

# ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА — ЛЕВИТАНА

С. И. Кабанихин<sup>1,2,3</sup>, Н. С. Новиков<sup>1,2</sup>, М. А. Шишленин<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

<sup>3</sup> *Институт математики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 517.968

В работе рассматривается двумерная обратная задача определения коэффициента волнового уравнения. В работе предложена модификация метода Гельфанда — Левитана, позволяющая свести задачу к решению однопараметрического семейства линейных интегральных уравнений. Численное решение интегральных уравнений проведено с помощью дискретизации, сведения задачи к СЛАУ и использовании стохастического проекционного метода.

**Ключевые слова:** обратные задачи, интегральные уравнения, численные методы.

## Введение

Данная работа посвящена исследованию одного численного метода решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений. Задачи такого рода возникают в том числе при поиске новых месторождений полезных ископаемых и при изучении повышения эффективности эксплуатации месторождений и заключаются в определении свойств среды (например, местоположение и форма неоднородностей) на основе измерения на поверхности (или в скважине) отражённых неоднородностями среды волн. В этом случае решение обратных задач является важной частью первичной обработки данных сейсмических наблюдений и позволяет получить информацию о строении среды.

В настоящее время существуют различные методы решения таких задач, подробный обзор которых можно найти, например, в работе [3]. Одним из наиболее популярных на сегодняшний день является метод полного обращения волновых полей [1, 2] (full waveform inversion), основанный на минимизации разности между моделируемым откликом среды и данными измерений. В связи с этим важной проблемой исследования упругих сред является большой размер области, в которой необходимо производить высокоточные вычисления. Даже для сравнительно небольшого участка 2 км х 2 км х 2 км решение прямой задачи сейсморазведки является очень сложной проблемой, а поскольку большинство современных методов решения обратных задач основаны на итерационных процедурах, то даже количество операций, требуемых для проведения нескольких итераций, может привести к неконтролируемому ошибкам. Это обстоятельство осложняется сильной некорректностью обратных задач, которое заключается в неединственности решения, а также в неустойчивости, которая сильно возрастает с глубиной.

Данная работа посвящена методу И.М. Гельфанда — Б.М. Левитана — М.Г. Крейна. Одной из основных его особенностей является тот факт, что метод не требует многократного прямого моделирования. С различными результатами, связанными с методом, а также с кратким обзором других алгоритмов, относящихся к классу прямых методов, можно ознакомиться в работах [5, 9, 10, 11, 12, 13]. Стоит упомянуть, что в последнее время в геофизике появляются работы, опирающиеся на решение уравнения Марченко [14], но на данный момент в них рассматриваются лишь одномерные постановки.

# 1 Двумерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана

Рассмотрим следующее семейство задач:

$$L_q u^{(k)}(x, y, t) \equiv u_{tt}^{(k)} - \Delta_{x,y} u^{(k)} + q(x, y) u^{(k)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (1)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x) e^{iky}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (2)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Будем рассматривать обратную задачу определения функции  $q(x, y)$ , удовлетворяющей системе соотношений (1)–(3), по известным данным обратной задачи — функциям  $f^{(k)}(y, t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Для решения этой задачи мы используем двумерный аналог метода Гельфанда — Левитана, что позволяет свести обратную задачу (1)–(3) к параметрическому семейству линейных интегральных уравнений. Задача может быть сведена к решению следующего семейства линейных интегральных уравнений [12, 13]:

$$\tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)'}(t-s) ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)'}(y, t-x) + f^{(k)'}(y, t+x)], \quad (4)$$

$$x \in (0, T), t \in (-x, x), y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}$$

Здесь  $f_m^{(k)'}(t)$  — коэффициенты разложения функций  $f^{(k)'}(y, t)$  в ряд Фурье. Кроме того, функции  $f^{(k)'}(y, t)$  (а, следовательно, и  $f_m^{(k)'}(t)$ ) являются четными функциями переменной  $t$ . При этом решение обратной задачи может быть получено следующим образом:

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x-0), \quad x \in [0, T]$$

$$q(-x, y) = q(x, y), \quad x \in [0, T]$$

Для решения двумерного уравнения Гельфанда — Левитана рассмотрим проекцию всех входящих функций на конечномерное подпространство, соответствующее конечным суммам Фурье по переменной  $y$ :

$$w^{(k)}(x, y, t) = \sum_{m=-N}^N w_m^{(k)}(x, t) e^{imy}$$

Параметр  $N$  играет роль параметра регуляризации. Переходя к коэффициентам Фурье в уравнении Гельфанда — Левитана, получим:

$$\widetilde{W}(x, t) + \int_{-x}^x \widetilde{W}(x, s) F'(t-s) ds = -\frac{1}{2} [F'(t-x) + F'(t+x)], \quad x > 0, t \in (-x, x).$$

Здесь  $W_{km} = W_m^{(k)}(x, t)$ ,  $F_{km}(t) = f_m^{(k)}(t)$  — матрицы размера  $2N+1$ .

Важным вопросом является вопрос выбора параметра регуляризации  $N$ . С одной стороны, с ростом параметра  $N$  увеличивается количество восстанавливаемых гармоник функции  $w(x, y, t)$ , а тем самым, увеличивается точность восстановления искомой функции  $q(x)$ . Необходимость максимального использования имеющейся информации о решении особенно актуальна в силу того, что геофизические данные, как правило, не отличаются большим набором изучаемых частот. С другой стороны, восстановление высокочастотных гармоник, необходимое при увеличении параметра  $N$ , приводит к трудностям, связанным с устойчивостью методов к ошибкам, содержащимся в высокочастотных данных. В данной работе предпринята попытка частично сгладить это противоречие за счёт аналитического подхода.

Рассмотрим функцию  $\hat{u}^{(k)}(x, y, t)$ , связанную с решением прямой задачи  $u^{(k)}(x, y, t)$  соотношением

$$\hat{u}^{(k)}(x, y, t) = e^{iky} u^{(k)}(x, y, t) \quad (5)$$

Функция  $\hat{u}^{(k)}$  удовлетворяет тогда следующему набору соотношений:

$$\hat{u}_{tt}^{(k)} = \hat{L}_q \hat{u}^{(k)}(x, y, t) \equiv \hat{u}_{xx}^{(k)} + \hat{u}_{yy}^{(k)} - q(x, y) \hat{u}^{(k)} - k^2 \hat{u}^{(k)} + 2ik \hat{u}_y^{(k)},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\hat{u}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \hat{u}_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\hat{u}^{(k)}|_{x=0} = g^{(k)}(y, t), \quad \hat{u}_x^{(k)}|_{x=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $g^{(k)}(y, t) = e^{iky} f^{(k)}(y, t)$ . По аналогии с работой [12], можно показать, что функция  $\hat{u}^{(k)}$ , в частности, представляется в следующем виде:

$$\hat{u}^{(k)} = \frac{1}{2} \theta(t - x) + \tilde{u}^{(k)}(x, y, t), \quad (6)$$

где  $\tilde{u}^{(k)}(x, y, t)$  — гладкая функция. Кроме того,

$$\hat{u}^{(k)}(x, y, t) = 0, \quad t \in (-x, x)$$

Далее, рассмотрим функцию

$$v^{(k)}(x, y, t) = e^{iky} w^{(k)}(x, y, t) \quad (7)$$

Получим следующие соотношения для  $v^{(k)}(x, y, t)$ :

$$\begin{aligned} v_{tt}^{(k)} &= \hat{L}_q v^{(k)}(x, y, t) x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ v^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t), \quad v_t^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

Выделим сингулярную часть функции  $v^{(k)}(x, y, t)$ :

$$v^{(k)} = \frac{1}{2} [\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \tilde{v}^{(k)}(x, y, t), \quad (8)$$

Для регулярной части  $\tilde{v}^{(k)}(x, y, t)$  верно следующее:

$$\tilde{v}^{(k)}(x, y, x - 0) = \frac{1}{4} \left[ xk^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right] \quad (9)$$

Функции  $\hat{u}^{(k)}$  и  $v^{(k)}(x, y, t)$  связаны соотношением:

$$\hat{u}^{(k)} = \int \sum_m v^{(m)}(x, y, s) e^{imy} g_{m+k}^{(k)}(t - s) ds \quad (10)$$

Здесь предполагается, что функции  $g^{(k)}(y, t)$  продолжены нечетным образом в область  $t < 0$ . Далее, переходя в этом соотношении к функции  $\tilde{v}^{(k)}(x, y, t)$ , можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \sum_m \tilde{v}^{(m)}(x, y, s) e^{imy} g_{m+k}^{(k)}(t - s) ds &= -\frac{1}{2} e^{-iky} \left[ g^{(k)}(y, t - x) + g^{(k)}(y, t + x) \right], \\ t &\in (-x, x), \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение и учитывая разрыв функций  $g^{(k)}(y, t)$  при  $t = 0$ , связанный с нечётным продолжением данных, получим интегральное уравнение второго рода:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m \tilde{v}^{(m)}(x, y, s) e^{i(m-k)y} g_{m+k}^{(k)'}(t - s) ds &= -\frac{1}{2} \left[ g^{(k)'}(y, t - x) + g^{(k)'}(y, t + x) \right], \\ x &\in (0, T), \quad t \in (-x, x), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (11)$$

Решение обратной задачи связано с решением уравнения (11) следующим образом:

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{v}^k(x, y, x - 0) - k^2. \quad (12)$$

## 2 Численный метод решения

С различными аспектами численного решения уравнений типа Гельфанда — Левитана в двумерном случае можно ознакомиться в работах [4, 7, 6, 15]. В данной работе мы получим численное решение двумерного аналога уравнения Гельфанда — Левитана с помощью дискретизации, сведения интегрального уравнения к СЛАУ и использования стохастического проекционного метода (рандомизированный метод Качмажа). Рассмотрим задачу нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (13)$$

где  $A$  — прямоугольная  $m \times n$  матрица полного ранга,  $m \geq n$ , и  $b \in \mathbb{R}^m$ . Обозначим  $a_i$  —  $i$ -ю строку матрицы, а  $a_i^T$  — транспонированный к  $a_i$  вектор-столбец.

Классическая схема метода Качмажа задаётся следующим образом [16]:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_i - (a_i \cdot x_k)}{\|a_i\|_2^2} a_i^T, \quad (14)$$

Здесь под  $(a_i \cdot x_k)$  понимается стандартное скалярное произведение, а под  $\|a_i\|_2$  — Евклидова норма. При этом строки  $a_i$  матрицы  $A$  перебираются циклически:  $i = k \bmod m + 1$ . Следует отметить, что в ряде работ происходит деление на микро- и макро-итерации, где одна макро-итерация заключается в последовательном применении (14) для всех строк исходной системы  $i = 1, \dots, m$  [16].

Следует отметить, что алгоритм Качмажа имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Используя обозначения для строк матрицы, система (13) может быть переписана следующим образом:

$$(Ax)_i = (x, a_i^T) = a_i \cdot x = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Каждое из уравнений (15) задаёт в  $\mathbb{R}^N$  гиперплоскость. В случае невырожденности системы (13) все эти гиперплоскости имеют единственную общую точку пересечения, соответствующую решению  $x$ . Учитывая это, итерационный процесс (14) заключается в проектировании текущего приближения  $x_k$  на гиперплоскость, соответствующую  $i$ -му уравнению системы. Таким образом, начиная с некоторого начального приближения  $x_0$ , мы получим последовательность точек, которая сходится к точке пересечения гиперплоскостей — решению системы (13) в силу простых геометрических соображений.

Обозначим теперь  $\|A\|_2$  — спектральную норму матрицы  $A$ , а  $\|A\|_F$  — норму Фробениуса. Обозначим также  $A^{-1}$  — левую обратную к  $A$  матрицу (в предположении, что она существует). Тогда число обусловленности матрицы  $A$  задаётся следующим образом:

$$k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Определим также другую версию числа обусловленности, задаваемую Фробениусовой нормой матрицы  $A$ :

$$\kappa(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_2.$$

Имеет место соотношение:

$$1 \leq \frac{\kappa(A)}{\sqrt{n}} \leq k(A). \quad (16)$$

Стохастический проекционный метод основан на рандомизации итерационного процесса (14) путём выбора следующей строки не в циклическом порядке, а случайным образом. Общая схема метода выглядит следующим образом [17]:

$$x_{k+1} = x_k + \omega_k E \frac{b_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)} \cdot x_k)}{\|a_{\nu(i)}\|_2^2} a_{\nu(i)}^T, \quad (17)$$

Здесь  $\nu(i) \in (1, 2, \dots, m)$  — случайный номер строки,  $\omega_k$  — некоторые параметры,  $E$  — усреднение по некоторому числу индексов  $\nu(i)$ . В простейшем случае схема (17) преобразуется к следующему виду:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)} \cdot x_k)}{\|a_{\nu(i)}\|_2^2} a_{\nu(i)}^T. \quad (18)$$

Базовый подход к выбору случайного индекса  $\nu(i)$  заключается в выборе номера строки с помощью равномерного распределения на множестве  $(1, \dots, m)$ . В работах Т. Strohmer'а и Р. Вершинина [18] предложен

другой подход, основанный на выборе той или иной строки с вероятностью, пропорциональной её норме  $\|a_{\nu(i)}\|_2^2$ . Ими доказана следующая теорема:

**Теорема 2.5** [18]. Пусть  $x$  — решение системы (13). Выберем некоторое произвольное начальное приближение  $x_0$  и рассмотрим итерационный процесс (18), где  $\nu$  — случайный индекс, выбранный из множества  $(1, \dots, m)$  следующим образом:

$$\nu = i \text{ с вероятностью } p_i = \frac{\|a_i\|_2^2}{\sum_{j=1}^m \|a_j\|_2^2}.$$

Тогда последовательность  $x_k$ , задаваемая алгоритмом (18), сходится к решению системы (13), и средняя ошибка может быть оценена следующим образом:

$$E\|x_k - x\|_2^2 \leq (1 - \kappa(A)^{-2})^k \cdot \|x_0 - x\|_2^2. \quad (19)$$

Теорема 2.5 даёт возможность оценить вычислительную сложность алгоритма. Зададим необходимую точность  $\varepsilon$  и рассмотрим вопрос нахождения решения  $x_k$ , такого, что

$$E\|x_k - x\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \|x_0 - x\|_2^2.$$

В силу оценки (19) среднее число итераций, необходимое для достижения точности  $\varepsilon$ , может быть оценено следующим образом:

$$Ek_\varepsilon \leq \frac{2 \log \varepsilon}{\log (1 - \kappa(A)^{-2})} \approx 2\kappa(A)^2 \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее, учитывая, что нормы строк  $\|a_i\|_2^2$  могут быть вычислены до начала итерационного процесса, каждая итерация требует вычисления скалярного произведения, а также умножения вектора на константу и сложения двух векторов. Тем самым вычислительная сложность каждой итерации процесса (18) есть  $O(n)$ . Далее, если матрица  $A$  является хорошо обусловленной, то  $k(A) = O(1)$ , а следовательно, учитывая (16),  $\kappa(A)^2 = O(n)$ . Таким образом, в данных предположениях относительно обусловленности матрицы предложенный алгоритм требует  $O(n^2)$  операций для сходимости решения к точному.

### 3 Результаты

В этом разделе представлены результаты расчётов. На рисунке 1 представлено точное решение (слева), решение, построенное с помощью метода Гельфанда — Левитана (в центре), и сплаженное решение (справа). Необходимость сглаживания обусловлена тем, что стохастический проекционный метод вносит случайные флуктуации в решение уравнения Гельфанда — Левитана, влияние которых на решение обратной задачи усиливается в силу численного дифференцирования, стоящего за формулой (12). На рисунке 2 представлена

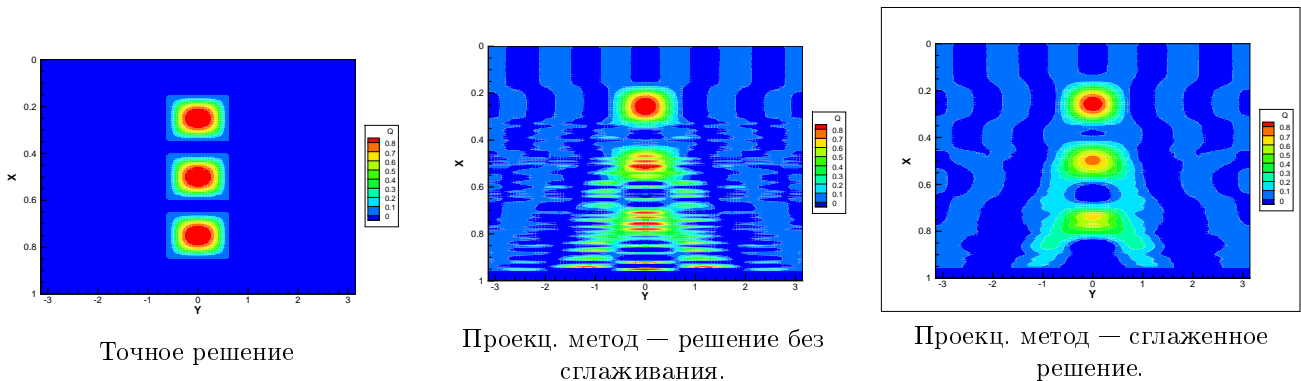


Рис. 1: Влияние сглаживания решения уравнения Гельфанда — Левитана на точность решения обратной задачи.

зависимость точности решения от количества восстанавливаемых гармоник Фурье. Видно, что количество восстанавливаемых гармоник является параметром регуляризации, что подчёркивает дополнительную важность более качественного учета данных, соответствующих большим значениям параметра  $N$ .

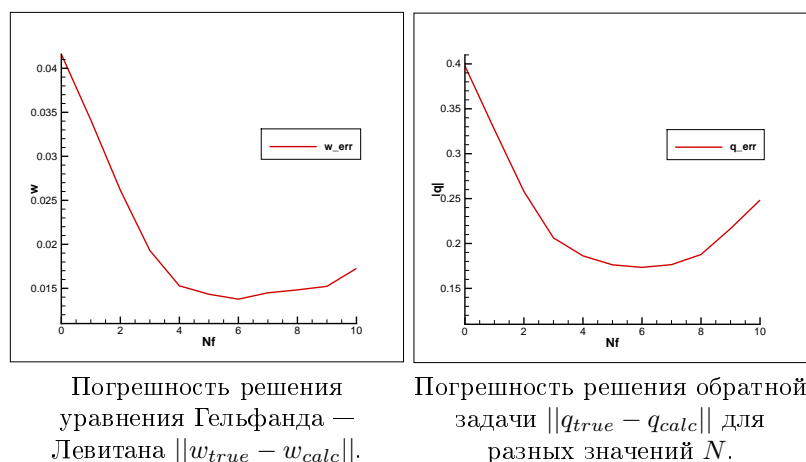


Рис. 2: Зависимость точности решения от количества восстанавливаемых коэффициентов Фурье.

## Список литературы

- [1] Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. Cambridge University Pr.; 2005.
- [2] Fichtner A. Full seismic waveform modelling and inversion. Springer Science & Business Media; 2010
- [3] Аникиев Д. В. и др. Методы обращения сейсмических волновых полей // Seismic Technology. — 2014. — Т. 11. — №. 1. — С. 38–58.
- [4] Kabanikhin, S.I., Novikov, N.S., Oseledets, I.V., Shishlenin, M.A. Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // (2015) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 23 (6), pp. 687–700.
- [5] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Two-dimensional analogs of the equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko // (2015) Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 3 (2), pp. 70–99.
- [6] Kabanikhin, S.I., Sabelfeld, K.K., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A. Numerical solution of the multidimensional Gelfand-Levitan equation // (2015) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 23 (5), pp. 439–450.
- [7] Kabanikhin, S.I., Sabelfeld, K.K., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A. Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods. // (2015) Monte Carlo Methods and Applications, 21 (3), pp. 189–203.
- [8] Kabanikhin, S.I., Nurseitov, D.B., Shishlenin, M.A., Sholpanbaev, B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar (2013) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 21 (6), pp. 885–892.
- [9] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation // (2011) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 18 (9), pp. 979–995.
- [10] Kabanikhin, S., Shishlenin, M. Quasi-solution in inverse coefficient problems // (2008) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 16 (7), pp. 705–713.
- [11] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem // (2004) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 12 (2), pp. 125–144.
- [12] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Comparative analysis of boundary control and Gel'fand-Levitan methods of solving inverse acoustic problem // (2003) Inverse Problems in Engineering Mechanics IV, pp. 503–512.
- [13] Kabanikhin, S.I., Scherzer, O., Shishlenin, M.A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // (2003) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 11 (1), pp. 87–109.

- [14] Wapenaar K, Thorbecke J, Van Der Neut J, et al. Marchenko imaging. // Geophysics. 2014b;79(3):WA39–WA57
- [15] Н.С. Новиков, Сравнительный анализ численных методов решения двумерного аналога уравнения Гельфанда — Левитана // Сибирские электронные математические известия, Труды 5й международной молодёжной научной школы — конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач с. 132–144, 2014
- [16] Ильин В.П., Об итерационном методе Качмажа и его обобщениях // Сиб. журн. индустр. матем., 9(3), стр. 39–49, 2006
- [17] K. Sabelfeld, N. Loshchina, Stochastic iterative projection methods for large linear systems // Monte Carlo Methods Appl. 16 (2010), 343–359
- [18] T. Strohmer and R. Vershynin, A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 15 (2009), 262–278.

*Сергей Игоревич Кабанихин — д.ф.-м.н., директор Института  
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;  
e-mail: ksi@sscc.ru;*

*Никита Сергеевич Новиков — м.н.с. Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;  
e-mail: novikov-1989@yandex.ru;*

*Максим Александрович Шишленин — с.н.с. Института вычислительной  
математики и математической геофизики СО РАН; Институт математики СО РАН;  
e-mail: mshishlenin@ngs.ru.*

*Дата поступления — 30 апреля 2017 г.*