^2 \right] dr \quad (25)$$

методом градиентного спуска

$$\vec{q}^{(n+1)} = \vec{q}^{(n)} - \alpha_n J'(\vec{q}^{(n)}),$$

где  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $\vec{q}^{(0)}$  — начальное приближение,  $\alpha_n$  — параметр спуска,  $J'(\vec{q}^{(n)}) = (J'_1(\vec{q}^{(n)}), J'_2(\vec{q}^{(n)}), J'_3(\vec{q}^{(n)}))$  — градиент функционала.

Алгоритм метода будет состоять из следующих этапов

1. Задаем начальное приближение  $\vec{q}^{(0)}(r) = (q_1^{(0)}(r), q_2^{(0)}(r), q_3^{(0)}(r))$ .
2. Предполагаем, что приближенное решение обратной задачи на  $n$  шаге мы нашли. Покажем как определить решение на шаге  $n + 1$ .
3. Решаем прямую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho^{(n)} \\ \rho^{(n)} u^{(n)} \\ p^{(n)} \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho^{(n)} u^{(n)} r^2 \\ \rho^{(n)} u^{(n)2} r^2 \\ p^{(n)} u^{(n)} r^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p^{(n)}}{\partial r} + \rho^{(n)} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial r} \\ (\gamma - 1) p^{(n)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u^{(n)} r^2}{\partial r} \end{pmatrix} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho^{(n)}, \quad (27)$$

$$\rho^{(n)}(r, 0) = q_1^{(n)}(r), \quad p^{(n)}(r, 0) = q_2^{(n)}(r), \quad u^{(n)}(r, 0) = q_3^{(n)}(r), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho^{(n)}}{\partial r}(0, t) = 0, \quad \rho^{(n)}(R, t) = \rho_R(t), \quad (29)$$

$$\frac{\partial p^{(n)}}{\partial r}(0, t) = 0, \quad p^{(n)}(R, t) = p_R(t), \quad (30)$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial r}(0, t) = 0, \quad u^{(n)}(R, t) = u_R(t). \quad (31)$$

4. Решаем сопряженную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1^{(n)}}{\partial t} - \psi_2^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + u^{(n)} \left[ \frac{\partial \psi_1^{(n)}}{\partial r} - \psi_2^{(n)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial r} \right] + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r \psi_2^{(n)})}{\partial r} + \frac{\Phi^{(n)}}{r^2} \frac{\partial (r^2 \psi_2^{(n)})}{\partial r} + 4\pi G \psi_4^{(n)} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_3^{(n)}}{\partial t} + u^{(n)} \frac{\partial \psi_3^{(n)}}{\partial r} - \frac{\gamma - 1}{r^2} \psi_3^{(n)} \frac{\partial (r^2 u^{(n)})}{\partial r} = 0, \quad (33)$$

$$\rho^{(n)} \frac{\partial \psi_2^{(n)}}{\partial t} + \rho^{(n)} \frac{\partial \psi_1^{(n)}}{\partial r} + \rho^{(n)} u^{(n)} \frac{\partial \psi_2^{(n)}}{\partial r} + p^{(n)} \frac{\partial \psi_3^{(n)}}{\partial r} + (\gamma - 1) \frac{\partial (p^{(n)} \psi_3^{(n)})}{\partial r} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi_4^{(n)}}{\partial r} \right) - \rho^{(n)} \frac{\partial (r^2 \psi_2^{(n)})}{\partial r} = 0, \quad (35)$$

$$\psi_1^{(n)}(r, T) = \frac{2}{r^2} [\rho^{(n)}(r, T) - f_1(r)], \quad (36)$$

$$\psi_3^{(n)}(r, T) = \frac{2}{r^2} [p^{(n)}(r, T) - f_2(r)], \quad (37)$$

$$\psi_2^{(n)}(r, T) = \frac{2}{r^2 \rho^{(n)}(r, T)} [u^{(n)}(r, T) - f_3(r)], \quad (38)$$

$$\psi_j^{(n)}(0, t) = \psi_j^{(n)}(R, t) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \psi_4^{(n)}}{\partial r}(0, t) = 0, \quad \psi_4^{(n)}(R, t) = 0. \quad (40)$$

5. Считаем градиент функционала по следующим формулам

$$J'_1(\vec{q}^{(n)}) = r^2 \psi_1^{(n)}(r, 0), \quad (41)$$

$$J'_2(\vec{q}^{(n)}) = r^2 \psi_3^{(n)}(r, 0), \quad (42)$$

$$J'_3(\vec{q}^{(n)}) = r^2 \rho^{(n)}(r, 0) \psi_2^{(n)}(r, 0). \quad (43)$$

6. Находим приближенное решение на следующем шаге

$$q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} - \alpha_1 J'_1(\vec{q}^{(n)}), \quad (44)$$

$$q_2^{(n+1)} = q_2^{(n)} - \alpha_2 J'_2(\vec{q}^{(n)}), \quad (45)$$

$$q_3^{(n+1)} = q_3^{(n)} - \alpha_3 J'_3(\vec{q}^{(n)}), \quad (46)$$

где  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

7. Если выполняется критерий остановки  $J(\vec{q}^{(n+1)}) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  заданная точность, то считаем, что  $\vec{q}^{(n+1)}$  является приближенным решением обратной задачи.

При численном решении задачи могут быть использованы различные виды учета априорной информации [10, 12–15].

### 6.1 Задача Седова о точечном взрыве, как доминирующий процесс при взрыве сверхновой

В качестве априорной информации для обратной задачи взрыва сверхновой помимо знаний о наблюдаемом профиле можно использовать априорную информацию о физике процесса. Сам процесс взрыва сверхновой достаточно хорошо приближается задачей о точечном взрыве (задача Седова). Поэтому по профилю светимости (см. например классическую работу [8]) однозначно можно восстановить профиль плотности (как квадратный корень функции светимости) и, следовательно, энергию взрыва. Конечно, мы не сможем в этом случае восстановить все начальные данные звезды. В контексте задачи о взрыве сверхновой такая информация и не нужна, так как именно энергия взрыва определяет процессы образования тяжелых элементов. Обогащение межзвездной средой новыми элементами — это и есть основная задача взрыва сверхновых звезд.

## Заключение

Описан новый численный метод высокого порядка точности для решения уравнений гравитационной газовой динамики, записанных в виде решения прямой и обратной задачи, в сферической симметрии. В основе численного метода — комбинация метода крупных частиц, метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. Численный метод верифицирован на задаче о разлете газового шара в вакуум. Приведено численное решение прямой задачи коллапса Эвхарда. Сформулирован подход к решению обратной задачи взрыва сверхновой звезды.

## Список литературы

- [1] Ardeljan N., Bisnovaty-Kogan G., Moiseenko S. *An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies*, Astronomy and Astrophysics, **115** (1996), 573–594.
- [2] Evrard A. *Beyond N-body: 3D cosmological gas dynamics*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **235** (1988), 911–934.
- [3] Springel V. *E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **401** (2010), 791–851.
- [4] Popov M., Ustyugov S. *Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **47** (2007), 1970–1989.



- [5] Popov M., Ustyugov S. *Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **48** (2008), 477–499.
- [6] Collela P., Woodward P.R. *The Piecewise Parabolic Method (PPM) Gas-Dynamical simulations*, Journal of Computational Physics, **54** (1984), 174–201.
- [7] Kulikov I., Chernykh I., Snytnikov A., Glinskiy B., Tutukov A. *AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers*, Computer Physics Communications, **186** (2015), 71–80.
- [8] Colgate S., McKee C. *Early supernova luminosity*, The Astrophysical Journal, **157** (1969), 623–644.
- [9] Lukyanenko, D.V., Shishlenin, M.A., Volkov, V.T. Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data (2018) Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **54**, pp. 1339–1351.
- [10] Belonosov, A., Shishlenin, M. Regularization methods of the continuation problem for the parabolic equation (2017) Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 10187 LNCS, pp. 220–226.
- [11] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A., Nurseitov, D.B., Nurseitova, A.T., Kasenov, S.E. Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation. (2014) Journal of Applied Mathematics, 2014, article 786326.
- [12] Kabanikhin, S.I., Gasimov, Y.S., Nurseitov, D.B., Shishlenin, M.A., Sholpanbaev, B.B., Kasenov, S. Regularization of the continuation problem for elliptic equations. (2013) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21** (6), pp. 871–884.
- [13] Kabanikhin, S.I., Nurseitov, D.B., Shishlenin, M.A., Sholpanbaev, B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar. (2013) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21** (6), pp. 885–892.
- [14] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic elliptic equations from border part (2014) Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **2** (2), pp. 81–91.
- [15] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **16**(7) (2008), 705–713.

*Кабанихин Сергей Игоревич — член-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н., Директор Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: kabanikhin@sscc.ru;*

*Куликов Игорь Михайлович — д.ф.-м.н., Ученый секретарь Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: kulikov@ssd.sssc.ru;*

*Шишленин Максим Александрович — д.ф.-м.н., И.о. зам. директора по научной работе Института  
вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: mshishlenin@ngs.ru.*

*Дата поступления — 31 мая 2017 г.*