

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ ВИБРАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

И. С. Телятников

Южный научный центр Российской академии наук, 344006, Ростов-на-Дону

УДК 539.3

Работа посвящена исследованию взаимодействия двумерных пластин на деформируемом трехмерном основании, моделирующих литосферные плиты, контактирующие вдоль прямолинейного разлома. Задачи о вибрационных и статических воздействиях на упругую среду с составным покрытием сводятся к решению систем нагруженных уравнений Винера–Хопфа для Фурье-образов амплитуд контактных напряжений между подложкой и покрытием. Разработанный метод позволяет определить основные характеристики напряженно-деформированного состояния рассматриваемой блочной структуры при различных условиях контакта пластин на разломе.

Ключевые слова: разлом, составное покрытие, деформируемое основание, факторизационные методы.

Введение

Разработка новых методов прогноза региональной сейсмичности требует изучения медленной подготовки сейсмического события, проявляющейся в изменении напряженно-деформированного состояния геологических структур. Работа посвящена исследованию взаимодействия двумерных пластин на деформируемом трехмерном основании, моделирующих литосферные плиты, контактирующие вдоль прямолинейного разлома.

Рассматривается краевая задача для разноразмерной блочной структуры — пластины с осредненными по толщине свойствами на трехмерной деформируемой подложке. Предположим, что пластина состоит из отдельных фрагментов, контактирующих между собой и возможно содержащих дефекты типа трещин. Подобная структура, включающая горизонтально ориентированные блоки — пластины Кирхгофа с разломами произвольной геометрии на упругом основании, может служить моделью литосферной плиты.

1 Модель

В работе исследована задача об установившихся с частотой ω колебаниях составного покрытия, а также задача статического взаимодействия двух полуограниченных пластин на поверхности упругой среды под действием поверхностной нагрузки вида $\mathbf{t}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$, заданной в некоторой ограниченной области $(x_1, x_2) \in \Omega$, а также задача статического взаимодействия пластин.

Координатная плоскость $x_1 O x_2$ связана со срединной поверхностью покрытия, в качестве которого рассматриваются две протяженные деформируемые пластины, граничащие вдоль оси Ox_2 , с усредненными по толщине параметрами. Контакт между покрытием и подложкой считается идеальным.

В принятой модели покрытия дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие движение пластин [1], заданы в соответствующих полуплоскостях

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad (1)$$

где $-\infty < x_2 < +\infty$, $\Omega_1 = \{x_1 : x_1 > 0\}$, $\Omega_2 = \{x_1 : x_1 < 0\}$.

Здесь и далее использованы следующие обозначения: $\mathbf{u}_j = \{u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}\}$ ($j = 1, 2$) — вектор амплитуд смещений j -й пластины, $u_{j,1}(x_1, x_2)$, $u_{j,2}(x_1, x_2)$ — смещения по координатам плоскости $x_1 O x_2$, $u_{j,3}(x_1, x_2)$ — прогиб срединной поверхности. $\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ — матричные дифференциальные операторы с компонентами:

$$R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j4}, \quad R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j4}, \quad R_{33}^j = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0;$$

$$\varepsilon_{j1} = 0,5(1 - \nu_j), \quad \varepsilon_{j2} = 0,5(1 + \nu_j), \quad \varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12}, \quad \varepsilon_{j4} = \frac{\omega^2 \rho_j (1 - \nu_j^2)}{E_j}, \quad \varepsilon_{j5} = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j h_j};$$

$$\mathbf{b}_j = -\varepsilon_{j5} \mathbf{t}_j, \quad \mathbf{t}_j = \{t_{j1}, t_{j2}, t_{j3}\};$$

$\mathbf{E}_j = \left\| e_{ik}^j \right\|_{i,k=1}^3$ — диагональные матрицы, $e_{ik}^j = 0$, $i \neq k$, $e_{11}^j = e_{22}^j = -e_{33}^j = -\varepsilon_{j5}$; \mathbf{t}_j — вектор внешней поверхностной нагрузки, $\mathbf{g}_j = \{g_{j1}, g_{j2}, g_{j3}\}$ — вектор действующих со стороны подложки напряжений; ν_j , E_j , ρ_j — соответственно коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность j -й пластины. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен

Статическому случаю взаимодействия покрытия и подложки соответствуют уравнения

$$\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad (2)$$

где

$$R_{11}^{0,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad R_{22}^{0,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad R_{33}^{0,j} = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right), \quad R_{kl}^{0,j} = R_{kl}^j \quad (k \neq l).$$

В качестве упругой подложки может быть выбран слой, пакет слоев, полупространство (однородное или слоистое) и т.д. Для деформируемого основания могут быть построены интегральные соотношения, связывающие амплитуды перемещений и напряжений между подложкой и покрытием ($x_3 = 0$)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (3)$$

где $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ — матрица Грина упругого слоя, $\mathbf{G} = V_2 \mathbf{g}$, V_2 — двумерный оператор преобразования Фурье. Форма контуров σ_1 , σ_2 для случая установившихся колебаний определяется принципом предельного поглощения [2], для статической задачи они совпадают с вещественной осью. Матрицы Грина статических и динамических задач приведены в [2, 3, и др.].

В области соприкосновения составляющих покрытия ($x_1 = 0$) при $-\infty < x_2 < +\infty$ формулируются граничные условия, общий вид которых задается соотношением

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2). \quad (4)$$

Характер взаимодействия пластин в области их контакта определяет вид дифференциальных операторов $\mathbf{L}_k(\partial x_1, \partial x_2)$ ($k = 1, 2$) и функции $\mathbf{f}(x_2)$. С учетом гипотезы прямых нормалей для каждой точки на стыковки $x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < +\infty$ требуется выполнение четырех граничных условий [1], поэтому в общем виде \mathbf{L}_k можно представить как матричные операторы. Условие идеального контакта пластин и подложки определяется равенствами $\mathbf{u}_j(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2)$, $\mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2)$ при $x_1 \in \Omega_j$, $x_2 \in R$ ($j = 1, 2$).

2 Метод

Несмотря на универсальность топологического метода блочного элемента [4], для случая прямолинейных и плоских границ, когда краевые задачи для двух полуограниченных пластин на трехмерном основании рассматриваются в качестве моделей разноразмерной блочной структуры под действием локализованной поверхностной нагрузки (гармонической или стационарной), можно использовать упрощенный метод. В отличие от приведенного в [5], далее на примере скалярного случая вертикальных воздействий использован подход, не требующий преобразования дифференциального оператора системы.

Воспользовавшись в (1) преобразованием Фурье по переменной x_2 , получим

$$R_{33}^j (\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_{j3} (x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} \bar{g}_{j3} (x_1, \alpha_2) = \bar{b}_{j3} (x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad (5)$$

где черта соответствует образам Фурье по переменной x_2 описанных ранее функций.

Аналогично для (2) будем иметь

$$R_{33}^{0,j} (\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_{j3} (x_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} \bar{g}_{j3} (x_1, \alpha_2) = \bar{b}_{j3} (x_1, \alpha_2), \quad x_1 \in \Omega_j.$$

Решения (5), ограниченные в соответствующих полуплоскостях и удовлетворяющие условию принципа предельного поглощения, примут вид

$$\bar{u}_{j3} (x_1, \alpha_2) = C_{j1} e^{\mp q_{j1} x_1} + C_{j2} e^{\pm i q_{j2} x_1} + V^{-1} (x_1) \left[\left(R_{33}^j (\alpha_1, \alpha_2) \right)^{-1} (\varepsilon_{j5} G_{j3} (\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3} (\alpha_1, \alpha_2)) \right], \quad (6)$$

$$\pm x_1 > 0,$$

где V^{-1} — оператор обращения Фурье, C_{jk} — произвольные коэффициенты; q_{j1} , $i q_{j2}$ — корни уравнений $\varepsilon_{j3} (\xi^2 - \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{j4} = 0$, $\text{Re } q_{jk} > 0$ ($j, k = 1, 2$).

Для статического случая ограниченные в соответствующих полуплоскостях решения (5) примут представление

$$\bar{u}_{j3}^0 (x_1, \alpha_2) = (C_{j1} + C_{j2} x_1) e^{\mp \lambda x_1} + V^{-1} (x_1) \left[\left(R_{33}^{0,j} (-i\alpha_1, -i\alpha_2) \right)^{-1} (\varepsilon_{j5} G_{j3} (\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3} (\alpha_1, \alpha_2)) \right], \quad (7)$$

$$\pm x_1 > 0, \quad \lambda = |\alpha_2|.$$

Верхний знак в этажных символах « \pm », « \mp » формул (6), (7) и далее соответствует значению $j = 1$, нижний — $j = 2$.

Применяя к полученным выражениям для трансформант амплитуд вертикальных смещений (6), (7) преобразование Фурье по соответствующим полупрямым, получим

$$U_{j3} (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon_{j5} G_{j3} (\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3} (\alpha_1, \alpha_2)}{R_{33}^j} + Q_j (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$Q_j (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pm i C_{j1}}{\alpha_1 \pm i q_{j1}} + \frac{\pm i C_{j2}}{\alpha_1 \pm q_{j2}} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2 (q_{j1}^2 + q_{j2}^2) \varepsilon_{j3}} \left[\frac{\varepsilon_{j5} G_{j3} (\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2} (\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{i \varepsilon_{j5} G_{j3} (\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1} (\alpha_1 \mp i q_{j1})} + \frac{B_{j3} (\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2} (\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{i B_{j3} (\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1} (\alpha_1 \mp i q_{j1})} \right].$$

Для статического случая

$$U_{j3}^0 (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon_{j5} G_{j3} (\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3} (\alpha_1, \alpha_2)}{R_{33}^{0,j}} + Q_j^0 (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$Q_j^0 (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\pm i C_{j1}}{\alpha_1 \pm i \lambda} - \frac{\pm C_{j2}}{(\alpha_1 \pm i \lambda)^2} +$$

$$+ \frac{1}{4 \lambda^2 \varepsilon_{j3}} \left[\frac{\varepsilon_{j5} G'_{j\alpha_1} (\pm i \lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i \lambda)} \pm \frac{i \varepsilon_{j5} G_j (\pm i \lambda, \alpha_2) (\alpha_1 \mp i 2 \lambda)}{\lambda (\alpha_1 \mp i \lambda)^2} + \frac{B'_{j\alpha_1} (\pm i \lambda, \alpha_2)}{(\alpha_1 \mp i \lambda)} \pm \frac{i B_j (\pm i \lambda, \alpha_2) (\alpha_1 \mp i 2 \lambda)}{\lambda (\alpha_1 \mp i \lambda)^2} \right],$$

где

$$\Psi'_{j\alpha_1} (\pm i \lambda, \alpha_2) = \left. \frac{d \Psi_j (\alpha_1, \alpha_2)}{d \alpha_1} \right|_{\alpha_1 = \pm i \lambda} \quad (\Psi = G_{3j}, B_{3j}).$$

Условия сопряжения пластин с подложкой в преобразованиях Фурье принимают следующий вид:

$$U_3 (\alpha_1, \alpha_2) = U_{13} (\alpha_1, \alpha_2) + U_{23} (\alpha_1, \alpha_2), \quad G_3 (\alpha_1, \alpha_2) = G_{13} (\alpha_1, \alpha_2) + G_{23} (\alpha_1, \alpha_2).$$

Из уравнения (3), соотношений для трансформант Фурье амплитуд напряжений и условий сопряжения пластин и подложки после ряда преобразований приходим к уравнению

$$K_1(\alpha_1, \alpha_2) G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_2(\alpha_1, \alpha_2) G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) + F(\alpha_1, \alpha_2), \quad (8)$$

где $G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = G_{13}(\alpha_1, \alpha_2)$, $G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) = G_{23}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Для случая установившихся колебаний в (8)

$$K_j(\alpha_1, \alpha_2) = \pm \left(K_{33}(\alpha_1, \alpha_2) - \varepsilon_{j5} \left(R_{33}^j \right)^{-1} \right), \quad (9)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 \left[B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) \left(R_{33}^j \right)^{-1} + Q_j(\alpha_1, \alpha_2) \right]. \quad (10)$$

Для статического случая в соотношениях (9), (10) K_{33} соответствует элементу матрицы Грина статической задачи, R_{33}^j , Q_j заменятся соответственно на $R_{33}^{0,j}$ и Q_j^0 .

Таким образом, задачи сводятся к решению систем нагруженных уравнений Винера – Хопфа для Фурье-образов амплитуд контактных напряжений между подложкой и покрытием в связи с наличием неизвестных $G_{j3}(\pm q_{j2})$, $G_{j3}(\pm i q_{j1})$ (для установившегося режима колебаний), $G_{j3}(\pm i \lambda, \alpha_2)$, $G'_{j3\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2)$, нуждающихся в дополнительном определении.

Факторизовав $K(\alpha_1, \alpha_2) = K_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) K_2(\alpha_1, \alpha_2)$ в виде произведения $K = K_+ K_-$ и реализовав для (8) алгоритм решения функциональных уравнений Винера – Хопфа, приходим к представлениям

$$G_{13}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_+ \{ K_+^{-1} K_1^{-1} F(\alpha_1, \alpha_2) \}^+, \quad G_{23}^-(\alpha_1, \alpha_2) = -K_-^{-1} \{ K_+^{-1} K_1^{-1} F(\alpha_1, \alpha_2) \}^-.$$

Полагая последовательно в первом соотношении $\alpha_1 = q_{12}$ и $\alpha_1 = i q_{11}$, а во втором — $\alpha_1 = -q_{22}$, $\alpha_1 = -i q_{21}$ [6], получим систему алгебраических уравнений для определения $G_{j3}(\pm q_{j2})$, $G_{j3}(\pm i q_{j1})$, после решения которой найденные значения вносятся в правые части соотношений для трансформант Фурье амплитуд напряжений, последние в свою очередь подставляются в (6).

Та же схема для случая статического взаимодействия пластин с подложкой, требует дополнительно дифференцирования полученных соотношений по параметру α_1 , после чего описанная подстановка в исходные и полученные в результате дифференцирования уравнения приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $G_{j3}(\pm i \lambda, \alpha_2)$, $G'_{j3\alpha_1}(\pm i \lambda, \alpha_2)$.

Представления трансформант Фурье (по x_2) амплитуд перемещений пластин (5) содержат неизвестные константы, определяемые из граничных условий в области контакта пластин после применения к (4) преобразования Фурье по x_2

$$L_{1k}(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_3(0+0, \alpha_2) + L_{2k}(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{u}_3(0-0, \alpha_2) = \bar{f}_k(\alpha_2), \quad k = \overline{1, 4}.$$

Для определения оригиналов амплитуд смещений поверхности покрытия к выражению $\bar{u}_3(x_1, \alpha_2)$ применяется обратное преобразование $V_{1,2}^{-1}$ Фурье по α_2

$$u_3(x_1, x_2) = V_{1,2}^{-1} \bar{u}_3(x_1, \alpha_2).$$

Заключение

Полученные соотношения открывают возможность изучения влияния различных граничных условий в области контакта составляющих покрытия на напряженно-деформированное состояние системы покрытие/подложка. Разработанный метод позволяет определить основные характеристики напряженно-деформированного состояния рассматриваемой блочной структуры при различных условиях контакта пластин на разломе. Кроме того, теоретические результаты могут быть использованы при тестировании типов разломов литосферных структур для рационального планирования экспериментов с применением вибросейсмических источников, в частности передвижных, производящих моносигналы на заданных частотах, принимаемые на различных расстояниях, для идентификации разлома по дефекту приходящего сигнала.

Список литературы

- [1] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [2] Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
- [3] Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
- [4] Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Блочные элементы в теории плит сложной формы // Известия РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 92–97.
- [5] Колесников М.Н., Телятников И.С. К методам исследования разломов в условиях вибрационных воздействий // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 121 (07). Электронное издание <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/33.pdf>.
- [6] Телятников И.С. К моделям и методам изучения взаимодействия литосферных структур в области разломов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2016. № 2. С. 78–89.

*Илья Сергеевич Телятников — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник
Южного научного центра Российской академии наук;
e-mail: ilya_t@list.ru.*

Дата поступления — 12 мая 2017 г.