

# БИКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОИСК В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ФЛОТАЦИИ МЕДНО-МОЛИБДЕНОВЫХ РУД

Т. В. Груздева, А. В. Ушаков

*Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск*

УДК 519.853.4

К решению задачи оптимизации процесса пенной флотации медно-молибденовых руд предлагается новый подход, основанный на теории глобального поиска для невыпуклых задач с d.c. функциями, методе точного штрафа и методе главного критерия. Цель состоит в поиске оптимальных значений параметров процесса, приводящих к максимальному содержанию меди в концентрате и одновременно к максимальному ее извлечению при заданных технологических ограничениях. Разработанная методика нахождения приближенного множества Парето в бикритериальной задаче основана на решении серии подзадач с d.c. ограничением. Поиск оптимальных решений невыпуклых подзадач состоит из двух основных этапов: локального поиска и основанных на условиях глобальной оптимальности процедур выхода из локальных решений. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на одной модели процесса флотации на СПГОК «Эрдэнэт» (Монголия).

**Ключевые слова:** невыпуклая оптимизация, d.c. программирование, точный штраф, метод главного критерия, множество Парето, локальный поиск, глобальный поиск.

## Введение

Обогащение руды представляет собой сложный промышленный процесс, направленный на первичную обработку руд с целью извлечения ценных минералов. Флотация является одним из основных методов обогащения полезных ископаемых. Цель процесса состоит в отделении ценных минералов от пустой породы и повышении их концентрации (производство концентрата), чтобы сделать последующий процесс извлечения минералов экономически более выгодным [1].

Изучению и моделированию производственных процессов, связанных с переработкой минерального сырья, посвящено множество публикаций (см. обзор в [1, 2]). Подавляющее большинство оптимизационных моделей — это задачи смешанного целочисленного программирования с целевыми функциями, оптимизирующими экономические или металлургические показатели. Такие задачи, как правило, являются невыпуклыми, и для их решения чаще всего применяют различные коммерческие решатели, такие как BARON, CONOPT, LINDOGLOBAL, OSL2 и т. д. Однако, как было отмечено в [3], ввиду сложности постановок найденные решения не всегда гарантированно оказываются глобально оптимальными.

Дополнительную сложность в решение реальных задач вносит многокритериальность их постановок, когда необходимо максимизировать (минимизировать) несколько производственных показателей одновременно с учетом некоторых технологических ограничений. В связи с этим большую популярность приобрели многокритериальные генетические и эволюционные алгоритмы (см., например, [4, 5]), основным недостатком которых является невозможность найти хорошую аппроксимацию множества Парето-оптимальных решений [6].

В настоящей работе предлагается новый подход к решению задачи оптимизации процесса флотации, основанный на теории глобального поиска для задач с функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций (d.c. функциями) [8, 9], методе точного штрафа [10] и методе главного критерия [11, 12]. Бикритериальная задача состоит в поиске оптимальных значений параметров, приводящих к достижению двух

целей: максимизации процента содержания меди в концентрате и максимизации извлечения меди из произведенного концентрата при заданных технологических ограничениях. Насколько нам известно, современные методы оптимизации используются для повышения эффективности флотационного процесса впервые в данной работе, поскольку, как отмечено в [3], высокая сложность возникающих на производстве невыпуклых задач не позволяет найти глобальное решение с помощью стандартных методов выпуклого программирования.

Разработанная методика нахождения приближенного множества Парето в бикритериальной задаче основана на решении серии вспомогательных задач с невыпуклой целевой функцией и невыпуклым ограничением. Поиск оптимальных решений задач d.c. программирования состоит из двух основных этапов: локального поиска и основанных на условиях глобальной оптимальности [8, 9] процедур выхода из локальных решений. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на решении задачи оптимизации реального процесса первичной флотации медно-молибденовых руд на СПГОК «Эрдэнэт» (Монголия).

## 1 Постановка задачи

Математическая модель процесса пенной флотации была построена на основе 5000 данных реального производственного процесса на СПГОК «Эрдэнэт» (подробнее см. [7]). В качестве независимых переменных были выбраны следующие параметры флотационного процесса:  $x_1$  и  $x_2$  — количество флотореагентов AeroMix и ВК-901, соответственно (в граммах на тонну);  $x_3$  — расход пенообразователя МВК (в граммах на тонну);  $x_4$  — содержание флотореагентов “–74 micrometer grain class” в сепараторе (в % от массы);  $x_5$  — общий вес меди в руде (в % от массы);  $x_6$  и  $x_7$  — общее содержание в руде первичной и окисленной меди, соответственно (в % от массы). Заметим, что содержание меди в руде (в том числе первичной и окисленной) может варьироваться, поэтому эти параметры также были выбраны в качестве независимых переменных.

На основе обработанных и нормализованных данных методами регрессионного анализа были построены [7] две квадратичные функции:  $\phi_1(x)$  описывает зависимость от переменных  $x_1, \dots, x_7$  процента содержания меди в коллективном концентрате,  $\phi_2(x)$  — процента извлечения меди из концентрата:

$$\phi_1(x) = \langle x, A_1 x \rangle + \langle b^1, x \rangle + 3.351, \quad \phi_2(x) = \langle x, A_2 x \rangle + \langle b^2, x \rangle + 0.317, \quad (1)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.129 & 0.046 & -0.081 & -0.061 & 0.109 & 0.893 & 0.128 \\ 0.000 & -0.061 & 0.134 & 0.317 & -0.073 & 0.018 & 0.045 \\ -0.081 & 0.000 & 0.324 & 0.301 & 0.038 & -4.877 & -0.097 \\ 0.622 & 0.317 & -0.739 & -0.569 & 1.148 & 2.851 & 0.085 \\ 0.109 & -0.073 & 0.038 & 0.000 & 0.451 & 0.243 & 0.469 \\ -0.629 & 0.018 & 4.797 & -1.790 & 0.243 & 0.202 & -0.741 \\ 0.128 & 0.045 & -0.097 & 0.085 & 0.000 & 0.815 & 0.036 \end{pmatrix}$$

$$b^1 = -(1.063, 0.654, 0.018, 0.852, 2.305, 1.763, 0.628),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.033 & 0.002 & 0.054 & -1.901 & -0.189 & -1.012 & 0.020 \\ 0.000 & -0.037 & 0.067 & -0.075 & -0.061 & 0.019 & -0.058 \\ 0.054 & 0.000 & -0.384 & 2.154 & 0.316 & 0.244 & 0.012 \\ 1.270 & -0.075 & -1.700 & -0.134 & -0.196 & 0.084 & 0.067 \\ -0.189 & -0.061 & 0.316 & 0.000 & 0.074 & -0.109 & 0.023 \\ 0.862 & 0.019 & -0.203 & -0.171 & -0.109 & 0.168 & -2.244 \\ 0.020 & -0.058 & 0.012 & 0.067 & 0.000 & 2.081 & 0.024 \end{pmatrix}$$

$$b^2 = (0.917, 0.235, -0.374, 0.617, 0.100, 0.149, -0.118).$$

Нетрудно видеть, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  не являются симметричными. Они также не являются и положительно определенными, поскольку имеют следующие собственные значения:

$$\lambda_{1,2}^1 = 0.27 \pm 5.46i, \lambda_3^1 = -0.63, \lambda_4^1 = 0.59, \lambda_5^1 = -0.01, \lambda_{6,7}^1 = 0.02 \pm 0.11i;$$

$$\lambda_{1,2}^2 = -0.09 \pm 2.73i, \lambda_{3,4}^2 = -0.03 \pm 2.00i, \lambda_5^2 = -0.13, \lambda_6^2 = -0.05, \lambda_7^2 = 0.09.$$

Поэтому соответствующие квадратичные функции  $\phi_1(\cdot)$  и  $\phi_2(\cdot)$  оказываются невыпуклыми, и каждую из них можно представить в виде разности двух выпуклых функций (в виде d.c.).

Рассмотрим далее следующую бикритериальную задачу д.с. программирования:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) &= \langle x, A_1 x \rangle + \langle b^1, x \rangle + 3.351 \uparrow \max, \\ \phi_2(x) &= \langle x, A_2 x \rangle + \langle b^2, x \rangle + 0.317 \uparrow \max, \\ x &\in \Pi, \end{aligned} \right\} \quad (BP)$$

где допустимое множество  $\Pi$  представляет собой нормализованную форму технологических ограничений на переменные параллелепипеда вида:

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^7 : 0.41 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0.57 \leq x_3 \leq 1, 0.72 \leq x_4 \leq 1, 0.63 \leq x_5 \leq 1, 0.42 \leq x_6 \leq 1, 0.17 \leq x_7 \leq 1\}. \quad (2)$$

Далее, следуя методу главного критерия [11, 12], который основан на сведении  $(BP)$  к задаче с одним выбранным главным критерием, в то время как другой критерий добавляется в задачу в виде ограничения с некоторым параметром, принимающим значения в пространстве критериев, будем рассматривать две следующие задачи д.с. программирования:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) &\uparrow \max, \quad x \in \Pi, \\ \phi_2(x) &\geq \varepsilon_2; \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_1(\varepsilon_2)) \qquad \left. \begin{aligned} \phi_2(x) &\uparrow \max, \quad x \in \Pi, \\ \phi_1(x) &\geq \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_2(\varepsilon_1))$$

Любое глобально оптимальное решение подзадач  $(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2))$  или  $(\mathcal{P}_2(\varepsilon_1))$  является слабо эффективной точкой (точкой Слейтера) в задаче  $(BP)$  [12]. Если такое решение единственно, то оно оптимально по Парето. Таким образом, решая серии задач с д.с. ограничением с различными значениями параметров  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_2 > 0$ ), можно найти аппроксимацию множества слабо эффективных решений, а следовательно, и аппроксимацию множества точек, оптимальных по Парето. И поскольку каждая Парето-оптимальная точка является единственным глобальным решением любой из подзадач  $(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2))$  или  $(\mathcal{P}_2(\varepsilon_1))$  [12] при некоторых значениях  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , то достаточно рассмотреть, например, только задачу  $(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2))$ .

В следующем разделе будет представлен основанный на условиях глобальной оптимальности [9] метод решения задач с д.с. целевой функцией и д.с. ограничением.

## 2 Локальный и глобальный поиск

Для применения стратегии глобального поиска [8, 9, 13, 14] в процессе решения серии невыпуклых задач необходимо, прежде всего, построить явное д.с. представление невыпуклых функций  $\phi_1(\cdot)$  и  $\phi_2(\cdot)$ . Поскольку функции квадратичные, нетрудно представить их в виде разностей двух выпуклых функций, используя, например, прием из [13].

Далее для удобства изложения представим  $(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2))$  как задачу минимизации следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} -\phi_1(x) &= g_1(x) - h_1(x) \downarrow \min, \quad x \in \Pi, \\ -\phi_2(x) &= g_2(x) - h_2(x) + \varepsilon_2 \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P})$$

где  $g_l(x) = \langle x, A_l^g x \rangle - \langle b^l, x \rangle - c_l$ ,  $h_l(x) = \langle x, A_l^h x \rangle$ ,  $l = 1, 2$ , выпуклые функции ( $A_j = A_j^h - A_j^g$ ,  $j = 1, 2$ ).

Первым этапом решения задачи  $(\mathcal{P})$  в соответствии с теорией глобального поиска является поиск локальных решений специальным методом локального поиска для общей задачи д.с. оптимизации [15]. Его основная идея заключается в линеаризации в текущей точке функции  $h_1(\cdot)$ , которая определяет базовую невыпуклость задачи  $(\mathcal{P})$ , и затем минимизации выпуклой аппроксимации целевой функции на выпуклом множестве, полученном заменой невыпуклого ограничения его линеаризацией.

Предположим, что задана допустимая начальная точка  $x^0 \in \Pi$ , и после нескольких последовательных итераций метода найдена точка  $x^s \in \Pi$ ,  $s \in \{1, 2, \dots\}$ . Линеаризованная (в точке  $x^s$ ) задача (выпуклого квадратичного программирования) может быть записана следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) - \langle \nabla h_1(x^s), x \rangle &\downarrow \min, \quad x \in \Pi, \\ g_2(x) - \langle \nabla h_2(x^s), x - x^s \rangle - h_2(x^s) + \varepsilon_2 &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}\mathcal{L}_s)$$

Решая последовательность линеаризованных задач  $(\mathcal{P}\mathcal{L}_s)$  пока не выполнится критерий останова [15]

$$\phi_1(x^{s+1}) - \phi_1(x^s) \leq \frac{\tau}{2} \quad (3)$$

с заданной точностью  $\tau$ , получим локальное решение  $x^s =: z$  задачи  $(\mathcal{P})$ .

Далее возникает необходимость построения процедуры, позволяющей улучшить точку, полученную на этапе локального поиска. Для построения такой процедуры рассмотрим следующую вспомогательную задачу со штрафным параметром  $\sigma$  [8]:

$$\theta_\sigma(x) = g_1(x) - h_1(x) + \sigma \max\{0; g_2(x) - h_2(x) + \varepsilon_2\} \downarrow \min, \quad x \in \Pi.$$

Заметим, что целевая функция  $\theta_\sigma(\cdot)$  может быть также представлена в виде разности двух выпуклых функций. Действительно, поскольку  $\max\{0; g_2(x) - h_2(x) + \varepsilon_2\} = \max\{g_2(x) + \varepsilon_2; h_2(x)\} - h_2(x)$ ,

$$\begin{aligned} \theta_\sigma(x) &= G_\sigma(x) - H_\sigma(x), \\ G_\sigma(x) &= g_1(x) + \sigma \max\{g_2(x) + \varepsilon_2; h_2(x)\}, \quad H_\sigma(x) = h_1(x) + \sigma h_2(x). \end{aligned}$$

Согласно теории глобального поиска [8, 9, 13, 14] процедура выхода из точки локального минимума может быть представлена в виде цепочки следующих операций:

- 1) построить аппроксимацию поверхности уровня выпуклой функции  $H_\sigma(\cdot)$ , аккумулирующей невыпуклость в задаче  $(\mathcal{P})$ ;
- 2) решить линейаризованные (в каждой точке  $v$  построенной аппроксимации) задачи вида

$$g_1(x) + \sigma \max\{g_2(x) + \varepsilon_2; h_2(x)\} - \langle \nabla h_1(v) + \sigma \nabla h_2(v), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in \Pi; \quad (4)$$

- 3) выполнить локальный поиск, выбирая в качестве стартовых точек решения линейаризованных задач (4).

Заметим, что целевая функция в (4) не является гладкой, что может создать дополнительные трудности при ее решении, однако введением новой дополнительной переменной  $t$  в линейаризованную задачу (4) можно избежать этой негладкости следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) - \langle \nabla h_1(v) + \sigma \nabla h_2(v), x \rangle + \sigma t &\downarrow \min_{(x,t)}, \quad x \in \Pi, \quad t \in \mathbb{R}, \\ g_2(x) + \varepsilon_2 &\leq t, \quad h_2(x) \leq t. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Задачи (4) и (5) являются эквивалентными [16].

Нетрудно видеть, что задача (5) выпукла, и может быть решена, как и задача  $(\mathcal{P}\mathcal{L}_s)$ , любым подходящим методом выпуклой оптимизации или пакетом прикладных программ. (В настоящей работе для решения выпуклых задач использован IBM ILOG CPLEX 12.6.2.\*)

При построении аппроксимации поверхности уровня выпуклой функции  $H_\sigma(\cdot)$  использован стандартный набор базисных векторов  $e^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , так что точки, лежащие на поверхности уровня  $H_\sigma(x) = \beta - \zeta$  для каждой пары  $(\beta, \zeta)$ , где  $\beta$  — параметр, определяющий поверхность уровня (см. условия оптимальности [8, 9, 13, 14]), а  $\zeta = \theta_\sigma(z) = -\phi_1(z)$ , строились по следующему правилу [13, 14, 17, 18, 19, 20]:

$$v^i = \mu_i e^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где  $\mu_i^{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\beta - \zeta}{A_1^h(i, i) + \sigma A_2^h(i, i)}}$ , а  $A_j^h(i, i)$  — диагональный элемент матрицы  $A_j^h$ ,  $j = 1, 2$ .

Далее представим схему поиска глобальных решений задачи  $(\mathcal{P})$ . В качестве параметра штрафа  $\sigma$  можно использовать множитель Лагранжа, соответствующий текущей точке  $z^k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots\}$ .

Шаг 1. Специальным методом локального поиска найти локальное решение  $z^k$  задачи  $(\mathcal{P})$ .

Шаг 2. Положить  $\beta_k = G_\sigma(z^k)$ ,  $\zeta_k = \theta_\sigma(z^k)$ .

Шаг 3. Построить аппроксимацию  $R_k(\beta) = \{v^1, \dots, v^n \mid H_\sigma(v^i) = \beta_k + \zeta_k, \quad i = 1, \dots, n\}$ .

Шаг 4. Найти приближенное решение  $\bar{u}^i$  линейаризованной задачи (4) такое, что

$$G_\sigma(\bar{u}^i) - \langle \nabla H_\sigma(v^i), \bar{u}^i \rangle - \delta_k \leq \inf_x \{G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(v^i), x \rangle\}.$$

Шаг 5. Начиная с точек  $\bar{u}^i$ , методом локального поиска найти новые локальные решения  $u^i$ .

Шаг 6. Выбрать точку  $u^j$ :  $\phi_1(u^j) \geq \max_{i=1, \dots, n} \phi_1(u^i)$ .

Шаг 7. Если  $\phi_1(u^j) > \phi_1(z^k)$ , то  $z_{k+1} := u^j$ ,  $k = k + 1$  и вернуться на Шаг 2.

Шаг 8. Если  $\phi_1(u^j) \leq \phi_1(z^k)$ , то выбрать новое значение  $\beta$ :  $\inf(G_\sigma, \Pi) \leq \beta \leq \sup(G_\sigma, \Pi)$  и вернуться на Шаг 3.

Таким образом, варьируя параметр  $\varepsilon_2$  и решая серию задач д.с. программирования  $(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2))$ , можно получить аппроксимацию всего множества точек, оптимальных по Парето в бикритериальной задаче  $(\mathcal{BP})$ .

\*<http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>

### 3 Результаты вычислительного эксперимента

Следуя теории решения многокритериальных задач [12], прежде всего, посредством решения соответствующих невыпуклых (d.c.) задач оптимизации были найдены эталонные точки:

— идеальная точка  $(\Phi_1^I, \Phi_2^I) = (23.504, 97.486)$ , где  $\Phi_l^I = \max_{x \in \Pi} \phi_l(x)$ ,  $l = 1, 2$ ;

— надир  $(\Phi_1^{nad}, \Phi_2^{nad}) = (17.616, 67.984)$ , где  $\Phi_l^{nad} = \left\{ \max_{x \in \Pi} \phi_l(x) : \Phi_j^I = \phi_j(x) \right\}$ ,  $l, j = 1, 2$ .

Таким образом,  $(\Phi_1^I, \Phi_2^{nad})$  и  $(\Phi_1^{nad}, \Phi_2^I)$  задают нижнюю и верхнюю границы значений Парето-оптимальных решений относительно соответствующих критериев, т.е. максимально и минимально возможного процента содержания меди в концентрате и процента ее извлечения. Отметим, что разница между нижней и верхней границами по содержанию меди в концентрате составляет 25.05%, в то время как по извлечению меди из концентрата — 30.26%, т.е. цели в бикритериальной задаче (BP) сильно противоречат друг другу.

Метод построения аппроксимации множества Парето, основанный решении серии вспомогательных d.c. задач алгоритмом глобального поиска, стартует с точки  $(\Phi_1^I, \Phi_2^{nad})$ , что соответствует технологическим условиям, приводящим к максимально возможной концентрации меди. Затем при увеличении значения параметра в задаче  $(P_1(\varepsilon_2))$  ограничение на извлечение меди из концентрата начинает влиять на ее содержание в концентрате (на максимальное значение целевой функции), тем самым определяются новые параметры процесса флотации. И последней точкой, найденной предлагаемым методом, оказывается противоположная точка  $(\Phi_1^{nad}, \Phi_2^I)$ , которая соответствует параметрам процесса, приводящим к максимально возможному извлечению меди из концентрата.

Качество аппроксимации множества точек, оптимальных по Парето, зависит от размера шага, с которым изменяется параметр  $\varepsilon_2$  в задаче  $(P_1(\varepsilon_2))$ , поэтому в вычислительных экспериментах было выбрано два значения шага по  $\varepsilon_2$ : 0.5% (см. рис. 1) и 0.3% (см. рис. 2).

На рис. 1 и 2 ось  $x$  соответствует изменению критерия  $\phi_2(\cdot)$  (процент извлечения меди из концентрата), а ось  $y$  — критерия  $\phi_1(\cdot)$  (процент содержания меди в полученном концентрате).

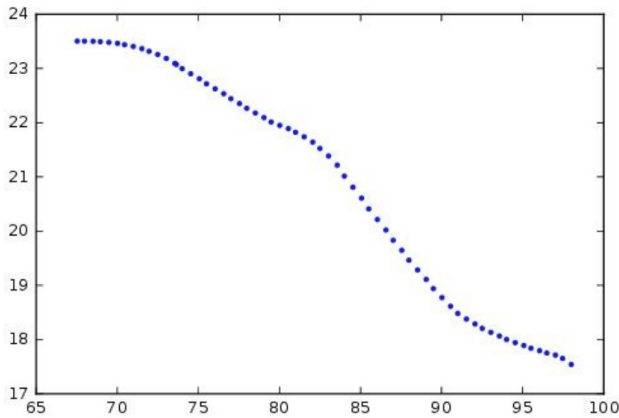


Рис. 1: Аппроксимация множества Парето из 63 точек.

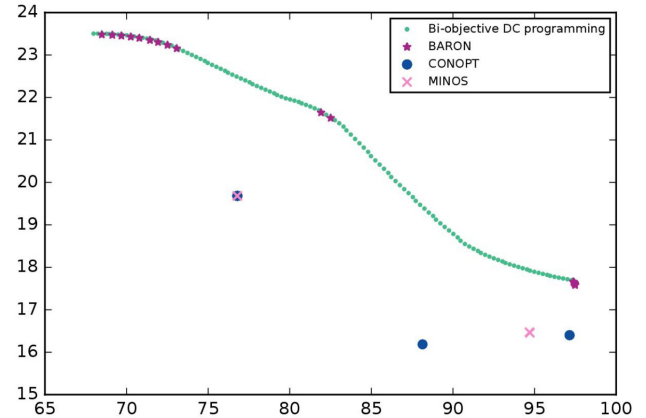


Рис. 2: Аппроксимация множества Парето из 118 точек. Сравнение с решателями BARON, MINOS и CONOPT.

Проведено сравнение эффективности предлагаемого подхода с одним из самых известных методов решения задач многокритериальной оптимизации — методом взвешенных сумм. С этой целью задача (BP) была преобразована в задачу максимизации выпуклой комбинации двух целевых функций  $\phi_1(\cdot)$  и  $\phi_2(\cdot)$ :

$$\alpha \phi_1(x) + (1 - \alpha) \phi_2(x) \uparrow \max, x \in \Pi, \quad (7)$$

где  $\alpha \in (0, 1)$ . Отметим, что задача (7) представляет собой максимизацию невыпуклой квадратичной функции размерности  $n = 7$  на выпуклом множестве простой структуры, которая может быть решена любым подходящим пакетом прикладных программ (для сравнения были выбраны BARON, CONOPT, MINOS). Были рассмотрены два варианта взвешенных сумм с  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$  для пакетов MINOS и CONOPT и  $\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.95\}$  в случае выбора пакета BARON. Результаты сравнения представлены на рис. 2

вместе с приближенными решениями, оптимальными по Парето, найденными разработанным в настоящей статье методом (Bi-objective DC programming).

По рис. 2 можно видеть, что все решения задачи (7), найденные MINOS и CONOPT, доминируются точками, полученными предложенным методом. С другой стороны, для всех весов  $\alpha$  BARON нашел различные приближенные оптимальные по Парето решения, которые, в свою очередь, неравномерно распределены по границе Парето и лежат на выпуклой оболочке Парето-фронта. Интересно также, что метод взвешенных сумм не обнаружил оптимальную по Парето точку, соответствующую  $(\Phi_1^I, \Phi_2^{nad})$  (максимально возможному содержанию меди в концентрате), при этом решение, соответствующее точке  $(\Phi_1^{nad}, \Phi_2^I)$  указанным методом было найдено.

## Заключение

В настоящей работе предпринята первая попытка применения теории и методов d.c. программирования для решения бикритериальной пикладной задачи, направленной на повышение производительности и эффективности процесса флотации. В основе предлагаемого подхода лежат метод главного критерия решения многокритериальных задач, теория глобального поиска для невыпуклых задач с d.c. функциями и метод точного штрафа.

Несмотря на то, что применение подхода описано для бикритериальной невыпуклой квадратичной задачи, его легко можно адаптировать к любым, возникающим на практике, задачам с двумя невыпуклыми (d.c.) целевыми функциями. Например, могут быть рассмотрены задачи, оптимизирующие некоторые показатели экономической эффективности, включающие эффект масштаба.

Применение предложенного подхода продемонстрировано на решении задачи оптимизации реального процесса первичной флотации медно-молибденовых руд на СПГОК «Эрдэнэт» (Монголия). Анализ, проведенный специалистами предприятия, показал, что найденные решения удовлетворяют всем технологическим требованиям и ограничениям производства.

## Список литературы

- [1] Advanced Control and Supervision of Mineral Processing Plants, ser. Advances in Industrial Control. London: Springer-Verlag, 2010.
- [2] Hodouin D., Methods for automatic control, observation, and optimization in mineral processing plants // Journal of Process Control, special Issue on Automation in Mining, Minerals and Metal Processing. 2011. V. 21, iss. 2, P. 211–225.
- [3] Jamett N., Cisternas L. A., Vielma J. P., Solution strategies to the stochastic design of mineral flotation plants // Chemical Engineering Science. 2015. V. 134, P. 850–860.
- [4] Pirouzan D., Yahyaei M., Banisi S. Pareto based optimization of flotation cells configuration using an oriented genetic algorithm // International Journal of Mineral Processing. 2014. V. 126, P. 107–116.
- [5] Barrozo M. A. S., Lobato F. S. Multi-objective optimization of column flotation of an igneous phosphate ore // International Journal of Mineral Processing. 2016. V. 146, P. 82–89.
- [6] Rao R. V. Teaching Learning Based Optimization Algorithm: And Its Engineering Applications. Cham: Springer, 2016.
- [7] Enkhbat R., Gruzdeva T. V., Barkova M. V. D.c. programming approach for solving an applied ore-processing problem // Journal of Industrial and Management Optimization. 2017. to appear.
- [8] Strekalovsky A. S. Global optimality conditions in nonconvex optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. DOI: 10.1007/s10957-016-0998-7.
- [9] Strekalovsky A. S. On solving optimization problems with hidden nonconvex structures. In: Optimization in Science and Engineering. New York: Springer, 2014, P. 465–502.
- [10] Pillo G. D. Exact Penalty Methods. In: Algorithms for Continuous Optimization. Dordrecht: Springer, 1994, P. 209–253.

- [11] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 344 с.
- [12] Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer, 1999.
- [13] Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.
- [14] Груздева Т. В., Стрекаловский А. С. Задачи о клике и невыпуклая оптимизация. Новосибирск: Наука, 2014.
- [15] Стрекаловский А.С. On local search in d.c. optimization problems // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 255, P. 73–83.
- [16] Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. New York: Springer, 2006.
- [17] Груздева Т.В., Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Дружинина О.В. Негладкие задачи минимизации разности двух выпуклых функций // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2011. Т. 12, № 1, С. 384–396.
- [18] Gruzdeva T.V. On a continuous approach for the maximum weighted clique problem // Journal of Global Optimization. 2013. V. 56, P. 971–981.
- [19] Груздева Т.В. Задача сферической бинарной отделимости // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2012. Т. 5, № 3, С. 18–31.
- [20] Стрекаловский А.С., Кузнецова А.А., Яковлева Т.В. О численном решении задач невыпуклой оптимизации // Сибирский журнал вычислительной математики. 2001. Т. 4. № 2. С. 185–199.

*Татьяна Владимировна Груздева — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН;  
e-mail: gruzdeva@icc.ru;*

*Антон Владимирович Ушаков — к.ф.-м.н., мл. науч. сотр. Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН;  
e-mail: aushakov@icc.ru.*

*Дата поступления — 17 мая 2017 г.*