

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТАХ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЦУНАМИ

А. Г. Марчук

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 551.466.62

В работе анализируются граничные условия, которые применяются при численном моделировании процессов генерации и распространения волн цунами в различных случаях. Особое внимание уделяется генерирующим граничным условиям, которые позволяют легко генерировать волну с заданными характеристиками (амплитуда, период и, вообще, форма сигнала или мареограмма). Известно, что в распространяющейся волне цунами скорость водного потока однозначно определяется высотой волны и глубиной. Поэтому, путём принудительного изменения уровня водной поверхности в граничных узлах расчётной сетки и заданием компонент скорости водного потока можно получить волну, распространяющуюся от границы внутрь области. При помощи такого приёма реализован численный расчёт распространения цунами от очага до берега на последовательности сгущающихся сеток. В этом вычислительном эксперименте параметры волны цунами из области в подобласть передаются именно через граничные условия. Ещё таким способом можно модельным источником малого размера генерировать очень длинную волну цунами. В частности, такую волну, которая на заданной линии имеет заданный профиль. Иногда такое требуется при тестировании численных методов расчёта цунами.

Ключевые слова: численный расчёт распространения цунами, граничные условия.

При численном моделировании различных динамических процессов, например, распространения волн область моделирования обычно является ограниченной в пространстве. Поэтому, при достижении волной границ расчётной области необходимо учитывать реакцию оставшейся части океана (не входящей в область моделирования) на колебания водной поверхности внутри расчётной области. По большому счёту, возможны два варианта: свободный выход волны за пределы расчётной области без отражения и отражение от тех границ, которые представляют береговые линии. Следовательно, в численных расчётах распространения длинных волн обычно используются два типа граничных условий: отражения и свободный выход волны за пределы расчётной области. Рассмотрим, каков конкретно вид должны иметь оба эти граничные условия при численных расчётах распространения волн цунами по модели мелкой воды [1].

Рассмотрим одномерную систему дифференциальных уравнений мелкой воды. В одномерном случае при отсутствии внешних сил (кроме силы гравитации) эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Du)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь u — горизонтальная скорость потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущённого уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Из уравнений мелкой воды следует, что скорость волны не зависит от её длины и определяется формулой Лагранжа [1]

$$c = \sqrt{gD}. \quad (3)$$

Эта формула имеет основополагающее значение для кинематики длинных волн (в том числе цунами). Фронт волны может быть определён, как граница между той частью акватории, где вода покоится (возвышение η и компоненты скорости равны нулю), и той частью, куда к этому моменту возмущение от источника

уже дошло ($\eta \neq 0$). Для описания динамики волн цунами в прибрежной зоне, где амплитуда цунами возрастает, а глубина становится меньше, применяется нелинейная модель мелкой воды [2], в рамках которой скорость распространения волн выражается формулой

$$c = \sqrt{g(D + \eta)}. \quad (4)$$

Итак, сначала получим приближённую формулу для величины горизонтальной скорости u воды при движении волны цунами, если глубина равна D . Такую зависимость можно получить явным образом из линеаризованных уравнений мелкой воды (1)–(2). Мы уже знаем, что в рамках этой модели волна распространяется со скоростью, определяемой формулой Лагранжа (3). Представим бегущую волну в виде гармонической функции

$$\eta = a \cdot \cos(kx - \omega t), \quad (5)$$

которая описывает волну высотой a , бегущую в сторону увеличения x координаты со скоростью $c = \omega/k$. Подставив выражение для смещения водной поверхности (5) в уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gka \cdot \sin(kx - \omega t). \quad (6)$$

Интегрируя по t обе части уравнения (6), получаем зависимость скорости потока в волне от амплитуды и глубины

$$u = \int \frac{gk}{-\omega} a \cdot \sin(kx - \omega t) d(kx - \omega t) = \frac{g}{c} (a \cdot \cos(kx - \omega t)) = \frac{g}{\sqrt{gD}} \eta = \eta \sqrt{\frac{g}{D}}. \quad (7)$$

Таким образом, в гармонической волне вида (5) скорость течения воды определяется по формуле (7). Но в силу линейности процесса, для любой длинной волны, которая может быть представлена в виде суперпозиции гармонических волн разной частоты и является решением системы линейных дифференциальных уравнений мелкой воды (1)–(2), формула (7) будет справедлива. А для квазилинейной системы уравнений мелкой воды, где скорость фронта и гребня волны несколько различаются и определяются зависимостью (3), формула для горизонтальной скорости потока в движущейся волне будет иметь вид

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}}, \quad (8)$$

где η — высота волны, D — глубина, g — ускорение силы тяжести. Вот такая корреляция скорости водного потока в волне и её амплитуды позволяет строить граничные условия при численном моделировании цунами в ограниченной области океана.

Рассмотрим сначала более простое граничное условие полного отражения волны (или непротекания), которое обычно ставится в узлах расчётной сетки вдоль береговой линии, являющейся хорошим отражателем волны цунами. Пусть для определённости левая граница прямоугольной расчётной области является береговой линией, от которой волна должна отразиться. Обычно для численного решения дифференциальных уравнений мелкой воды используется прямоугольная сетка. В данной области динамическими параметрами волнового движения являются дискретные переменные $\eta(i, j)$, $u(i, j)$ и $v(i, j)$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), дающие значения возвышения свободной поверхности и компонент скорости водного потока в узлах сетки. Также в каждом узле задана глубина $D(i, j)$. В результате расчёта по явной разностной схеме на очередном n -ом шаге по времени вычислены значения дискретных переменных во всех внутренних узлах расчётной сетки $\eta_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$, ($i = 2, \dots, n-1$; $j = 2, \dots, m-1$). Для того, чтобы на левой границе были реализованы условия отражения волны, могут быть использованы следующие простейшие граничные условия:

$$\eta_{1,j}^{n+1} = \eta_{2,j}^{n+1}, \quad u_{i,j}^{n+1} = 0, \quad v_{1,j}^{n+1} = v_{2,j}^{n+1}, \quad (9)$$

означающие, что компонента скорости в направлении оси X в граничных узлах равна нулю.

Граничные условия свободного выхода волны за пределы расчётной области имеют более сложный вид. В литературе они иногда называются условиями Зоммерфельда. Суть их заключается в переносе параметров течения из ближайших внутренних узлов сетки в граничные, учитывая направление движения волны и скорость, определяемую из (3). В частности, на левой границе расчётной области для реализации свободного выхода волны из области могут быть использованы следующие граничные условия:

$$\eta_{1,j}^{n+1} = \eta_{1,j}^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cdot \cos(\alpha)\right) + \eta_{2,j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cdot \cos(\alpha), \quad (10)$$

$$u_{1,j}^{n+1} = u_{1,j}^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cdot \cos(\alpha)\right) + u_{2,j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cdot \cos(\alpha), \quad (11)$$

$$v_{1,j}^{n+1} = v_{1,j}^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{1,j}} \cdot \cos(\alpha)\right) + v_{2,j}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gD_{2,j}} \cdot \cos(\alpha), j = 2, \dots, m-1. \quad (12)$$

Здесь α обозначает направление движения волны и вычисляется по формуле

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{(u_{2,j}^n)^2}{(u_{2,j}^n)^2 + (v_{2,j}^n)^2}}. \quad (13)$$

Здесь следует заметить, что коэффициент при первых слагаемых в формулах (10)–(12) не может быть отрицательным ввиду условия устойчивости Куранта для явных разностных схем, которое не допускает продвижения волны более чем на один шаг сетки по пространству за один шаг по времени. На других границах такого рода граничные условия слегка изменятся.

Остановимся теперь на “генерирующих” граничных условиях. Они позволяют генерировать волну, распространяющуюся внутрь расчётной области. При этом, это может быть не только внешняя граница области, но и граница какой-либо подобласти. Ввиду того, что скорость водного потока в движущейся волне однозначно определяется из (8), то путём принудительного задания на какой-либо границе ненулевых значений амплитуды и компонент скорости потока можно получить волну цунами с заданными параметрами, распространяющуюся внутрь расчётной области. С помощью такого приёма можно вести расчёт распространения цунами на последовательности вложенных сеток.

Численный расчёт распространения цунами на последовательности сгущающихся сеток позволяет получить детальное распределение высоты волны вдоль некоторых участков побережья, которые мы считаем важными с точки зрения прогноза цунами. Если вести расчёт во всей области, включающей в себя и район генерации и береговую линию с очень малым шагом по пространству, обеспечивая тем самым детальность оценок, то из-за условия устойчивости придётся считать с очень малым шагом по времени, что приведёт к большим затратам машинного времени и вычислительных ресурсов. Приведём пример численного расчёта распространения цунами от очага, находящегося на значительном расстоянии от берега до мелководных бухт, где обычно сосредоточены объекты инфраструктуры и жилые дома.

Рассмотрим прямоугольную акваторию у северо-восточного побережья острова Хонсю (Япония), которая включает в себя цунамигенную зону вдоль глубоководного желоба. Назовём эту расчётную область — B_1 . Длина шагов расчётной сетки 3219×3219 в этой области равно 0.00248 географического градуса, что примерно составляет 280 м в направлении с севера на юг. Цифровой рельеф дна и суши этой расчётной области B_1 , простирающейся от 140 до 147.9944 градусов В.Д. и от 34.00 до 41.9948 градусов С.Ш., который был построен на основе данных [3] и [4], показан на рис. 1.

На первом этапе рассчитывается распространение волны цунами в области B_1 от модельного очага, изображенного на рис. 1, и, практически, до берега. При этом расчёте шаг по времени был выбран равным 0.5 сек. В процессе расчёта на каждом временном шаге мы записываем в файл значения параметров волны (возвышение свободной поверхности и компоненты скорости течения) во всех точках границы области B_2 , которая расположена внутри исходной расчётной области B_1 (рис. 2). Естественно, рассматриваются только те границы, где есть точки, располагающиеся в море, то есть в данном случае это верхняя, правая и нижняя границы области B_2 . Записывать граничные данные можно с самого начала расчёта в области B_1 . Прекратить запись можно после того, как волна цунами полностью (как минимум один полный период) пройдёт границу области B_2 . После этого начинаем расчёт цунами в области B_2 на сетке с шагом 70 м. При этом в начальный момент водная поверхность там покоится. На каждом очередном временном шаге происходит считывание сохранённых параметров течения вдоль границ расчётной области B_2 . Одновременно эти данные интерполируются на более детальную расчётную сетку, шаг которой в данном случае в 4 раза меньше, чем в области B_1 . В результате от границ внутрь области B_2 распространяется волна цунами в точности с теми же параметрами, как в области B_1 (рис. 2, 3).

На втором этапе в процессе расчёта на каждом временном шаге, как и в области B_1 мы записываем в файл значения параметров волны (возвышение свободной поверхности и компоненты скорости течения) во всех точках границы подобласти B_3 , которая расположена внутри расчётной области B_2 (рис. 3).

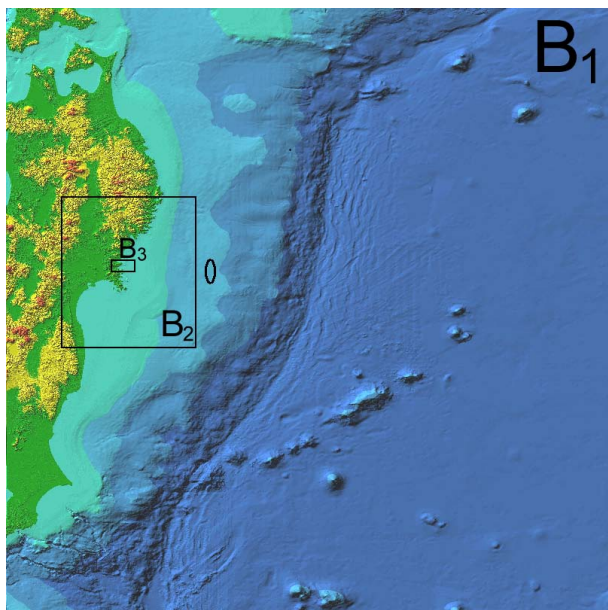


Рис. 1: Визуализация цифровой батиметрии исходной расчётной области у берегов Японии, а также расположение очага цунами и вложенных сеток

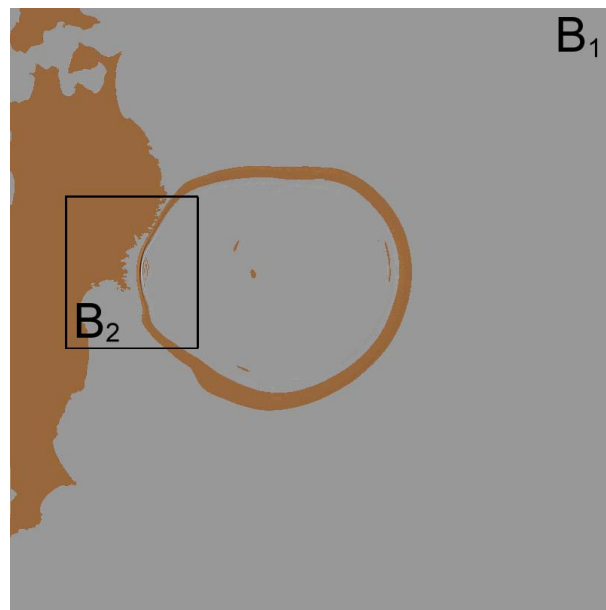


Рис. 2: Положение волны цунами, распространяющейся от модельного источника в области B_1

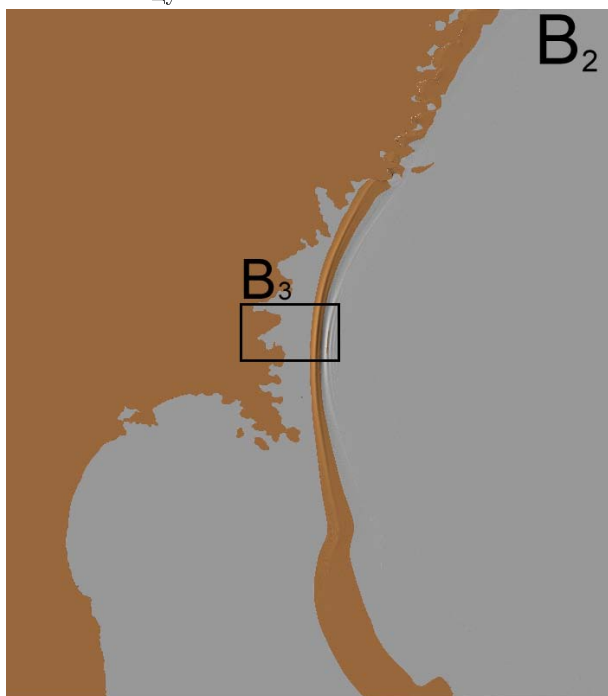


Рис. 3: Визуализация результатов расчёта распространения цунами в подобласти B_2

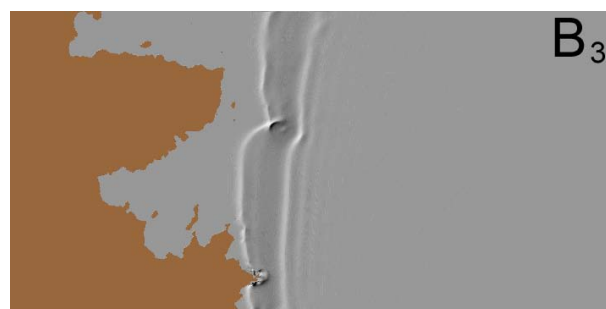
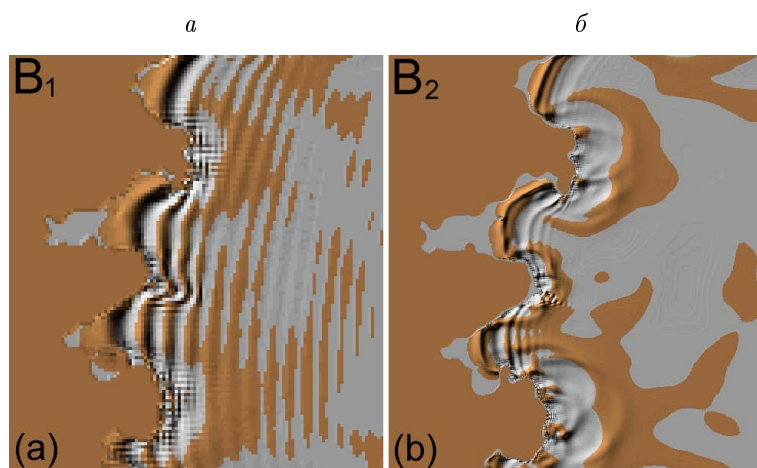
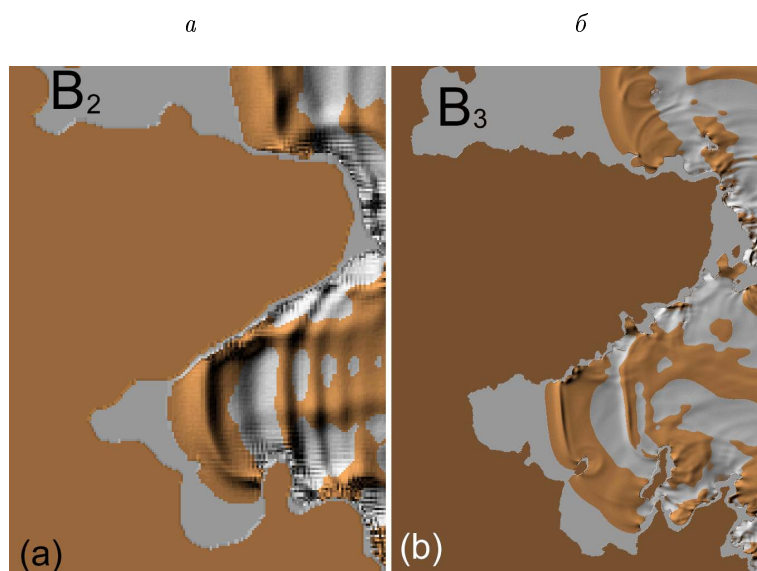


Рис. 4: Визуализация одного из моментов распространения цунами в расчётной области B_3

На последнем этапе рассчитывается распространение волны в подобласти B_3 , покрывающей прибрежную акваторию с несколькими мелководными бухтами (рис. 4). Здесь, как и раньше, параметры волны цунами передаются в эту расчётную подобласть через граничные условия на верхней, правой и нижней границе. Значения параметров течения здесь генерируются путём интерполяции результатов расчёта в области B_2 на более детальную расчётную сетку с шагом 17 м. Результатом всех этапов расчёта является распределение высоты волны цунами вдоль побережий бухт.

Рис. 5: Сравнение водной поверхности в расчётных областях B_1 и B_2 Рис. 6: Результаты расчётов распространения цунами в областях B_2 и B_3 с применением двухэтапного $B_1 - B_2$ (слева) и трёхэтапного $B_1 - B_2 - B_3$ (справа) вычислительного эксперимента

Численные расчёты выявили существенную разницу у берега в параметрах волны, вычисленной на последовательности сгущающихся сеток и при использовании единой сетки детальностью 277 м для всей расчётной области B_1 . Сравнение водной поверхности для случаев единой сетки и при использовании только двух сеток B_1 и B_2 показано на рис. 5а, б. Из рисунков видно, что на более грубой сетке у волны наблюдается значительно больший «хвост», состоящий из последовательности волн меньшей амплитуды, чем головная волна. Аналогичная картина наблюдается и при сравнении результатов двухэтапного расчёта $B_1 - B_2$ и расчёта на последовательности из трёх сгущающихся сеток $B_1 - B_2 - B_3$ (рис. 6а, б).

Генерирующие граничные условия могут ставиться не только на внешних границах расчётной области, но и внутри области, например, вокруг модельного источника цунами. При этом таким способом можно генерировать волну с заданными параметрами (период и форма волнового сигнала). Такой способ позволяет небольшому по размерам источнику породить волну, имеющую длину, значительно превышающую поперечник этого источника, чего не может быть при использовании для генерации поршневой модели.

Заключение

Граничные условия при численных расчётах распространения цунами могут использоваться не только для обеспечения отражения волн от береговых линий и других отражающих границ и свободного выхода волны

из области расчётов, но и для передачи параметров волны, распространяющейся из одной части расчётной области в подобласть, где дальнейший расчёт ведётся на более детальной сетке. Таким способом можно находить детальное распределение высоты волны вдоль интересующего нас участка побережья. Ещё с помощью генерирующих граничных условий можно получать волну цунами с заданными параметрами, что немаловажно для тестирования численных алгоритмов.

Список литературы

- [1] Стокер Дж. Дж. Волны на воде. — М.: ИЛ, 1959. 617 с.
- [2] Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. — Сиб. Отд. Изд. Наука, Новосибирск, 1983, 174 с
- [3] http://jdoss1.jodc.go.jp/cgi-bin/1997/depth500_file
- [4] <http://www.gdem.aster.ersdac.or.jp/search.jsp>

*Андрей Гурьевич Марчук — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: tag@otzg.sscc.ru.*

Дата поступления — 26 мая 2017 г.