

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ПРЯМОГО ТРЁХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

И. В. Суродина^{1,2}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 519.632.4+550.832.7

В работе рассмотрены параллельные алгоритмы для реализации на графических процессорах прямой трёхмерной задачи магниторазведки.

Традиционно задачи магнитостатики решаются с помощью метода интегральных уравнений, что вполне оправдано для моделей с простыми объектами. Для сложных моделей с произвольной формой исследуемых объектов проще использовать конечно-разностный метод решения.

В работе рассмотрен конечно-разностный алгоритм решения уравнения Пуассона, реализованный на графических процессорах. Используется итерационный метод решения полученных систем линейных уравнений с оригинальным предобуславливателем. Все алгоритмы полностью параллельны. Проведённые первые тесты показывают хорошую точность и быстроту расчётов.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, моделирование, методы Крыловских пространств, предобуславливатель

Введение

Основы для решения прямой задачи магниторазведки изложены в работе [1]. Как известно, магнитное поле описывается двумя основными характеристиками: напряжённостью \vec{H} и индукцией \vec{B} , между которыми в системе СИ существует следующее локальное соотношение:

$$\vec{B}(a) = \mu_0[\vec{H}(a) + \vec{I}(a)], \quad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, \vec{I} — намагниченность в рассматриваемой точке a . Из (1) следует, что всюду, куда может быть помещён датчик магнитометра (в немагнитной среде), справедливо уравнение $\vec{B}(a) = \mu_0\vec{H}(a)$. Намагниченность вещества сложным образом зависит от его магнитных свойств и намагничивающего поля, что характеризуется петлёй гистерезиса. Магниторазведка изучает слабые магнитные поля — нормальное поле примерно 50 мкТл. Поэтому в магниторазведке применяют упрощённую модель намагничивания: считают горные породы и руды "идеальным ферромагнетиком". Это даёт возможность связать намагниченность с магнитными свойствами

$$\vec{I} = \kappa\vec{H} + \vec{I}_n. \quad (2)$$

Здесь κ — безразмерная магнитная восприимчивость, \vec{I}_n — вектор естественной остаточной намагниченности. Подстановка (2) в (1) даёт в любой точке пространства

$$\vec{B} = \mu_0[(1 + \kappa)\vec{H} + \vec{I}_n] \quad (3)$$

Принято считать величину $(1 + \kappa) = \mu$ относительной магнитной проницаемостью вещества. В этих обозначениях получим

$$\vec{B} = \mu_0[(\mu\vec{H} + \vec{I}_n)] \quad (4)$$

Как известно из теории физических полей, векторы \vec{B} и \vec{H} удовлетворяют дифференциальным уравнениям, являющимся частным случаем уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(a) = 0; \operatorname{div} \vec{B}(a) = 0. \quad (5)$$

Как установлено в курсе теории поля, из этих уравнений следует, что на границах тел непрерывны тангенциальная компонента напряжённости и нормальная компонента индукции магнитного поля. Нормальная компонента напряжённости на границе тела испытывает разрыв, равный нормальной компоненте намагниченности в данной точке. Эти соотношения являются исходными при решении прямой задачи магниторазведки.

Из первого уравнения (5) следует возможность введения скалярного магнитного потенциала

$$\vec{H}(a) = -\operatorname{grad} U(a). \quad (6)$$

Подстановка (4) во второе уравнение (5) с учетом соотношения (6) даёт следующее дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} U) = \operatorname{div} \vec{I}_n. \quad (7)$$

На границах тел потенциал удовлетворяет двум граничным условиям. Первое условие непрерывности потенциала на границе следует из непрерывности тангенциальной компоненты напряжённости. Имеем $U_i = U_e$, где U_i — потенциал внутри тела, а U_e — потенциал вне тела. Но потенциалы, как и поля, складываются из потенциалов первичного и вторичного полей: $U = U^{\text{prim}} + U^{\text{sec}}$. Поэтому считаем, что на границе непрерывен вторичный потенциал и граничное условие принимает вид

$$U_i^{\text{prim}} = U_e^{\text{sec}}. \quad (8)$$

Второе граничное условие вытекает из непрерывности нормальных компонент вектора индукции и в соответствии с этим имеет вид:

$$\frac{\partial U^{\text{prim}}}{\partial n} + \frac{\partial U_e^{\text{sec}}}{\partial n} = \mu \left(\frac{\partial U^{\text{prim}}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{\text{sec}}}{\partial n} \right) \quad (9)$$

Традиционно прямая задача магниторазведки сводится к нахождению внешних и внутренних потенциалов для любого объекта. Эти потенциалы удовлетворяют уравнению (7) и граничным условиям (8) и (9)

Если остаточная намагниченность равна нулю, то имеем следующее уравнение

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\operatorname{div} \vec{I}, \quad (10)$$

где

$$\vec{I} = \frac{\kappa B_e}{\mu_0(1 + \kappa N)}, \quad (11)$$

N — коэффициент размагничивания, связанный с формой объектов. Если форма объектов очень сложна, найти N затруднительно, но известно некоторое распределение κ в пространстве, то упрощенно считаем $\vec{I} = \kappa \vec{H}$.

Наша задача состояла в создании быстрой программы, работающей с любыми объектами, которые могут иметь очень сложные формы. Поэтому был выбран конечно-разностный способ решения.

1 Постановка прямой задачи магнитостатики

Исходя из вышеизложенного, стартовым будем считать уравнение (7) или (10). Будем рассматривать область, которая целиком включает моделируемые объекты. Более того, границы области должны быть достаточно удалены, чтобы влияние рассматриваемых объектов на границе было ничтожным. Таким образом, имеем задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Далее используем уже накопленный опыт решения такого сорта задач [3], [7]. Дискретизация уравнения (7) или (10) конечно-разностным методом на неравномерной сетке с использованием однородной консервативной схемы [4], [5] и последующая его симметризация [6] приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$Ax = F, \quad (12)$$

где A действительная, симметричная, сильно разреженная, положительно определенная матрица со слабым диагональным преобладанием. В отличие от работ [3], [7], где задача решалась для аномального электрического потенциала, в данной постановке ищем решение в виде полного магнитного потенциала. Правая часть уравнений (7) или (10) представляет собой дивергенцию либо остаточной намагниченности, либо полной намагниченности. Поэтому следует обращать особое внимание на построение сетки, которая должна адекватно описывать границы рассматриваемых объектов.

2 Метод решения

Для решения систем линейных уравнений (12) был выбран итерационный метод сопряжённых градиентов (CG), поскольку в данном случае мы имеем разреженные, симметричные матрицы больших размеров. Все операции в формулах для метода CG являются матрично-векторными и хорошо распараллеливаются на GPU. Но без эффективного предобуславливателя скорость сходимости данного метода будет очень низкой. Такая реализация метода на GPU зачастую будет проигрывать по времени алгоритму с предобуславливателем на центральном процессоре. Специально для данного типа матриц был предложен алгоритм построения целого класса предобуславливателей [2], требующий минимальных временных ресурсов и ресурсов глобальной памяти на GPU. Как показано в работе [7] на примере решения двумерных и трёхмерных задач бокового каротажного зондирования, предобуславливатель, построенный нами на основе алгоритма Хотеллинга–Шульца имеет многие преимущества перед предобуславливателем, содержащемся в стандартной библиотеке CUSPARSE CUDA NVIDIA.

Во-первых, предобуславливатель, использующий только первый шаг алгоритма Хотеллинга не требует вообще никаких затрат на построение (при предварительном масштабировании системы уравнений).

Во-вторых, все операции в PCG (в том числе для предобуславливателей, использующих несколько шагов метода Хотеллинга) остаются матрично-векторными.

В-третьих, и это немаловажно, данный алгоритм очень прост в реализации на GPU.

3 Тестирование

Для тестирования использовались следующие модели.

1. **Модель 1** (представлена Василевским А.Н) Рассмотрим шар, имеющий радиус $R = 1000$ м, находящийся в центре некоторой области. Необходимо рассчитать компоненты магнитного поля H_x, H_y, H_z на высоте 50 метров над шаром. Были рассмотрены 2 варианта.

а. $I_x = I_y = 0; I_z = 1$ СИ.

б. $I_x = I_y = I_z = 0.5774$ СИ.

Для этой простой модели известны аналитические решения, с которыми и было проведено сравнение полученных решений. На рисунке 1 приведены компоненты H_x, H_y, H_z , рассчитанные по трёхмерной программе и точные (аналитически) вычисленные для модели 1а. Для наглядности значения выданы при $z = 50$ в плоскости (X, Y) при $x = 0$ и $x = y$. Из рисунка видно, что в целом рассчитанные и аналитические значения довольно близки. Графики рассчитанных компонент H_x, H_y практически совпадают с графиками аналитическими. Немного хуже вычислена компонента H_z . Задача так подобрать сетку, чтобы получить наиболее близкое к точному решению не ставилась. Важно было, чтобы алгоритм работал в целом правильно.

На рисунке 2 приведены компоненты H_x, H_y, H_z , рассчитанные по трёхмерной программе и аналитически вычисленные для модели 1б. Графики компонент H_x, H_y , рассчитанных аналитически и по 3-хмерной программе совпадают, и H_z имеет гораздо меньшую погрешность, чем в модели 1а.

2. **Модель 2** (Представлена Савлуком А.В). На некоторой (неизвестной) глубине находится бесконечный цилиндр радиуса 25 метров, расположенный вертикально (ось цилиндра совпадает с осью Z). Магнитная восприимчивость цилиндра составляет от 400–800 единиц. На расстоянии 625 метров слева от цилиндра располагается сторонний объект, имеющий форму параллелепипеда размерами 50 метров по оси X , 300 метров по оси Y и бесконечного по оси Z . Магнитная восприимчивость этого стороннего объекта составляет 700–1500 единиц. Внешнее магнитное поле Земли: $H_z = 57375$ нТл, $H_y = 1/6 H_z$, $H_x = 0$. Требуется рассчитать модуль поля H на высоте 2 м, 30 метров и 100 метров (в соответствии с данными наземной съёмки, проведённой человеком с магнитометром; данными, полученными летающим беспилотником и самолётом, рис. 3). Вычисленные значения сравнивались с реальными данными. В этом тесте важно было показать решение на

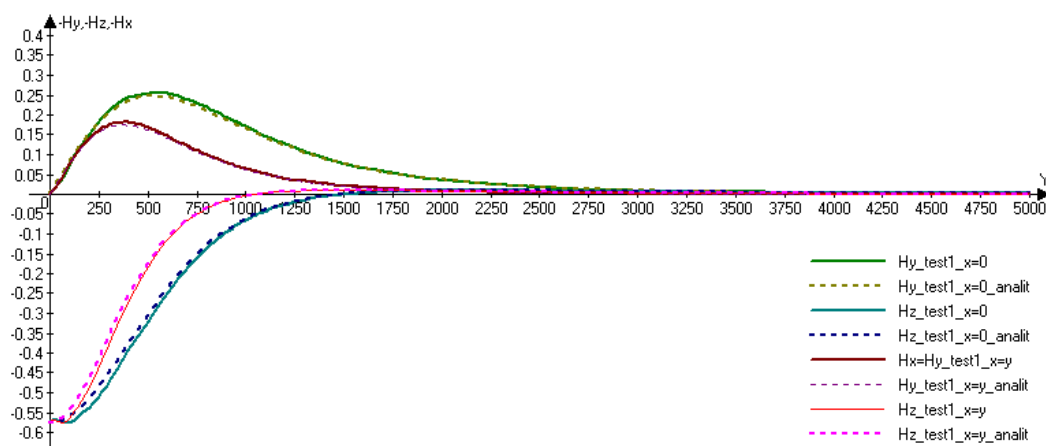


Рис. 1: Модель 1a

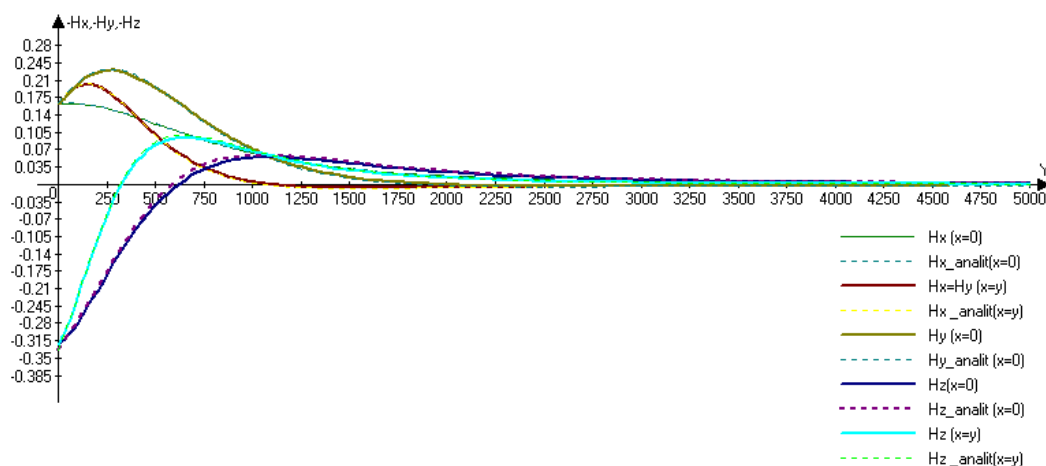


Рис. 2: Модель 1b

качественном уровне, так как конкретных значений измерений предоставлено не было. Были рассчитаны модели, имеющие различные положения цилиндра ($\kappa = 400$) и объекта ($\kappa = 700$) по глубине. Вначале варьировалось положение цилиндра по глубине: 10, 15 и 20 метров, сторонний объект располагался на глубине 10 м. Результаты расчётов на высоте 2, 30 и 100 метров приведены на рисунке 4. После анализа результатов расчётов и сравнения их с реальными данными (графиками) было установлено, что наиболее вероятная глубина залегания цилиндра составляет 15 метров. Далее варьировалась глубина залегания стороннего объекта. Результаты расчётов приведены на рисунке 5.

Численно установлено, что наиболее вероятная глубина залегания стороннего объекта составляет более 100 метров, если его магнитная восприимчивость $\kappa = 700$. На основании вышеизложенного, можно утверждать, что на качественном уровне трёхмерная программа расчётов прошла проверку и для этой модели.

Заключение

Создана программа расчёта компонент магнитного поля для задач магнитостатики. Реализованные алгоритмы полностью параллельны. Для оперативного решения прямой задачи может быть использован ноутбук с вычислительной или игровой картой нового поколения компании NVIDIA. Данная программа будет особенно полезна в тех случаях, когда реальные моделируемые объекты имеют сложную форму, структуру и плохо описываются набором простейших фигур.

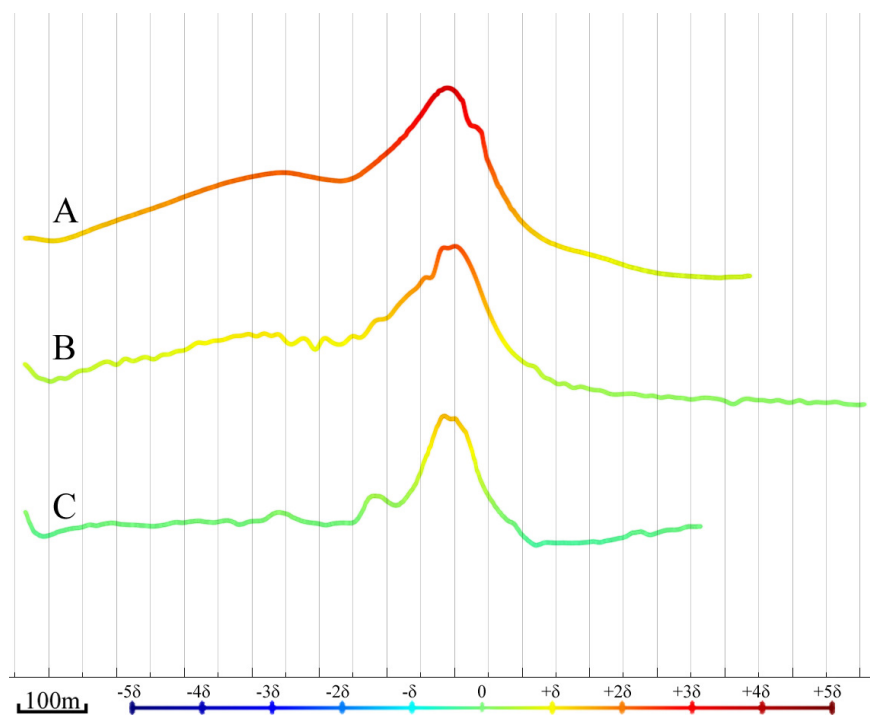


Рис. 3: Реальные данные, измеренные на высоте 2м (А), 30м (В), 100 метров (С)

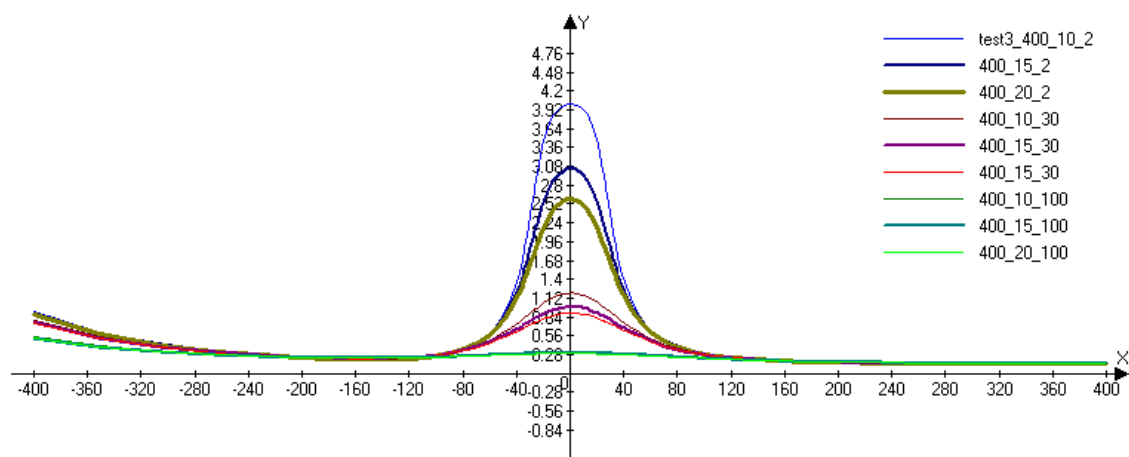


Рис. 4: Расчётные данные, полученные при моделировании цилиндра ($\kappa = 400$), залегающего на глубинах 10, 15 и 20 метров

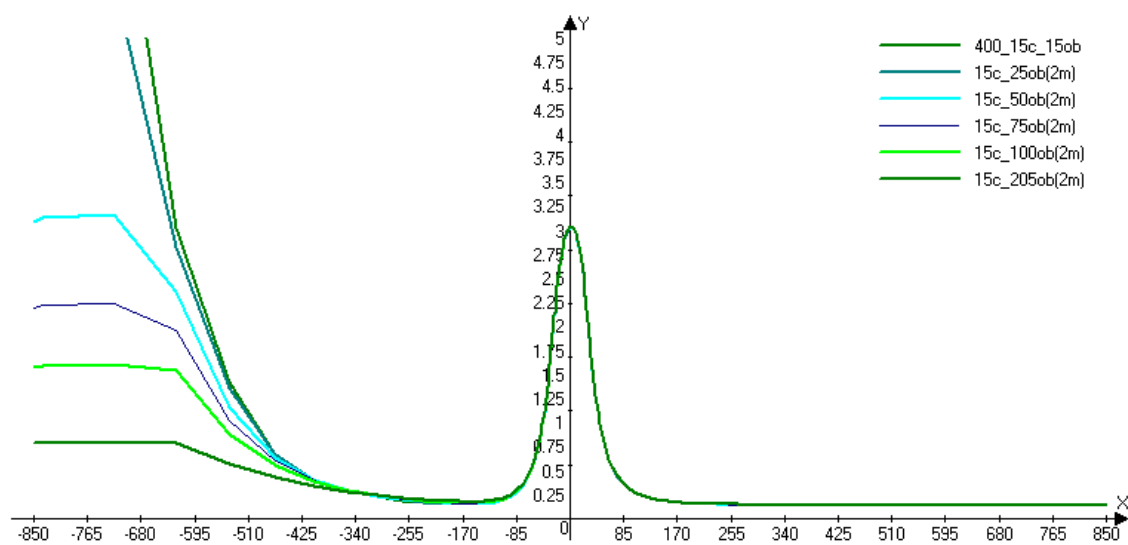


Рис. 5: Расчётные данные на высоте 2 метра, полученные при моделировании цилиндра ($\kappa = 400$), залегающего на глубинах 15 метров и вариации глубины стороннего объекта ($\kappa = 700$)

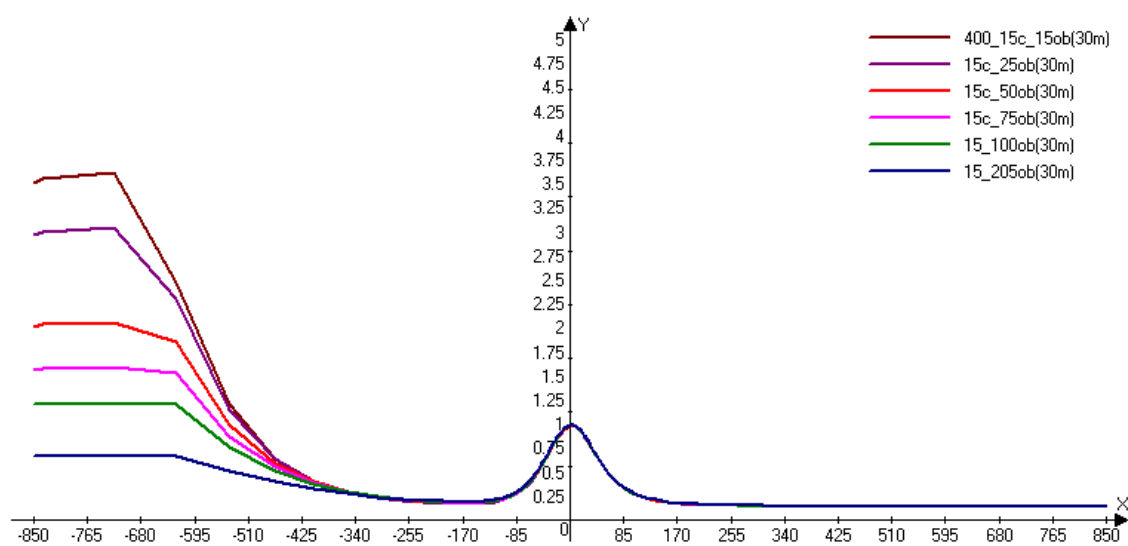


Рис. 6: Расчётные данные на высоте 30 метров, полученные при моделировании цилиндра ($\kappa = 400$), залегающего на глубинах 15 метров и вариации глубины стороннего объекта ($\kappa = 700$)

Список литературы

- [1] Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.
- [2] Labutin I.B., Surodina I.V. Algorithm for Sparse Approximate Inverse Preconditioners in Conjugate Gradient Method // Reliable Computing (Interval Computations) Journal [http://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/tables-of-contents.#Volume 19](http://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/tables-of-contents.#Volume%2019)
- [3] Дашевский Ю.А., Суродина И.В., Эпов М.И. Трёхмерное математическое моделирование системы мониторинга электрических свойств скважинного флюида // Международная конференция "Математические методы в геофизике" Новосибирск, 2003. — Ч.1, С. 268–272.
- [4] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1979, 655с
- [5] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений, М.: Наука, 1978, 592с.
- [6] Кузнецов Ю.И., Агапитова Н.С. Математические основы моделирования на ЭВМ.— Ю.—Сахалинск: Из-во ЮСИЭПИ, 2003, 214с.
- [7] Суродина И.В. Параллельные алгоритмы для решения прямых задач электрического каротажа на графических процессорах // Мат. заметки СВФУ, Том 22, № 2 (86) Апрель–июнь, 2015. С. 51–61

*Ирина Владимировна Суродина — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: sur@ommfao1.sscs.ru.*

Дата поступления — 29 мая 2017 г.