

ДИСКРЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ОЗЕРА БАЙКАЛ

Е. А. Цветова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.63

Для изучения гидро-геохимических процессов, протекающих в озере Байкал, разрабатывается комплекс математических моделей гидротермодинамики, переноса и трансформации примесей, находящихся в различных фазовых состояниях. Для его численной реализации и построения согласованных алгоритмов используется вариационный подход, в соответствии с которым для всей системы строится интегральное тождество, которое затем аппроксимируется с использованием схем расщепления. На основе концепции сопряженных интегрирующих множителей для операторов типа конвекции-диффузии-реакции разработаны дискретно-аналитические схемы, обладающие свойствами безусловной монотонности. Представлены результаты численных экспериментов по моделированию гидротермодинамики и процессов переноса и трансформации газа, выходящего из источников на дне озера.

Ключевые слова: вариационный подход, дискретно-аналитические аппроксимации, сопряженные интегрирующие множители, конвекция, диффузия, реакция

Введение

Изучение процессов, протекающих в природных объектах, в современной науке происходит с привлечением методов математического моделирования, которое, в свою очередь, формулирует широкий круг вопросов, таких как создание соответствующих математических моделей, разработка алгоритмов для их реализации, построение компьютерных программ и т.д.

В последнее время интерес к экологическим процессам в Байкале сильно возрос. Как утверждают авторы [1], за последние 10 лет концентрация растворенного метана в Байкале увеличилась в три раза, причем переходный процесс начался в 2003 г. и сопровождался линейным ростом концентрации. Естественно предположить, что поступление метана может происходить со дна озера, где находятся грязевые вулканы и подводные выходы газа, тем более, что они были обнаружены повсеместно во всех трех котловинах озера [4–6]. Кроме того, метан может поступать в толщу вод при разложении газогидратов, залежи которых были также обнаружены на дне на больших глубинах. Однако относительно залежей можно сказать, что они лежат на дне испокон века. Процессы растворения, связанные с их омытием течениями, происходят очень медленно. По законам физики и химии, метан может массово выходить из гидрата только в процессе разложения, которое в Байкальских условиях происходит на глубинах менее 380 м. Но для этого газогидрату как-то нужно оказаться на таких глубинах. Этому могут способствовать такие события как подземные землетрясения, сходы грунта, что случается не часто. Так что, по-видимому, основные причины повышения концентрации метана следует искать в подводных выходах газа [2–4].

В настоящей статье речь идет о процессах распространения метана, выходящего в виде пузырей из источников, находящихся на дне озера.

1 О комплексе моделей

Для изучения гидро-геохимических процессов, протекающих в озере Байкал, разрабатывается комплекс математических моделей гидротермодинамики, переноса и трансформации примесей, находящихся в различных фазовых состояниях [5–7].

Для моделирования гидротермодинамики несущей среды используется негидростатическая модель [5, 6]. Она представлена системой уравнений в частных производных для трех компонент вектора скорости течений (u, v, w) , уравнения для температуры T , уравнения состояния и уравнения сохранения массы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) - D(u) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + kw, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L(v) - D(v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + L(w) - D(w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g - ku, \quad (3)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + L(T) \right) - D_T(T) = q_T + L_m, \quad (4)$$

$$\rho = \rho(T, \bar{S}, p), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = f. \quad (6)$$

Здесь l, k — параметры Кориолиса, p — давление, ρ — плотность, L — трехмерные операторы, описывающие перенос, $D()$, $D_T()$ трехмерные диффузионные операторы.

Поведение фаз метана описывается системой уравнений типа конвекции-диффузии-реакции. Предполагается, что растворенный метан движется со скоростью несущей среды, а газовая фаза и гидратные частицы получают дополнительные скорости подъема за счет сил плавучести. Переход газа в раствор регулируется условиями закона Генри-Дальтона. Гидрат разлагается на газ и воду при достижении соответствующих условий по давлению и температуре. В условиях Байкала это происходит на глубинах около 380 м.

Система уравнений для концентраций метан-содержащих компонент C_h, C_g, C_s имеет вид:

$$\frac{\partial C_h}{\partial t} + L_h(C_h) - D(C_h) = -\tilde{k}C_h, \quad (7)$$

$$\frac{\partial C_g}{\partial t} + L_g(C_g) - D(C_g) = \tilde{k}C_h - \beta(H\hat{p} - C_s), \quad (8)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + L(C_s) - D(C_s) = \beta(H\hat{p} - C_s) \quad (9)$$

Здесь \tilde{k} и β — скорости процессов, H — константа Генри, $\hat{p} = p + p_{atm}$. Операторы L_h, L_g описывают процессы переноса по трем направлениям с учетом дополнительных скоростей подъема по вертикали для газа и гидрата. Система уравнений дополняется соответствующим набором краевых и начальных условий.

2 Дискретно-аналитические аппроксимации

Для численной реализации и построения согласованных алгоритмов комплекса моделей используется вариационный подход [8], в соответствии с которым для всей системы строится интегральное тождество, которое затем аппроксимируется с использованием схем расщепления по физическим процессам и пространственным координатам. Для локально одномерных задач, содержащих операторы конвекции-диффузии-реакции, в [9] построены дискретно-аналитические схемы, при получении которых использована идея сопряженных интегрирующих множителей. Под последними понимаются фундаментальные решения локальных сопряженных задач на каждом сеточном интервале. В предположении кусочно-постоянных коэффициентов операторов конвекции-диффузии-реакции в пределах одного сеточного интервала, решения локальных сопряженных задач на смежных интервалах используются для построения трехточечных аппроксимаций. В [9] подробно описаны все этапы построения этих схем.

Построенные численные схемы обладают следующими свойствами:

- все коэффициенты трехточечных уравнений неотрицательны;
- в матрице коэффициентов имеется диагональное преобладание;
- выполняются свойства транспортности в направлении скорости конвективного переноса;
- матрица коэффициентов является монотонной, она неособенная, принадлежит классу М-матриц; элементы обратной матрицы положительны;
- численная схема является точной при кусочно-постоянном представлении коэффициентов и при точном вычислении интегралов в правых частях;
- краевые условия всех известных типов удовлетворяются в таких схемах точно.

3 Результаты сценарных расчетов

В настоящей работе приводятся результаты численных экспериментов, выполненных на одной из версий комплекса моделей. В отличие от [6, 7], где в моделях участвовал гидрат метана в виде твердых частиц, здесь рассматривается двухфазная модель «жидкость-газ» с учетом фазового перехода газа в раствор. В системе имеется 3 компонента: вода - несущая среда, метан в газовой фазе и растворенный метан. Решается задача о крупномасштабной конвекции, которая возникает за счет выталкивающей силы пузырьков, выходящих из точечного источника со дна озера. Явные термические эффекты при переходе газ-раствор не проявляются, поэтому в уравнении для температуры они не учитываются.

В сценарном расчете предполагается, что подводный выход газа происходит в условиях стратифицированной водной толщи с реальным вертикальным распределением температур, соответствующим данным за апрель на одном из разрезов в Южном Байкале. По многолетним наблюдениям в этот период на поверхности озера имеется ледовый покров, а в поведении температуры в приповерхностном слое наблюдается обратная сильно устойчивая стратификация: температура на поверхности около 0 и повышается с глубиной. На глубинах 50–150 м располагается термоклин, ниже лежит слой мезотермического максимума, температура в нем самая высокая по всей толще. Далее до дна температура меняется незначительно, стратификация слабоустойчивая [10]. Для задания параметров выбросов использованы оценки, имеющиеся в [4]. По данным наблюдений скорости подъема пузырей находятся в интервале 15–25 см/сек в зависимости от параметров пузырей. В представленных сценариях источники работают постоянно.

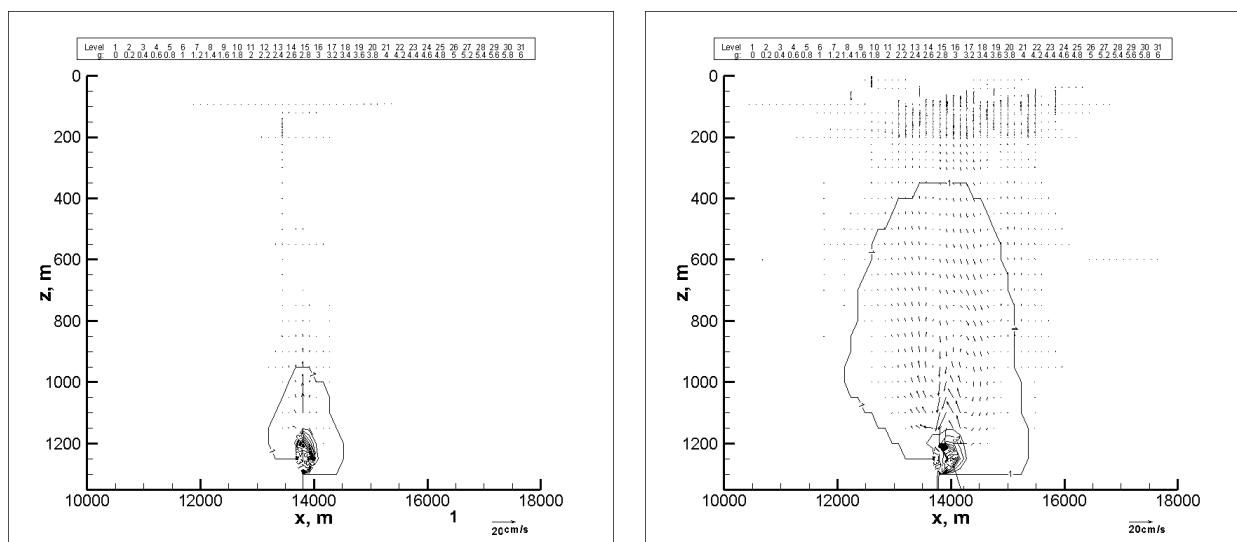


Рис. 1: Подъем газового факела: через 90 сек (слева); через 7,5 часов после начала действия источника (справа).

Результаты расчетов представлены на рис. 1. Сначала факел поднимается быстро, но с течением времени подъем замедляется. Поскольку фоновые концентрации в озере очень далеки до насыщающих значений,

газовая фаза интенсивно переходит в раствор. Примерно через час при постоянной работе источника процесс в системе устанавливается. Дополнительное поступление примеси не приводит к дальнейшему подъему факела. Внутри факела формируется трехмерная система течений с подъемами и компенсирующими опусканиями. С течением времени в циркуляционной системе проявляется колебательный характер. Центральная ось факела смещается, а вокруг неё попеременно усиливаются то правые, то левые ветви. На рисунках показаны двумерные сечения области, проходящие через источник для двух моментов времени. Заметим, что при заданных значениях параметров, глубоководный выброс газа не достиг поверхности.

Заключение

Таким образом, применение вариационного подхода и концепции сопряженных интегрирующих множителей дало возможность построить согласованные алгоритмы для реализации комплекса моделей и решения прикладных задач для озера Байкал. Сценарные расчеты показали, что при выходе газа со дна озера в стратифицированную среду, за счет сил плавучести возникает крупномасштабная конвекция, которая, в зависимости от параметров выбросов, распространяет в толще вод газовые и растворенные примеси.

Список литературы

- [1] Гранин Н.Г., Верещагин О.Ф., Козлов В.В., Обжиров А.И., Макаров М.М., Гнатовский Р.Ю., Иванов В.Г., Блинов В.В., Мизандронцев И.Б. Изменение концентрации метана в озере Байкал: возможная причина // Российская конференция «Газовые гидраты в экосистеме Земли». Новосибирск, 2014. — С. 25.
- [2] Granin N.G., Makarov M.M., Kucher K.M., Gnatovsky R.Y. Gas seeps in Lake Baikal-detection, distribution, and implications for water column mixing. // Geo-Marine Letters. — 2010, — 30 (3-4), С — 399–409. (9972)
- [3] Макаров М. М., Шагдуров А. А., Гранин Н. Г. Пузырьковые выходы газа из донных отложений. Экологический атлас бассейна оз. Байкал [Электронный ресурс] <http://bic.iwlearn.org/ru> Байкальский информационный центр // URL: <http://bic.iwlearn.org/ru/atlas/atlas/138-puzyrkovye-vyhody-gaza-iz-donnyh-otlozhenii-map>.
- [4] Макаров М.М. Пузырьковые выходы метана из донных отложений озера Байкал. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата географических наук, Иркутск, 2016, 24 с.
- [5] Цветова Е.А. Моделирование переноса и трансформации метана в Байкале // Современные проблемы математического моделирования. Сб. трудов XVI Всероссийской конференции-школы молодых исследователей.— Ростов-на-Дону: Изд ЮФУ.— 2015. —С. 178–185.
- [6] Tsvetova E.A. Modeling of hydrodynamics of water-methane heterogeneous system // Proc. SPIE 9680, 21st International Symposium Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics.— 2015.— 968075 (November 19, 2015); doi:10.1117/12.2205998.
- [7] Tsvetova E.A. Natural and forced under-ice convection// Proc. SPIE 10035, 22nd International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 1003568 (November 29, 2016); doi:10.1117/12.2249022
- [8] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 352 с.
- [9] Penenko V.V., Tsvetova E.A., Penenko A.V. Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies//Computers and Mathematics with Applications. 2014. V. 67. P. 2240–2256.
- [10] Shimaraev M. N., V. I. Verbolov, N. G. Granin, and P. P. Sherstyankin. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. —1994. — Irkutsk: Baikal Int. Cent. of Ecol. Res.— 81 P.

*Елена Александровна Цветова — к.ф.-м.н., ведущий науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: e.tsvetova@omtgpr.ssc.ru.
Дата поступления — 31 мая 2017 г.*