

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. Г. Деменков<sup>1,2</sup>, Г. Г. Черных<sup>3,4</sup>, С. Н. Яковенко<sup>5</sup>

<sup>1</sup> *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск*

<sup>3</sup> *Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>4</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

<sup>5</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 532.517.4

Для описания течения в закрученных турбулентных струйных течениях привлекается система осредненных уравнений движения, неразрывности, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности в приближении тонкого сдвигового слоя. Касательные турбулентные напряжения определяются из неравновесных алгебраических соотношений Роди. Численная реализация модели основана на применении конечноразностного алгоритма на подвижных сетках, консервативного по отношению к законам сохранения. В качестве примера расчетов закрученных турбулентных струй выполнено численное моделирование закрученного струйного турбулентного спутного течения за самодвижущимся телом. Рассмотрена модификация диффузионных слагаемых уравнений переноса, основанная на усовершенствованных алгебраических аппроксимациях Илюшина моментов третьего порядка, учитывающих закрутку потока. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными ИГиЛ СО РАН. Выполнен численный анализ автомодельности вырождения дальнего турбулентного следа с нулевым избыточным импульсом и ненулевым моментом количества движения. Построена упрощенная математическая модель закрученного дальнего безимпульсного турбулентного следа.

**Ключевые слова:** закрученные струйные турбулентные течения, математическое моделирование.

## Введение

Исследование закрученных турбулентных струйных течений представляет интерес в связи с их чрезвычайной важностью при проектировании и использовании топочных агрегатов, камер сгорания, аппаратов химической технологии, изучении турбулентных следов за самодвижущимися телами и др. Закрученные турбулентные струйные течения рассматривались в целом ряде работ [1]–[11] (в них можно найти более полную библиографию). Ярким примером закрученного турбулентного струйного течения является течение в закрученном турбулентном следе за телом вращения [2], [4]–[11]. Уникальные данные о закрученных турбулентных следах с варьируемыми суммарным избыточным импульсом и моментом количества движения получены в ИГиЛ СО РАН [5], [8]. Несмотря на достаточно большое количество работ по математическому моделированию в этой области, целый ряд вопросов остался слабоизученным. Прежде всего это сопоставление с экспериментальными данными. Результаты расчетов [6], [9]–[11] на основе разработанных в этих статьях математических моделей удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, однако при этом имеются отклонения численных решений от результатов экспериментов. С целью более детального описания течения в настоящей работе получена усовершенствованная математическая модель, основанная на модификации [12], [13] диффузионных слагаемых уравнений переноса нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности.

С использованием разработанной ранее в [6] математической модели выполнено численное моделирование автомодельности вырождения дальнего турбулентного следа за телом вращения с нулевым суммарным

избыточным импульсом и ненулевым моментом количества движения. Построена упрощенная математическая модель таких дальних турбулентных следов.

## 1 Постановка задачи

Для описания течения привлекается следующая система осредненных уравнений движения в приближении тонкого сдвигового слоя:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle uv \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{[W^2 + (\langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle)]}{r} dr - \frac{\partial(\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle vw \rangle - \frac{\langle vw \rangle}{r} - \frac{\partial \langle uw \rangle}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $x, r, \varphi$  — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела; ось  $x$  направлена противоположно направлению движения тела;  $U, V, W, u, v, w$  — соответствующие компоненты скорости осредненного и пульсационного движения;  $\langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle, \langle w^2 \rangle, \langle uv \rangle, \langle uw \rangle, \langle vw \rangle$  — рейнольдсовы напряжения. Угловые скобки означают осреднение. В правых частях уравнений 1, 2 слагаемые с молекулярной вязкостью и диффузией отброшены в предположении малости. Поскольку рассматривается струйное турбулентное течение с вращательной симметрией, искомые функции от координаты  $\varphi$  не зависят. Система уравнений 1–3 незамкнута. Дополним ее дифференциальными уравнениями переноса рейнольдсовых напряжений. С учетом сделанных предположений уравнения записываются следующим образом:

$$U \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial r} = D_{uu}^t + D_{uu}^p + P_{uu} + \Pi_{uu} - \varepsilon_{uu}, \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - 2 \langle vw \rangle \frac{W}{r} = D_{vv}^t + D_{vv}^p + P_{vv} + \Pi_{vv} - \varepsilon_{vv}, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial r} + 2 \langle vw \rangle \frac{W}{r} = D_{ww}^t + D_{ww}^p + P_{ww} + \Pi_{ww} - \varepsilon_{ww}, \quad (6)$$

$$U \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial r} - \langle uw \rangle \frac{W}{r} = D_{uv}^t + D_{uv}^p + P_{uv} + \Pi_{uv} - \varepsilon_{uv}, \quad (7)$$

$$U \frac{\partial \langle uw \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle uw \rangle}{\partial r} + \langle uv \rangle \frac{W}{r} = D_{uw}^t + D_{uw}^p + P_{uw} + \Pi_{uw} - \varepsilon_{uw}, \quad (8)$$

$$U \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial r} - (\langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle) \frac{W}{r} = D_{vw}^t + D_{vw}^p + P_{vw} + \Pi_{vw} - \varepsilon_{vw}. \quad (9)$$

Величины  $P_{uu}, P_{vv}, P_{ww}, P_{uv}, P_{uw}, P_{vw}$  — порождения за счет градиентов скорости осредненного движения:

$$P_{uu} = -2 \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, P_{vv} = 2 \langle vw \rangle \frac{W}{r}, P_{ww} = -2 \langle vw \rangle \frac{\partial W}{\partial r},$$

$$P_{uv} = -\langle v^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle uw \rangle \frac{W}{r}, P_{uw} = -\langle uv \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, P_{vw} = -\langle v^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle w^2 \rangle \frac{W}{r}.$$

Величины  $D_{uu}^t, D_{vv}^t, D_{ww}^t, D_{uv}^t, D_{uw}^t, D_{vw}^t$  описывают турбулентную диффузию:

$$D_{uu}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle u^2 v \rangle)], D_{vv}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle v^3 \rangle)] + 2 \frac{\langle vw^2 \rangle}{r},$$

$$D_{ww}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle vw^2 \rangle)] + 2 \frac{\langle vw^2 \rangle}{r},$$

$$D_{uv}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle uv^2 \rangle)] - \frac{\langle uw^2 \rangle}{r}, D_{uw}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle uvw \rangle)] + \frac{\langle uvw \rangle}{r},$$

$$D_{vw}^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (-\langle v^2 w \rangle)] - \frac{\langle w^3 \rangle}{r} + \frac{\langle v^2 w \rangle}{r}.$$

Величины  $D_{uu}^p$ ,  $D_{vv}^p$ ,  $D_{ww}^p$ ,  $D_{uv}^p$ ,  $D_{uw}^p$ ,  $D_{vw}^p$  — "диффузия давления":

$$D_{uu}^p = 0, \quad D_{vv}^p = -\frac{2}{\rho} \frac{\partial \langle p'v \rangle}{\partial r}, \quad D_{ww}^p = -\frac{2}{\rho} \frac{\langle p'w \rangle}{r},$$

$$D_{uv}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p'u \rangle}{\partial r}, \quad D_{uw}^p = 0, \quad D_{vw}^p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \langle p'w \rangle}{\partial r} - \frac{\langle p'w \rangle}{r} \right).$$

Величины  $\Pi_{uu}$ ,  $\Pi_{vv}$ ,  $\Pi_{ww}$ ,  $\Pi_{uv}$ ,  $\Pi_{uw}$ ,  $\Pi_{vw}$  — корреляции с пульсациями давления:

$$\Pi_{uu} = \frac{2}{\rho} \langle p' \frac{\partial u}{\partial x} \rangle, \quad \Pi_{vv} = \frac{2}{\rho} \langle p' \frac{\partial v}{\partial r} \rangle, \quad \Pi_{ww} = \frac{2}{\rho r} \langle p' \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right) \rangle,$$

$$\Pi_{uv} = \frac{1}{\rho} \langle p' \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \rangle, \quad \Pi_{uw} = \frac{1}{\rho} \langle p' \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \rangle, \quad \Pi_{vw} = \frac{1}{\rho} \langle p' \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \rangle.$$

Наконец,  $\varepsilon_{uu}$ ,  $\varepsilon_{vv}$ ,  $\varepsilon_{ww}$ ,  $\varepsilon_{uv}$ ,  $\varepsilon_{uw}$ ,  $\varepsilon_{vw}$  — соответствующие компоненты тензора диссипации.

Дополнительно к (4–9) привлекается уравнение для диссипации кинетической энергии турбулентности:

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = D_\varepsilon^t + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon,$$

где

$$D_\varepsilon^t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \langle v \varepsilon' \rangle}{\partial r} \right],$$

а  $P_\varepsilon, \varepsilon_\varepsilon$  — слагаемые, отвечающие, соответственно, за порождение и деструкцию диссипации;  $\rho = \text{const}$  — плотность жидкости.

Ниже рассмотрены две замкнутые математические модели. Модель 1 включает в себя дополнительно к 1–3 уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений:

$$U \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial r} = -2(1 - \alpha) \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle u^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial r} \right), \quad (10)$$

$$U \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle vw \rangle = 2(1 - \alpha) \langle vw \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle v^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) +$$

$$\frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle vw \rangle^2}{r} \right) \right] - \frac{2C_s e}{r \varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial r} + \langle w^2 \rangle \frac{(\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle)}{r} \right] + \frac{2}{3} \alpha P, \quad (11)$$

$$U \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle vw \rangle = -2(1 - \alpha) \langle vw \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle w^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) +$$

$$\frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2 \langle vw \rangle^2}{r} \right) \right] + \frac{2C_s e}{r \varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial r} + \langle w^2 \rangle \frac{(\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle)}{r} \right] + \frac{2}{3} \alpha P, \quad (12)$$

В Модели 1 касательные турбулентные напряжения определяются из неравновесных соотношений Роды

$$\langle uv \rangle = \alpha_1 \langle v^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \quad (13)$$

$$\langle uw \rangle = \alpha_1 \left( \langle uv \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (14)$$

$$\langle vw \rangle = \alpha_1 \left( \langle v^2 \rangle r \frac{\partial}{\partial r} (W/r) + \frac{W}{r} (\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle) \right) \quad (15)$$

где  $\alpha_1 = -\lambda_1 \frac{e}{\varepsilon}$ ,  $\lambda_1 = \frac{1 - C_2}{C_1 + P/\varepsilon - 1}$ .

Скорость диссипации  $\varepsilon$  находится путем решения соответствующего дифференциального уравнения переноса

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (16)$$

Величина  $P$  в уравнениях 10–12, 16 — порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения:

$$P = - \left( \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle vw \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} + \langle v^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + \langle w^2 \rangle \frac{V}{r} \right). \quad (17)$$

Эмпирические постоянные  $C_s$ ,  $C_\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$  в уравнениях и соотношениях (10)–(16) равны, соответственно, 0.22, 0.17, 0.93, 0.6, 2.2, 1.45, 1.92. В основу представленной выше математической модели положена модель [1]. Отличие от математической модели [1] состоит в алгебраических представлениях [12], [13].

В Модели 2 используются следующие представления одноточечных тройных корреляций поля скорости [12], [13] ( $D_{u_i u_j} \equiv D_{u_i u_j}^t + D_{u_i u_j}^p$ ):

$$\begin{aligned} D_{uu} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle u^2 v \rangle); \quad D_{vv} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle v^3 \rangle) + 2 \frac{\langle vw^2 \rangle}{r}; \quad D_{ww} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle vw^2 \rangle) - 2 \frac{\langle vw^2 \rangle}{r}; \\ D_{uv} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle uv^2 \rangle) + \frac{\langle uw^2 \rangle}{r}; \quad D_{uw} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle uvw \rangle) - \frac{\langle uvw \rangle}{r}; \quad D_{vw} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \langle v^2 w \rangle) - \frac{\langle v^2 w \rangle}{r} + \frac{\langle w^3 \rangle}{r}; \\ D_k &= \frac{1}{2} (D_{uu} + D_{vv} + D_{ww}); \quad \langle v^3 \rangle = \frac{\langle v^3 \rangle^0 + 6 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle v^2 w \rangle^0}{1 + 6 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \quad \langle u^2 v \rangle = \frac{\langle u^2 v \rangle^0 + 2 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle u^2 w \rangle^0}{1 + 2 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \\ \langle v^2 w \rangle &= \frac{\langle v^2 w \rangle^0 + 4 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle vw^2 \rangle^0}{1 + 8 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \quad \langle uv^2 \rangle = \frac{\langle uv^2 \rangle^0 + 4 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle uvw \rangle^0}{1 + 4 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \quad \langle vw^2 \rangle = \frac{\langle vw^2 \rangle^0 + 2 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle w^3 \rangle^0}{1 + 6 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \\ \langle uvw \rangle &= \frac{\langle uvw \rangle^0 + 2 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle uw^2 \rangle^0}{1 + 4 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}; \quad \langle w^3 \rangle = \langle w^3 \rangle^0 - 3 \frac{\tau}{C_3} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right) \cdot \langle vw^2 \rangle^0; \\ \langle uw^2 \rangle &= \langle uw^2 \rangle^0 - 2 \frac{\tau}{C_3} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right) \cdot \langle uvw \rangle^0; \quad \langle k'v \rangle = \frac{\langle k'v \rangle^0 + 2 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle k'w \rangle^0 - \frac{\tau}{C_3} \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \cdot \langle v^2 w \rangle^0}{1 + 2 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)}. \end{aligned}$$

Верхний индекс “0” означает классические, стандартные аппроксимации;

$$\begin{aligned} -\langle u^2 v \rangle &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial r} \right]; \quad -\langle vw^2 \rangle_B = C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial r} - \langle w^2 \rangle \frac{\langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle}{r} \right]; \\ -\langle v^3 \rangle &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - 2 \langle vw \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]; \quad -\langle vw^2 \rangle_A = C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial r} + 2 \langle vw \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]; \\ -\langle uv^2 \rangle &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial r} - \langle uw \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]; \quad -\langle uw^2 \rangle = C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle uw \rangle}{\partial r} + \langle w^2 \rangle \frac{\langle uv \rangle}{r} \right]; \\ -\langle uvw \rangle_A &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle uw \rangle}{\partial r} + \langle uv \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]; \quad -\langle uvw \rangle = C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial r} - \langle w^2 \rangle \frac{\langle uw \rangle}{r} \right]; \\ -\langle v^2 w \rangle_A &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle vw \rangle}{\partial r} - \langle vw \rangle \frac{\langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle}{r} \right]; \quad -\langle v^2 w \rangle_B = C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - 2 \langle w^2 \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]; \\ -\langle w^3 \rangle &= C_s \frac{e}{\varepsilon} \left[ \langle vw \rangle \frac{\partial \langle w^2 \rangle}{\partial r} + 2 \langle w^2 \rangle \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]. \end{aligned}$$

$C_3$  — эмпирическая постоянная (из условий согласования с экспериментальными данными  $1/C_3 = 0.19$ );  $\tau = e/\varepsilon$  ( $e = k$  — энергия турбулентности,  $\varepsilon$  — скорость диссипации).

Рассмотрено также модифицированное уравнение переноса скорости диссипации  $\varepsilon$ , в котором использовалась учитывающая закрутку потока аппроксимация диффузионного слагаемого:

$$\langle \tilde{\varepsilon}' v \rangle = \frac{\langle \tilde{\varepsilon}' v \rangle^0 + 2 \frac{\tau}{C_3} \frac{W}{r} \cdot \langle \tilde{\varepsilon}' w \rangle^0}{1 + 2 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)} \cong \frac{\langle \tilde{\varepsilon}' v \rangle^0}{1 + 2 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)} = \frac{-C_\varepsilon \tau \langle v^2 \rangle}{1 + 2 \left[ \frac{\tau}{C_3} \right]^2 \frac{W}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \right)} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} \quad (18)$$

В настоящей работе рассмотрена модификация Модели 1 с упрощенным представлением диффузионных слагаемых (по аналогии с [14]). Ниже под расчетами по Модели 2 будут пониматься расчеты именно по этой модели. Переменная  $x$  в рассматриваемых математических моделях играет роль времени. Математические модели дополняются начальными условиями, согласованными с экспериментальными данными [5], [8]. В качестве граничных условий ставятся условия невозмущенного потока на большом удалении от оси следа; при  $r = 0$  ставятся условия симметрии (антисимметрии). Подробное изложение постановки задачи в рамках Модели 1 можно найти в [6]. Следствием дифференциальных уравнений 1–3, начальных и граничных условий являются законы сохранения суммарного избыточного импульса и момента количества движения ( $U_1 = U - U_0$ ):

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty [U U_1 - \int_r^\infty \frac{W^2 + \langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle}{r'} dr' + \langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle] r dr = J(x_0), \quad (19)$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty (U W + \langle u w \rangle) r^2 dr = M(x_0). \quad (20)$$

Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на применении подвижных сеток и аппроксимаций, консервативных по отношению к (19)–(20) [6], [10].

## 2 Результаты численных экспериментов

Первая серия численных экспериментов направлена на сопоставление с экспериментальными данными ИГиЛ СО РАН [5], [8] о вырождении закрученных турбулентных следов с варьируемыми суммарными избыточным импульсом и моментом количества движения. Представленные на Рис.1 результаты расчетов относятся к турбулентному следу за самодвижущимся телом [8] с нулевыми законами сохранения (19), (20). Начальные данные ставились при  $x_0 = 10D$  согласованными с экспериментальными данными [8]. На Рис. 1 приведены измеренные и рассчитанные интенсивности турбулентных флуктуаций компонент скорости  $\sigma_u = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ ,  $\sigma_w = \sqrt{\langle w^2 \rangle}$  для ряда расстояний от тела ( $x = 20D, 30D, 46D$ ). Результаты расчетов по Модели 1 обозначены на Рис. 1 сплошной и пунктирными линиями, расчеты по Модели 2 представлены сплошными линиями 1–3. Можно видеть удовлетворительное согласие измеренных и рассчитанных величин. Аналогичные результаты получены и для других измеренных в экспериментах [8] величин, а также в вариантах 1, 3 измерений [5]. Результаты расчетов по Моделям 1, 2 близки, что, по-видимому, объясняется слабостью закрутки течения.

С применением Модели 1 выполнено численное моделирование автомодельного вырождения безимпульсного закрученного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения (вариант 3 работы [5]). На относительно небольших удалениях от тела (на которых выполнены уникальные экспериментальные исследования) результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. На достаточно больших удалениях от тела ( $x/D > 1000$ ) течение выходит на автомодельный режим, характеризующийся степенным убыванием (возрастанием) характерных масштабов  $l \sim x^{0.245}$ ,  $U_{1m} \sim x^{-2}$ ,  $W_m \sim x^{-0.735}$ ,  $\sqrt{\epsilon_0} \sim x^{-0.725}$ . Здесь  $l$  — характерный масштаб ширины следа:  $e(l, x) = 0.5e(0, x) = 0.5e_0(x)$ ,  $U_{1m} = U_1(0, x)$ ;  $|W_m|$  — максимальное значение абсолютной величины трансверсальной компоненты скорости. По аналогии с [11] на основе анализа результатов расчетов получена упрощенная математическая модель дальнего закрученного безимпульсного турбулентного следа с ненулевым суммарным моментом количества движения:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_u \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{W^2}{r'} dr'; \quad U_0 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 K_w \frac{\partial}{\partial r} (W/r)];$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_e \frac{\partial e}{\partial r} + P_w - \varepsilon; \quad U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P_w}{e} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e};$$

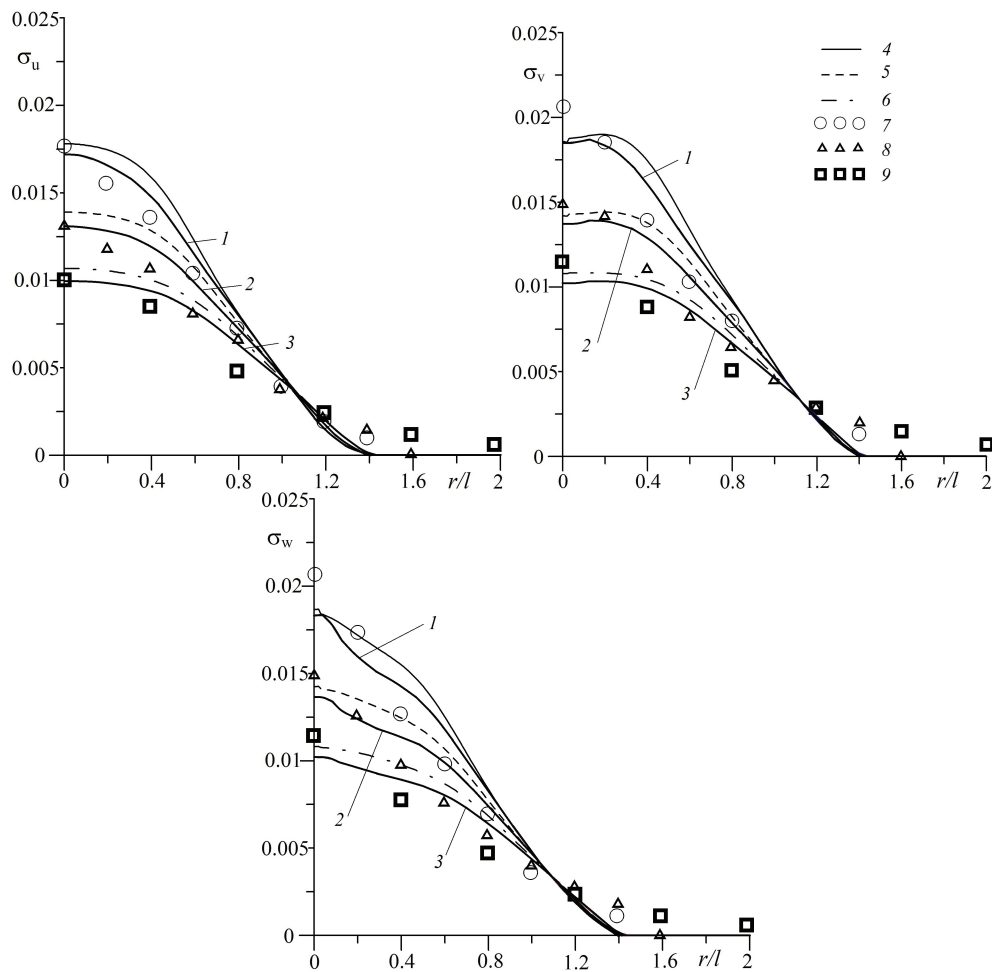


Рис. 1: Измеренные и рассчитанные интенсивности турбулентных флуктуаций компонент скорости. Кривые 1, 2, 3 — результаты расчетов по Модели 2; кривые 4, 5, 6 — результаты расчетов по Модели 1; знаки 7, 8, 9 — экспериментальные данные [8].

$$K_u = K_w = \frac{2}{3} \frac{1 - C_2}{C_1 + \frac{P_w}{\varepsilon} - 1} \frac{e^2}{\varepsilon}; \quad K_e = 0.147 \frac{e^2}{\varepsilon}; \quad K_\varepsilon = 0.113 \frac{e^2}{\varepsilon}; \quad P_w = K_u r^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{W}{r} \right) \right]^2.$$

Модель представляет собой приближение дальнего следа и учитывает безимпульсность течения.

## Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена усовершенствованная численная модель закрученных турбулентных следов за телами вращения с варьируемыми значениями суммарного избыточного импульса и момента количества движения. Получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. Исследовано автомодельное вырождение безимпульсного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения. Построены упрощенные модели течения в дальнем следе. Дальнейшее уточнение математических моделей закрученных турбулентных струйных течений представляет задачу ближайших исследований.

## Список литературы

- [1] Лаундер Б.Е., Морс А. Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // В кн. "Турбулентные сдвиговые течения I". Пер. с англ./Под ред.

- А.С.Гиневского.- М.:Машиностроение, 1982. — С.291–310.
- [2] Шетц Дж. Турбулентные течения. Процессы вдува и перемешивания.- М.: Мир, 1984. — 247 с.
- [3] Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй. Изд. 2-е, перераб. и доп. /Под ред. Г.Н. Абрамовича. — М.: Наука, 1984. — 716 с.
- [4] Гумилевский А.Г. Нарушение автомодельности в турбулентных осесимметричных следах с закруткой // Известия РАН. Сер. МЖГ. — 1993. — № 1. — С. 41–47.
- [5] Костомаха В.А., Леснова Н.В. Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // Журнал ПМТФ. — 1995. — Т.36. — № 2. — С. 88–98.
- [6] Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kostomakha V.A. Numerical model of a swirling momentumless turbulent wake // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998, Vol. 13, No 4, P. 279–288.
- [7] Piquet J. Turbulent flows: Models and Physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999. 761 p.
- [8] Гаврилов Н.В., Деменков А.Г., Костомаха В.А., Черных Г.Г. Экспериментальное и численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом // Прикладная механика и техническая физика—2000. —Т. 41. — № 4. — С. 49–58.
- [9] Васильев О.Ф., Деменков А.Г., Костомаха В.А., Черных Г.Г. Численное моделирование закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Доклады Академии наук. 2001. Т. 376. № 2. С. 195–199.
- [10] Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kostomakha V.A. Swirling turbulent wake behind a self-propelled body // International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2005, Vol. 19, No 5. P. 399–408.
- [11] Деменков А.Г., Черных Г.Г. Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Теплофизика и аэромеханика, 2016, Т.23, № 5, С. 693–702.
- [12] Pyushin B.B. Higher moment diffusion in stably stratified and swirled flows. In: Closure Strategies for Turbulent and Transition Flows. Cambridge; Eds. Launder B.E., Sandham N.D.; Cambridge Univ. Press, 2001, P. 424–448.
- [13] Pyushin B.B., Yakovenko S.N. Testing of models for fourth-order cumulant, third- and second-moment models in stationary and rotating pipe flows // Russian Journal of Engineering Thermophysics, 2002, Vol. 11, No 1. P. 45–71.
- [14] Воропаева О.Ф., Илюшин Б.Б., Черных Г.Г. Численное моделирование дальнего безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде с применением модифицированного уравнения переноса скорости диссипации // Теплофизика и аэромеханика, 2003, Т.10, № 3, С. 389–400.

Андрей Геннадьевич Деменков — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН; Новосибирский государственный технический университет  
e-mail: demenkov@itp.nsc.ru;

Геннадий Георгиевич Черных — д.ф.-м.н., гл. науч.сотр. Института вычислительных технологий СО РАН  
e-mail: chernykh@ict.nsc.ru;

Сергей Николаевич Яковенко — д.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН  
e-mail: yakovenko1965@mail.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.