

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОСТИ РАЗНОТИПНЫХ БЛОКОВ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ

М. В. Зарецкая

*Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар*

УДК 539.422.3

В данной работе предложен метод исследования техногенной напряженности коры Земли. В общем случае сейсмические процессы в коре Земли должны описываться связанными динамическими задачами, в которых учитываются наличие и взаимодействие в деформируемых средах полей различной природы. Для упрощения постановки задачи, не теряя при этом точности, предлагается рассматривать кору Земли как блочную структуру и применять развитые теории блочных структур и метод блочного элемента. Для исследования процессов в отдельных объектах могут применяться блоки со сферической границей (резервуары подземных вод, месторождения углеводородов). Они включаются в общую структуру среды, моделируемой, например, пространством, полупространством, слоем, прямоугольными параллелепипедами. Для исследования процессов, протекающих в блочно-структурированной среде, блоки которой формируются сферическими границами, развит и применяется топологический математический аппарат. Его применением реализуется автоморфизм топологического объекта на себя, при этом оператор краевой задачи получает отображение в изоморфное пространство преобразования Фурье–Бесселя медленно растущих обобщенных функций. Дальнейшие преобразования этого оператора приводят вначале к функциональным, а затем к псевдодифференциальным уравнениям. Последние, в зависимости от граничных условий, могут быть системами интегральных или интегро-дифференциальных уравнений, при решении которых определяются напряжения и деформации в отдельных блоках.

**Ключевые слова:** геомеханика, напряженно-деформированное состояние, разнотипные включения, сферическая неоднородность, топологический метод.

## Введение

Среди реальных причин возникновения землетрясений, как результата разрядки локальных очагов напряжения, особое место занимает воздействие производственной деятельности человека на геодинамические процессы в геосферах Земли. В отличие от иных, естественных, причин физического и механического характера хозяйственная деятельность человека является регулируемой и управляемой, что позволяет снизить сейсмогенное воздействие и минимизировать уровень наведенной сейсмичности. Этому может способствовать также создание и развитие системы превентивных мер для снижения риска возникновения техногенного землетрясения, позволяющая до начала производственного процесса выполнить перспективный анализ техногенных напряжений в земной коре и оценить возможность возникновения сейсмического события.

Зоной риска для активизации сейсмических процессов и возникновения техногенных землетрясений являются области интенсивной нефте- и газодобычи. Если работы ведутся в районах с высокой естественной напряженностью коры, то даже слабое воздействие может привести к сильной наведенной сейсмичности. Зная естественную напряженность коры до техногенного воздействия, можно, применяя методы геомеханики, механики деформируемого твердого тела или механики сплошных сред, установить изменения поля напряженности на различных этапах выработки, оценить закономерности изменения сейсмичности во времени, дать прогнозные оценки. Аналогичные проблемы возникают в задачах геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии, изучающей условия строительства различных сооружений.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-08-00191\_а), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (код проекта 16-41-230154).

## 1 Модель

Для корректного решения проблемы оценки наведенной сейсмичности необходимо рассматривать модель геологической среды, максимально приближенной к естественной, и модели механики деформируемого твердого тела, адекватно описывающие напряженно-деформированное состояние сред различной реологии [1]. В общем случае сейсмические процессы в коре Земли должны описываться связанными динамическими задачами, в которых учитываются наличие и взаимодействие в деформируемых средах полей различной природы. Для упрощения, но не теряя при этом точности, предлагается принять для исследования модель блочной структуры среды литосферных плит, которая формируется в горных породах совокупностью трещин и иных неоднородностей. Для исследования процессов, протекающих в блочно-структурированной среде, блоки которой формируются материалами различной реологии, применяется топологический математический аппарат, включающий в себя теорию блочных структур, дифференциальный метод факторизации, интегральный метод факторизации, метод блочного элемента, специально адаптированные для поставленного класса задач [2, 3]. Они опираются на современные, редко применяемые в механике математические методы, в частности, внешний анализ, теорию функций многих комплексных переменных, формы-вычеты Лере, факторизацию матриц-функций нескольких комплексных переменных, методы интегральной геометрии, теории представления групп [4]. Каждый элемент блочной структуры рассматривается как топологический объект. Применением дифференциального метода факторизации реализуется автоморфизм топологического объекта на себя, при этом оператор краевой задачи получает отображение в изоморфное пространство преобразования Фурье медленно растущих обобщенных функций. Дальнейшие преобразования этого оператора приводят вначале к функциональным, а затем — к псевдодифференциальным уравнениям. Последние, в зависимости от граничных условий, могут быть как системами интегральных уравнений традиционных контактных задач, так и интегро-дифференциальными уравнениями.

## 2 Метод исследования

Для исследования наведенной сейсмичности земной коры особый интерес представляет оценка напряжений и деформаций, возникающих на границе пласта пород коры и резервуара воды или углеводородного сырья до и после выработки. Рассматривая указанную систему как блочную структуру, наиболее целесообразным представляется введение для моделирования резервуара шаровой блочный элемент. Так как теория блочных структур и метод блочного элемента имеют топологическую основу, то можно рассмотреть два типа блочных элементов в сферических координатах — шаровая область и вырезанная шаровая область. Согласование с соседними блоками, где постановки задач осуществляются в декартовых координатах, регулируется картой.

Рассматривается задача построения блочных элементов для граничной задачи в шаровой области  $\Omega_1$  радиуса  $b$  и в пространстве с вырезанной шаровой областью  $\Omega_2$  радиуса  $a$  с границами  $\partial\Omega_s$ ,  $s = 1, 2$ .

Решения поставленных граничных задач ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций  $H_s$ .

Введем преобразования и обращение Фурье–Бесселя в сферических функциях.

$$\mathbf{B}_2(l, m) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\theta, \phi) Y_l^{m-}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = G(l, m),$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}(\theta, \phi)G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l G(l, m) Y_l^{m+}(\theta, \phi) = g(\theta, \phi),$$

$$\mathbf{B}_3(\lambda, l, m)g = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(r, \theta, \phi) J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_l^{m-}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi r dr = G(\lambda, l, m),$$

$$\mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \phi)G = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^\infty G(\lambda, l, m) J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_l^{m+}(\theta, \phi) \lambda d\lambda = g(r, \theta, \phi).$$

Здесь  $J_\nu(\lambda r)$  — функция Бесселя,  $Y_l^m(\theta, \psi)$  — сферическая функция:

$$Y_l^{\pm}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{\pm im\phi}.$$

Чтобы получить псевдодифференциальное уравнение и обеспечить автоморфизм, представление решения граничной задачи строится в виде:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \phi) \frac{L_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2 - k_1^2)}.$$

Требование автоморфизма обеспечивается, если [5]

$$\psi(r, \theta, \phi) = 0, \quad r > b.$$

В результате преобразований для шаровой области получено псевдодифференциальное уравнение

$$L_{lm}(k_1) = 0,$$

исследуя которое с учетом граничных условий, можно получить для шаровой области решение вида:

$$\psi_{lm}(b) = \frac{\psi'_{lm1}(b)T_{lm}(k_1, b)}{T'_{lm}(k_1, b)}.$$

Для пространства с шаровой полостью радиуса  $a$  общее представление решения записывается в виде:

$$w(r, \theta, \phi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \phi) \frac{N_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2 - k_2^2)}.$$

Требование автоморфизма многообразия с краем — пространства с удаленным шаром, выполняется, если

$$w(r, \theta, \phi) = 0, \quad r < a.$$

Данное требование позволяет получить псевдодифференциальное уравнение

$$w'_{lm}(a)P_{lm}(\lambda, a) - w_{lm}(a)P'_{lm}(\lambda, a) = 0,$$

решение которого может иметь вид

$$w'_{lm}(a) = \frac{w_{lm0}(a)P'_{lm}(k_2, a)}{P_{lm}(k_2, a)} \quad \text{или} \quad w_{lm}(a) = \frac{w'_{lm0}(a)P_{lm}(k_2, a)}{P'_{lm}(k_2, a)}$$

в зависимости от заданных граничных условий.

Особенности получения систем псевдодифференциальных уравнений и обозначения представлены, например, в работе [5].

## Заключение

В результате применения топологических методов получены псевдодифференциальные уравнения и интегральные представления решений граничных задач, сформулированных в сферической системе координат.

Применение разработанных методов способствует созданию основ новых наукоемких перспективных технологий мониторинга и прогноза наведенной сейсмической активности до начала производственного процесса.

## Список литературы

- [1] Зарецкая М.В. Математические методы исследования неустойчивых геологических структур // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2013. № 7. С. 33–38.
- [2] Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Pavlova A.V. The differential factorization method for a block structure // Doklady Physics. 2009. T. 54. № 1. С. 25–28.
- [3] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Федоренко А.Г. О дифференциальном методе факторизации в приложениях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 2. С. 5–12.

- [4] Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Горшкова Е.М., Зарецкая М.В., Мухин А.С., Павлова А.В. О конвергентных свойствах блочных элементов // Доклады академии наук. 2015. Т. 465. № 3. С. 298–301.
- [5] Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The theory of the starting earthquake // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. Т. 2. С. 37–80.

*Зарецкая Марина Валерьевна — д.ф.-м.н., профессор кафедры математического моделирования  
Кубанского государственного университета; Краснодар, 350040;  
e-mail: zarstv@mail.ru.*

*Дата поступления — 15 мая 2017 г.*