

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОНФОРМНЫХ И НЕКОНФОРМНЫХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

С. И. Марков<sup>1,2</sup>, Н. Б. Иткина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.635.4

Рассмотрены два подхода для решения несжимаемых уравнений Навье — Стокса. Первая идея основана на применении современного математического аппарата на базе разрывного метода Галёркина (DG — Discontinuous Galerkin method), который входит в семейство неконформных конечноэлементных методов. Рассматриваются вопросы применения специальных конечноэлементных пространств Тейлор-Худ и Струзеих-Равиарта на тетраэдрах, которые удовлетворяют условию Ладыженской — Бабушки — Брещи. Вторая идея основана на применении стабилизированных конформных конечноэлементных методов и использовании базисных функций первого порядка как для поля давления, так и для поля скоростей. Приводится сравнительный анализ полученных результатов математического моделирования несжимаемых течений с программным комплексом ANSYS CFX.

**Ключевые слова:** система уравнений Навье — Стокса, разрывный метод Галёркина, стабилизированный метод конечных элементов.

## Введение

Существуют две сложности при численном решении системы уравнений Навье — Стокса с помощью метода конечных элементов. Первая проблема связана с дискретизацией нелинейного конвективного члена в векторном уравнении движения для течений с высоким значением числа Рейнольдса. Вторая проблема заключается в определении единственного численного решения задачи о седловой точке, в которой переменная давления интерпретируется как множитель Лагранжа в уравнении неразрывности.

Для решения описанных проблем необходимо использовать метод, который легко адаптируется под определённый класс задач и позволяет получить физически адекватное решение при минимальных затратах вычислительных ресурсов.

Среди эффективных численных подходов для решения системы уравнений Навье — Стокса можно выделить вычислительные схемы конечных элементов на базе разрывного метода Галёркина (DG-method) и противоточные стабилизированные методы (например, Stream-line Upwind Petrov-Galerkin method или SUPG).

DG-метод входит в семейство неконформных конечноэлементных методов [1], [2], [3]. Высокая эффективность данного подхода обусловлена тем, что каждый конечный элемент снабжен собственным пространством решения, а поведение решения на межэлементной границе определяется с помощью специальных lifting-операторов [1], [2].

SUPG-метод входит в семейство конформных конечноэлементных методов [4] и использует специальное пространство тестовых функций. Особенно эффективен данный подход при решении задач с доминирующей конвекцией.

## 1 Математическая модель

Пусть область  $\Omega \subset R^3$  является объединением конечного числа подобластей  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$  с межэлементными границами  $\Gamma_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ . Вязкие несжимаемые течения в области  $\Omega \subset R^3$  описываются системой уравнений Навье — Стокса [1]

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\rho \nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}), \quad (1)$$

с дополнительным ограничением [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости [м/с],  $p$  — давление флюида [Па],  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости [Па · с],  $\rho$  — плотность вещества [кг/м<sup>3</sup>].

Система уравнений (1)–(2) дополняется начальными условиями и краевыми условиями Дирихле для вектора скорости

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_g. \quad (4)$$

## 2 Функциональные пространства

Введём функциональные пространства для аппроксимации полей давления и скоростей. Как будет показано далее, слабая формулировка задачи Навье — Стокса не содержит пространственных производных от давления, поэтому для функции давления требуется только её интегрируемость с квадратом. Кроме того, для переменной давления не существует начального условия. Это означает, что давление определяется с точностью до константы, поэтому пространство пробных и тестовых функций для поля давления можно определить в виде [1], [2], [3]

$$P = \left\{ p \mid p \in L_0^2(\Omega) : p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \right\}. \quad (5)$$

Множество  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  является замыканием множества бесконечно дифференцируемых функций  $[C^\infty(\bar{\Omega})]^3$  по отношению к норме  $\|\cdot\|_{(\text{div}, \Omega)}$ . Поэтому для векторного поля скоростей введём пространство пробных и тестовых функций в виде [4], [5], [6]

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_g \text{ on } \partial\Omega \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}. \quad (7)$$

Обозначим через  $\mathbf{w}^h$  и  $p^h$  конечноэлементные интерполянты для вектора скорости и давления, соответственно. Ассоциируем их с тестовыми функциями  $\mathbf{v}^h$  and  $q^h$ . Аналогично введём конечномерные подпространства  $\mathbf{U}^h \subset \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{V}$ ,  $P^h \subset P$ ,  $Q^h \subset P$ . Обратим внимание, что  $\mathbf{w}^h = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}_g$ . Учёт условия Дирихле для неконформных конечноэлементных методов реализуется в слабой форме. В свою очередь, для конформных методов — путём исключения соответствующих степеней свободы из матрицы конечноэлементной СЛАУ.

## 3 Условие Ладыженской — Бабушки — Брецци (ЛББ условие)

Матрица дивергентного оператора (2) имеет вырожденное ядро. Данное свойство выполняется, если конечноэлементные интерполянты для поля давления и векторного поля скоростей удовлетворяют условию Ладыженской — Бабушки — Брецци [1], [2], [3]

$$\inf_{q^h \in Q^h} \sup_{\mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{w}^h)}{\|q^h\|_{L_0^2(\Omega)} \|\mathbf{w}^h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha > 0, \quad (8)$$

где  $\alpha$  не зависит от размера конечноэлементной сетки.

Рассмотрим два конечноэлементных пространства, которые удовлетворяют ЛББ условию. Пространство Тейлор-Худ состоит из полного векторного базиса второго порядка для аппроксимации вектора скорости и базиса первого порядка для аппроксимации поля давления. Пространство Crouzeix-Raviart содержит дополнительные bubble-функции третьего порядка для аппроксимации вектора скорости. Обратим внимание, что базисные векторные функции принадлежат пространству  $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ . Алгоритм построения данных функций на симплексах можно найти в работе [7].

## 4 DG-метод для системы несжимаемых уравнений Навье — Стокса

Скалярно умножим уравнения (1) и (2) на тестовые функции из пространств  $P$ ,  $\mathbf{V}$  и применим формулы Остроградского для векторных функций. Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина имеет вид [4]: найти такие  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{U}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$  и  $q^h \in Q^h \times [0, T]$  выполняется

$$a(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + d(\mathbf{v}_t^h, \mathbf{u}^h) + c(\mathbf{u}^h; \mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + b(p^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{v}^h, \mathbf{F}^h), \quad (9)$$

$$b(q^h, \mathbf{u}^h) = 0, \quad (10)$$

где билинейные и трилинейные формы определяются как [4]

$$a(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega} \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u}^h \right) : \nabla \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega} \left( \left[ \frac{\mu}{\rho} \mathbf{u} \right] : \{ \nabla \mathbf{v} \} - [\mathbf{v}] : \left\{ \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u} \right\} \right) dS + \int_{\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega} \vartheta[\mathbf{u}] : [\mathbf{v}] dS, \quad (11)$$

$$d(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_t^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega \quad (12)$$

$$c(\mathbf{u}^h; \mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^h \cdot \nabla) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega \quad (13)$$

$$b(p^h, \mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} \nabla p^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega} [p^h] \cdot \{ \mathbf{v}^h \} dS \quad (14)$$

$$(\mathbf{v}^h, \mathbf{F}^h) = \int_{\Omega} \mathbf{F}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{v}^h) + \mathbf{u}_g \cdot \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{v}^h : \mathbf{n} \right) \right) dS \quad (15)$$

$$b(q^h, \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^h q^h d\Omega - \int_{\Gamma_{\text{int}} \cup \partial\Omega} [q^h] \cdot \{ \mathbf{u}^h \} dS \quad (16)$$

Здесь  $\Gamma_{\text{int}}$  — множество внутренних границ. Операторы среднего  $\{..\}$  и скачка  $[..]$  скалярной функции имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \{p\}_{\partial\Omega} &= p, \quad \{p\}_{\text{int}} = \frac{1}{2} (p|_K + p|_N), \\ [p]_{\partial\Omega} &= p\mathbf{n}, \quad [p]_{\text{int}} = p|_K \mathbf{n}_K + p|_N \mathbf{n}_N, \end{aligned} \quad (17)$$

для векторной функции [1]

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\}_{\partial\Omega} &= \mathbf{u}, \quad \{\mathbf{u}\}_{\text{int}} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}|_K + \mathbf{u}|_N), \\ [\mathbf{u}]_{\partial\Omega} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}, \quad [\mathbf{u}]_{\text{int}} = \mathbf{u}|_K \otimes \mathbf{n}_K + \mathbf{u}|_N \otimes \mathbf{n}_N. \end{aligned} \quad (18)$$

Параметр стабилизации  $\vartheta$  вычисляют по формуле  $\vartheta = \mu h / \|\mathbf{u}\|$ , где  $h$  — диаметр сферы, описанной вокруг конечного элемента [1].

## 5 Стабилизированный метод конечных элементов для несжимаемых уравнений Навье — Стокса

Вариационная формулировка стабилизированного метода конечных элементов имеет вид [8]: найти такие  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{U}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$  и  $q^h \in Q^h \times [0, T]$  выполняется

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + d(\mathbf{v}_t^h, \mathbf{u}^h) + c(\mathbf{u}^h; \mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + b(p^h, \mathbf{v}^h) - (\mathbf{v}^h, \mathbf{F}^h) + \\ & + \sum_{\Omega_K} \tau_1 ((\mathbf{u}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h, R(\mathbf{u}^h))_{\Omega_K} + \sum_{\Omega_K} \tau_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h)_{\Omega_K} = 0, \\ & b(q^h, \mathbf{u}^h) + \sum_{\Omega_K} \tau_3 (\nabla q^h, R(\mathbf{u}^h))_{\Omega_K} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

невязка уравнения движения определяется выражением [8]

$$R(\mathbf{u}^h) = \mathbf{u}_t^h + (\mathbf{u}^h \cdot \nabla) \mathbf{u}^h - \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{u}^h \right) + \nabla p^h - \mathbf{F}^h. \quad (20)$$

Параметр  $\tau_1$  требуется для стабилизации классической формулировки Галёркина с доминирующим конвективным членом и может быть выбран в виде [8]

$$\tau_1 = \frac{h}{2 \|\mathbf{u}\|} \left( cth(\text{Pe}) - \frac{1}{\text{Pe}} \right), \quad (21)$$

где  $h$  — характерный размер конечного элемента, например, диаметр описанной вокруг тетраэдра сферы,  $\text{Pe} = \frac{h \|\mathbf{u}\|}{\mu}$  — число Пекле.

Параметр  $\tau_2$  даёт вклад искусственной диффузии и определяется как [8]

$$\tau_2 = \frac{\|\mathbf{u}\| h}{2}. \quad (22)$$

Параметр стабилизации по давлению  $\tau_3$  характерен для задачи Стокса и имеет вид [8]

$$\tau_3 = \frac{h^2}{12\mu}. \quad (23)$$

Устойчивость вычислительной схемы (19) зависит от корректного выбора параметров стабилизации (21)–(23).

## 6 Результаты

Рассмотрим стационарное течение газа в прямой трубе (см. Рис. 1). Диаметр прямой трубы  $l = 1.4$  м, длина трубы  $L = 100$  м. В трубе течёт бутан ( $\mu = 7.44 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ ,  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ). Давление  $p_1$  задано на границе  $\Gamma_1$ , давление величины  $p_2$  задано на границе  $\Gamma_2$ . Условие  $\mathbf{u} = 0$  установлено на стенках  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ .

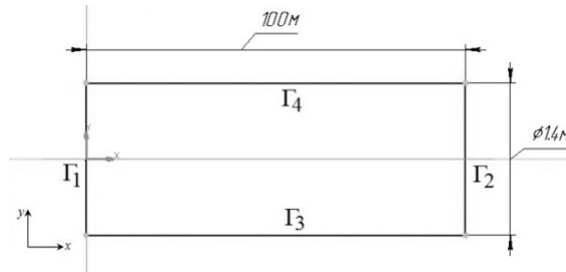


Рис. 1: Область моделирования

Данная задача имеет аналитическое решение

$$p = -\frac{|p_1 - p_2|}{L}x + p_1, \quad u_x = \rho \frac{|p_1 - p_2|}{2\mu L} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^2 - y^2 \right). \quad (24)$$

В качестве результатов приведём погрешности вычисленных полей давления и скорости с помощью программного комплекса ANSYS CFX, стабилизированного метода конечных элементов (Stab.FEM) и разрывного метода Галёркина (DG-method) с точным решением в норме пространства  $L^2(\Omega)$

$$\|\Delta\|_{L^2(\Omega)} = \|I^{EX} - I^{COM}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (I^{EX} - I^{COM})^2 d\Omega. \quad (25)$$

Триангуляция расчётной области представлена на Рис. 2. Использовано 122602 тетраэдра, средний размер ребра конечного элемента 0.1 м.

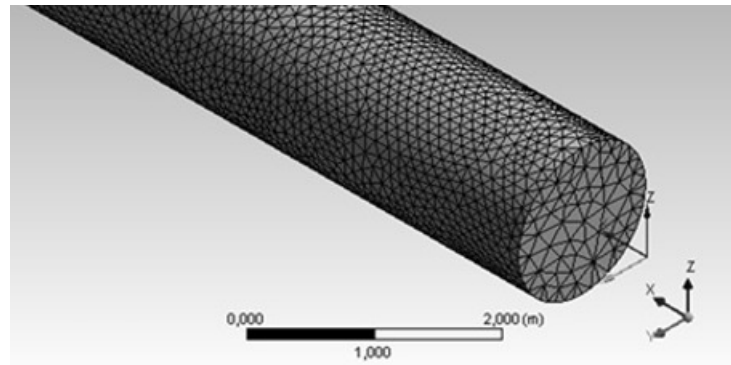


Рис. 2: Триангуляция расчётной области

Для решения конечноэлементной СЛАУ воспользуемся BCG (BiConjugate Gradient method) с SQ-факторизацией и точностью решения  $\varepsilon = 10^{-10}$ . В качестве метода линейаризации уравнений Навье—Стокса выберем метод Ньютона-Галёркина. Для решения поставленной задачи с помощью пакета ANSYS была выбрана модификация решателя с использованием ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) с ILU-преобусловливанием.

Таблица 1: Точность и время решения (пространство Taylor-Hood)

Метод	Перепад давления, кПа	$\Delta$ , давление	$\Delta$ , скорость	Время решения, мин.
ANSYS CFX	200	5.69E-6	2.37E-4	35
	400	4.15E-5	3.81E-3	48
	1200	8.98E-4	8.56E-2	225
Stab.FEM	200	1.63E-8	4.35E-10	10
	400	3.92E-8	6.71E-10	13
	1200	5.15E-8	8.62E-10	15
DG-method	200	4.23E-7	3.85E-10	40
	400	5.35E-7	5.13E-10	42
	1200	7.54E-6	8.36E-10	45

Пространство Taylor-Hood содержит 882734 степени свободы в стабилизированном методе конечных элементов и 2206836 степеней свободы в разрывном методе Галёркина.

Таблица 2: Точность и время решения (пространство Crouzeix-Raviart)

Метод	Перепад давления, кПа	$\Delta$ , давление	$\Delta$ , скорость	Время решения, мин.
ANSYS CFX	200	5.69E-6	2.37E-4	35
	400	4.15E-5	3.81E-3	48
	1200	8.98E-4	8.56E-2	225
Stab.FEM	200	9.71E-9	4.01E-11	12
	400	1.29E-8	6.29E-11	15
	1200	4.62E-8	7.83E-11	17
DG-method	200	5.54E-10	2.19E-11	48
	400	7.28E-10	4.83E-11	50
	1200	8.63E-10	5.37E-11	51

Пространство Crouzeix-Raviart содержит 937259 степеней свободы в стабилизированном методе конечных элементов и 2942448 степеней свободы в разрывном методе Галёркина.

## Заключение

В работе реализованы вычислительные схемы стабилизированного конформного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для решения несжимаемых уравнений Навье — Стокса на тетраэдральных конечноэлементных сетках. Приведён сравнительный анализ методов на задаче, имеющей аналитическое решение, с программным комплексом ANSYS CFX.

Конвективный член в уравнениях Навье — Стокса вносит несимметричность в матрицу СЛАУ, а также знаконеопределённость при больших значениях критерия Рейнольдса. Практически установлено, что для числа Пекле  $10^3$  итерационные решатели начинают стагнировать и не достигают требуемой точности. Применение схем стабилизированных конечноэлементных методов и разрывного метода Галёркина позволяет получить решение задачи с требуемой точностью, потратив на порядок меньше времени по сравнению с программным комплексом ANSYS.

Конечноэлементные пространства типа Teylor-Hood (полный векторный базис второго порядка для поля скоростей и базис первого порядка для поля давления) целесообразно применять для стабилизированных конечноэлементных методов (СМКЭ), поскольку данные подходы позволяют вычислить распределение давления с большей точностью по сравнению с разрывным методом Галёркина. Кроме того, вычислительные затраты по времени решения СЛАУ сокращаются в 3 раза при использовании схем СМКЭ.

Конечноэлементные пространства типа Crouzeix-Raviart (полный векторный базис второго порядка с дополнительными bubble-функциями третьего порядка для вектора скорости и линейный базис для поля давления) целесообразно применять для неконформных конечноэлементных методов, поскольку в данном случае и поле давления, и поле скоростей определяются с большей точностью, чем при использовании стабилизированных методов.

## Список литературы

- [1] Bassi F., Crivellini A., Pietro D. A., Rebay S. An artificial compressibility flux for the discontinuous Galerkin solution of the incompressible Navier-Stokes equations. J. Comput. Phys., 218, 2006, 794–815.
- [2] Brezzi F., Douglas J., Marini L. D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. Numerische Mathematik 47:217–235, 1985, doi:10.1007/BF01389710.
- [3] Cockburn B., Kanschat G., Schotzau D. The local discontinuous Galerkin method for the Oseen equations. Math. Comp., 73, 2003, 569–593.
- [4] Tezduyar T. E., Osawa Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 190(3-4), 2001, 411–430.

- [5] N. C. Nguyen, J. Peraire, B. Cockburn. A hybridizable discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations (AIAA Paper 2010-362). In Proceedings of the 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Orlando, Florida, January 2010.
- [6] Younes A., Makradi A., Bouhala L., Zidane A., Shao Q. A combination of Crouzeix–Raviart, discontinuous Galerkin and MPFA methods for buoyancy-driven flows. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 24, 2014, 735–759.
- [7] Webb J. P. Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. *IEEE Trans. on antennas and propagation*, 47(8), 1999, 1244–1253.
- [8] Tezduyar T. E., Osawa Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190(3-4), 2001, 411–430.

*Сергей Игоревич Марков — аспирант Новосибирского государственного технического университета,  
мл. науч. сотр. Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН;  
e-mail: [www.sim91@list.ru](mailto:www.sim91@list.ru);*

*Иткина Наталья Борисовна — к.т.н., доцент кафедры Вычислительных технологий,  
Новосибирский государственный технический университет;  
e-mail: [itkina.nat@yandex.ru](mailto:itkina.nat@yandex.ru).*

*Дата поступления — 10 мая 2017 г.*