

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

А. Дж. Сатыбаев, А. А. Алимканов

Ошский технологический университет имени академика М. М. Адышева, 723503, г.Ош, Кыргызстан

УДК 517.876.2

В данной статье рассмотрено численное конечно-разностное решение одномерной обратной задачи сейсмологии. Здесь определяется один из параметров упругости – коэффициент Ламэ. Доказана теорема о сходимости приближенного решения к точному решению обратной задачи.

Ключевые слова: Уравнение сейсмологии, одномерная, обратная задача, коэффициент Ламэ, численное решение, сходимость решения.

Введение

Волны землетрясения проходят внутри и на поверхности Земли и они изучаются теорией упругости [1, 2], используя классические методы математического анализа. Процесс распространения волн землетрясения, начиная от классических исследований, исследуется на основе дифференциальных уравнений идеальной теории упругости с переменными параметрами. Процесс распространения сейсмических волн в линейной изотропной упругой среде описывается сложной системой дифференциальных уравнений. Дифференциальные системы уравнений теории упругости при существенных предположениях и ограничениях приводятся к дифференциальным уравнениям сейсмологии.

Коэффициенты уравнений сейсмологии состоят из суперпозиции параметров, которые зависят от нескольких переменных. Методом линеаризации можно привести суперпозиции одномерного уравнения к многомерному уравнению сейсмологии [3, 4, 5]. В практических приложениях возникают проблемы отыскания переменных коэффициентов дифференциальных уравнений, а эти коэффициенты описывают физические характеристики среды. Такие проблемы называют обратными задачами. В задачах сейсмологии определяют скорость распространения волн, плотность среды, упругие параметры Ламэ.

1 Постановка задачи

При линеаризации двумерных задач можно получить одномерную и двумерную линеаризованную задачу сейсмологии [1, 3, 4, 6]. Рассмотрим одномерную задачу сейсмологии полученную при линеаризации:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_0(x_3, t)}{\partial t^2} &= \mu_0(x_3) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} + \mu'_{0x_3}(x_3) \frac{\partial u_0(x_3, t)}{\partial x_3}, \quad x_3 \in R_+, t \in R_+, \\ u_0(x_3, t)|_{t < 0} &\equiv 0, \mu_0(x_3) \frac{\partial u_0(x_3, t)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{1}{2} r_0 \delta(t) + \frac{1}{2} h_0 \theta(t), t \in R_+, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $\mu_0(x_3)$, $\rho_0(x_3)$ — коэффициент Ламэ и плотность среды соответственно, $u_0(x_3, t)$ — смещение почвы, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Первое условие задачи (1) означает, что среда до некоторого времени $t = 0$ находится в покое, а в момент времени $t = 0$ в силу действия второго условия на поверхность среды действуют мгновенные и шнуровые источники с силой r_0 , h_0 и в среде начинаются сейсмические волны.

Задача (1) является прямой задачей и требуется определить смещение почвы среды, при известных значениях параметров среды и значений r_0, h_0 .

Обратная задача заключается в определении $\mu_0(x_3)$ — коэффициента Ламе при известной плотности $\rho_0(x_3), r_0, h_0$ и дополнительной информации вида

$$u_0(x_3, t)|_{x_3=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Пусть относительно коэффициентов уравнения выполнено условие

$$\mu_0(x_3), \quad \rho_0(x_3) \in \Lambda_0, \quad (3)$$

где $\Lambda_0 = \{\rho_0(x) \in C^6(R_+), \rho_0(+0) = 0, 0 < M_1 \leq \rho_0(x) \leq M_2, \|\rho_0\|_{C^2} \leq M_3\}$. Здесь M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные.

Если выполнено условие (3), то существует решение прямой задачи.

Задача (1) является задачей с криволинейной характеристикой и для выпрямления характеристики введем новую переменную [1, 3, 4]

$$x = \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{\rho_0(x_3)} dx}{\sqrt{\mu_0(x)}} \text{ и новые функции}$$

$$u(x, t) = u_0(x_3, t),$$

$$C(x) = \sqrt{\mu_0(x_3)/\rho_0(x_3)}, \quad \mu(x) = \mu_0(x_3), \rho(x) = \rho_0(x_3).$$

Проводим вычисления $u_{0tt}(x_3, t) = u_{tt}(x, t), u_{x_3}(x_3, t) = u_x(x, t) \cdot \sqrt{\rho(x)/\mu(x)},$

$$\begin{aligned} u_{x_3 x_3}(x_3, t) &= u_{xx} \cdot \frac{\rho(x)}{\mu(x)} + u_x \cdot \left[\sqrt{\frac{\rho_0(x_3)}{\mu_0(x_3)}} \right]'_{x_3} = u_{xx} \cdot \frac{\rho(x)}{\mu(x)} + u_x \cdot \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0(x_3)}{\rho_0(x_3)}} \cdot \left(\frac{\rho_0(x_3)}{\mu_0(x_3)} \right)'_{x_3} \right] = \\ &= u_{xx} \cdot \frac{\rho(x)}{\mu(x)} + u_x \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}} \cdot \left(\frac{\rho(x)}{\mu(x)} \right)'_x \right] = \left| C(x) = \sqrt{\frac{\rho(x)}{\mu(x)}} \right| = C^2(x) u_{xx} + \frac{1}{2} \frac{C'(x)}{C(x)} u_x. \end{aligned}$$

Замечание. Случай $\rho(x) = 1$ исследован в работе [6].

Тогда из (1)–(2) имеем следующую обратную задачу:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \frac{C'_x(x)}{2C(x)} u_x(x, t), \quad x \in R_+, t \in R_+, \\ u(x, t)|_{t < 0} &\equiv 0, \quad C(x) u'_x(x, t)|_{x=0} = \frac{1}{2} r_0 \delta(t) + \frac{1}{2} h_0 \theta(t), \quad t \in R_+ \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Продолжим решать функции $C(x)$ и $u(x, t)$ четным образом по переменной x на полупространстве $x \in R_-$. Для выделения особенностей решение прямой задачи (4) будем искать в виде:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + S(x) \theta(t - |x|) + R(x) \theta_1(t - |x|), \quad x \in R, \quad t \in R_+,$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — гладкая непрерывная функция.

Подставляя последнее в (4)–(5), относительно функции $S(x)$ получим обратную задачу:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + \frac{2S'_x(x)}{S(x)} u_x(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{t=|x|} = S(x), \quad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \quad (7)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

где $\Delta(T) = \{x, t \in (R_+ \times R_+) : x \in (0, \frac{T}{2}), |x| < t < T - |x|\}$.

Функции $S(x)$ и $C(x)$ связаны соотношением

$$S(x) = \frac{r_0}{2} \sqrt[4]{\frac{C(x)}{C(0)}}. \quad (9)$$

Для $R(x)$ решается задача дифференциального уравнения первого порядка

$$2R'_x(x) - \frac{C'_x(x)}{2C(x)} * R(x) - S''_{xx} - \frac{C'_x(x)}{2C(x)} S'_x(x) = 0, \quad R(0) = \frac{1}{2} h_0.$$

2 Конечно-разностное решение

Для этого введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{(x_i, t_i) : x_i = ih, \quad h = \frac{T}{N}, \quad x_i < t_i < T - x_i, \quad i = 0, N\}, \quad (10)$$

где h — шаг сетки.

Построим конечно-разностный аналог дифференциальной задачи (6)–(8):

$$u_{t\bar{t}} = u_{x\bar{x}} - \frac{2(S_i - S_{i-1})}{hS_i} \cdot \frac{u_i^i - u_{i-1}^i}{h}, \quad (x_i, t_i) \in \Delta_h(T), \quad \left. \begin{aligned} u_i^i &= S_i, & x_i &\in [0, T/2], & i &= 0, N/2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$u_0^i = f_i, \quad i = 0, N. \quad (12)$$

Теорема. Пусть для $f(t) \in C^4[0, T]$ существует решение обратной задачи (6)–(8), удовлетворяющее условию (3) и пусть решение прямой задачи (4) $u(x, t) \in C^4(\Delta(t))$. Тогда, при малом T , S_i — приближенное решение обратной задачи (11)–(12), построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению обратной задачи (6)–(8) в классе C со скоростью порядка $O(h)$.

Доказательство. Доказательство проведем по методике [4]. Исследуем сходимость решения обратной задачи (11)–(12) к точному решению обратной задачи (6)–(8). Для этого распишем разностное уравнение

$$u_{i+1}^k = u_i^{k+1} + u_i^{k-1} - u_{i-1}^k + h^2 B_i^k, \quad (13)$$

где $B_i^k = \frac{S_i - S_{i-2}}{h^2} \cdot \frac{4}{S_i + S_{i-2}} \cdot (u_i^k - u_{i-2}^k)$.

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения $u_i^{k+1}, u_i^{k-1}, u_{i-1}^{k-2}, \dots$ последовательно, получим:

$$u_{i+1}^k = \frac{1}{2} [f^{k+i+1} + f^{k-i-1}] + h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{k-i-\mu+2p}. \quad (14)$$

Полагая в последнем $k = i + 1$ и учитывая вторую формулу (11) имеем

$$S_{i+1} = \frac{1}{2} [f^{2i+2} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{1-\mu+2p}. \quad (15)$$

Из (14) следуют

$$u_i^k = \frac{1}{2} [f^{k+i} + f^{k-i}] + h^2 \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{k-i-\mu+2p+1}. \quad (16)$$

$$u_{i-2}^k = \frac{1}{2} [f^{k+i-2} + f^{k-i+2}] + h^2 \sum_{p=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{k-i-\mu+2p+3}. \quad (17)$$

Откуда

$$\frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} = \frac{1}{2} (f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} - f^{k-i+2}) + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{k-i+\mu+1} + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{k+i-\mu-1}, \quad (18)$$

а из (16) и (17) следуют

$$S_i = \frac{1}{2} [f^{2i} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{1-\mu+2p}, \quad (19)$$

$$S_{i-2} = \frac{1}{2} [f^{2i-4} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{1-\mu+2p}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\frac{S_i - S_{i-2}}{h} = \frac{1}{2h} (f^{2i} - f^{2i-4}) + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{2i-\mu-1} + h \sum_{\mu=1}^{i-3} B_\mu^{2i-\mu-3}. \quad (21)$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{h}(f^{k+1} - f^{k+i-2} + f^{k-1} - f^{k-i+2}) \\ f^{2i} + f^0 \\ \frac{1}{h}(f^{2i} - f^{2i-4}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\Phi_i^k = COLON \left(u_i^k, \frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h}, S_i, \frac{S_i - S_{i-2}}{h} \right), \quad (23)$$

и введем операторное выражение:

$$A[\Phi_p^k] = \begin{pmatrix} h \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h \sum_{\mu=1}^p B_\mu^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Тогда из (16), (18), (19), (21), (24) следует система замкнутых разностных уравнений

$$\Phi_i^k = F_i^k + h \sum_{p=1}^{i-1} A[\Phi_p^k]. \quad (25)$$

Точно такое же можно получить и для $\tilde{\Phi}_i^k$: $\tilde{\Phi}_i^k = \tilde{F}_i^k + h \sum_{p=1}^{i-1} A[\tilde{\Phi}_p^k]$, где вместо u_i^k , S_i записываются \tilde{u}_i^k , \tilde{S}_i с малой частью $O(h)$.

Из последней формулы и (25) имеем $|\Phi_i^k - \tilde{\Phi}_i^k|_C \leq |F_i^k - \tilde{F}_i^k|_C + h |\sum_{p=1}^{i-1} A[\Phi_p^k - \tilde{\Phi}_p^k]|_C + O(h)$.

Введем обозначения $\Delta_i = \max(\Phi_i^k - \tilde{\Phi}_i^k)$, $\delta_i = \max(\tilde{\Phi}_i^k - \Phi_i^k)$, $k = i \dots 2N - i$.

Используя дискретный аналог Гронуолла — Беллмана, имеем

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\Delta_i|_C \leq |\delta_i + O(h)|_C * \exp\{h|A[\Delta_i]|_C\}.$$

Доказано утверждение теоремы.

Если S_i известна, то по формуле (9) находим C_i — решение обратной задачи (4)–(5), т.е. $C_i = 16S_i^4 C_0 / r_0^4$. Переходя от новой переменной x к старой переменной x_3 , по формуле $C(x) = \sqrt{\mu_0(x_3)/\rho_0(x_3)}$, находим и $\mu_i = C_i^2 \cdot \rho_i$, неизвестный коэффициент Ламэ обратной задачи (1)–(2).

Результаты. Доказана теорема о сходимости приближенного численного решения обратной задачи к точному решению обратной задачи. Методику решения задач можно провести для определения других коэффициентов обратной задачи.

Заключение.

Разработано конечно-разностное решение обратной задачи сейсмики с мгновенным и шнуровым источниками. Показана сходимость решения и получена оценка сходимости, построен алгоритм решения неизвестного коэффициента Ламэ.

Список литературы

- [1] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009г. — 457с.
- [2] Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981г. — 688 с.
- [3] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984г. — 264 с.

- [4] Сатыбаев А.Дж. Численное определение коэффициента Ламэ в уравнении сейсмики //История, культура и экономика, наука юга Кыргызстана. — Ош: КУУ, 2000. — С. 148–152.
- [5] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теории упругости. —М.: Наука, 1979г.
- [6] Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990г. — 304 с.

*Абдуганы Джунусович Сатыбаев — д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедры “ИТиУ”
Ошского технологического университета имени академика М.М. Адышева;
e-mail: abdu-satybaev@mail.ru;*

*Амангельди Арапбаевич Алимканов — аспирант, ст. преподаватель
Ошского технологического университета имени академика М.М. Адышева;
e-mail: dr.amangeldy78@mail.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.