

# АНАЛИЗ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВОК НА БАЗЕ НЕКОНФОРМНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ

Э. П. Шурина<sup>1,2</sup>, С. А. Трофимова<sup>1,2</sup>, Н. Б. Иткина<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск

<sup>2</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.635.4

Предлагается и анализируется построение вычислительной схемы для задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды с использованием смешанной конечно-элементной аппроксимации на базе разрывного метода Галеркина (DG — Discontinuous Galerkin method). Исследуется влияние выбора численных потоков на устойчивость вычислительной схемы. Рассматривается построение иерархической базисной системы для скорости в специальном функциональном пространстве  $H^{div}$ . Приводится сравнительный анализ результатов, полученных с помощью смешанной формулировки, с результатами математического моделирования, полученными с использованием прямой вариационной постановки на базе разрывного метода Галеркина.

**Ключевые слова:** теория фильтрации, модель Дарси, смешанный конечно-элементный метод, разрывный метод Галеркина.

## Введение

Смешанный метод конечных элементов на базе разрывного метода Галеркина [1] является одним из современных подходов для численного решения задачи Дарси. Основная идея данного метода заключается в нахождении как первичной, так и дуальной переменной, при этом осуществляется поиск критической точки соответствующего функционала над конечно-элементным пространством допустимых пробных функций, которое представимо в виде прямой суммы двух или более подпространств. Основная проблема применения смешанных вариационных постановок заключается в том, что критическая точка функционала — седловая точка [2, 3, 4]. Такой подход позволяет найти решение, соответствующее физике моделируемых процессов, и имеет ряд достоинств и недостатков.

Для некоторого класса задач, например, задачи Стокса, прямые вариационные постановки оказываются непрактичными, а смешанные методы показывают эффективные результаты и широко применимы [5, 6, 7]. Зачастую возникают ситуации, когда необходимо знать дуальную переменную (напряжение для задач эластичности, тепловой поток или скорость движения жидкости и т.п.), в этом случае смешанный метод позволяет сразу найти значения этой переменной, в отличие от прямых постановок, в которых дуальные переменные определяются а posteriori путем дифференцирования.

Применение смешанных вариационных постановок позволило R. Ewing, M. Wheeler и другим получить вычислительную схему повышенной устойчивости для моделирования вытеснения нефти из пористой среды [8, 9]. А. Masud и T.J.R. Hughes предложили стабилизированную конечно-элементную формулировку [10], в которой надлежащим образом «взвешенная» невязка была добавлена к стандартной смешанной формулировке для задачи Дарси. F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini, A. Masud предложили устойчивую конечно-элементную вычислительную схему, основанную на разрывном методе Галеркина [11], для задачи Дарси со скалярным коэффициентом проницаемости среды, используя при этом комбинацию двух изначально неустойчивых методов Bassy-Rebay [12] и Baumann-Oden [13].

Несмотря на достоинства смешанных методов, существуют и очевидные недостатки. Из-за того, что одновременно аппроксимируются как первичные, так и дуальные переменные, происходит резкое увеличение количества степеней свободы, а соответственно, и рост размерности системы алгебраических уравнений.

Поскольку смешанная задача — это задача о седловой точке, то результирующая дискретная система будет неопределенной, т.е. содержащей как положительные, так и отрицательные собственные значения, и для её решения невозможно будет непосредственно использовать разложение Холецкого или итерационные методы, такие как метод сопряженных градиентов. Третьим недостатком является то, что дискретные аналоги смешанных постановок менее устойчивы, чем дискретные аналоги прямых постановок, в которых выбор конечно-элементных пространств обусловлен только свойствами аппроксимации и удобством реализации. Из-за наличия такого рода недостатков эффективное построение смешанных вычислительных схем требует большего опыта, а также порождает необходимость детального анализа смешанных постановок, использования более жестких ограничений на построение конечно-элементных пространств, выбора специального базиса из заданных конечно-элементных подпространств, а также построения специального решателя для дискретного аналога.

## 1 Смешанная постановка на базе DG-метода

Пусть  $\Omega \subset R^n$  — ограниченная  $n$ -мерная область с границей  $\partial\Omega = \Gamma_D$ , модель Дарси описывается краевой задачей с эллиптическим оператором:

$$-\nabla \cdot K \nabla p = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$-K \nabla p \cdot n = g \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

которую можно записать в виде системы уравнений для скорости  $u$  и давления  $p$ :

$$\begin{cases} u = -K \nabla p & \text{в } \Omega \\ \nabla \cdot u = f & \text{в } \Omega \\ u \cdot n = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

где  $K$  — симметричный положительно определенный тензор.

Введем бесконечномерное пространство Лебега  $L_2(\Omega)$  со скалярным произведением  $(v, w)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} v w d\Omega$  и нормой  $\|v\|_{L_2(\Omega)} = (v, v)_{L_2(\Omega)}^{1/2}$  и пространство векторных функций:

$$H_0^{div}(\Omega) = \{v \in (L_2(\Omega))^n, \nabla \cdot v \in L_2(\Omega), v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Смешанная формулировка для задачи Дарси имеет вид:

найти  $(u, p) \in H_0^{div}(\Omega) \times L_2(\Omega)$  такие, что:

$$\begin{cases} (K^{-1}u, v)_{L_2(\Omega)} - (p, \nabla \cdot v)_{L_2(\Omega)} = 0 & \forall v \in H_0^{div} \\ (\nabla \cdot u, q)_{L_2(\Omega)} = (f, q)_{L_2(\Omega)} & \forall q \in L_2(\Omega) \end{cases} \quad (4)$$

Пусть  $\Xi_h = \{T\}$  — разбиение расчетной области  $\Omega$  на конечные элементы  $T$ . Тогда  $\Gamma = \bigcup_T \partial T$  — множество границ элементов  $T$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$ . Введем конечно-элементные подпространства следующим образом:

$$V_h = \{v \in (L_2(\Omega))^n : v|_T \in (P_k(T))^n \forall T \in \Xi_h\} \quad (5)$$

$$Q_h = \{q \in L_2(\Omega) : q|_T \in P_l(T) \forall T \in \Xi_h\} \quad (6)$$

где  $P_{k,l}(T)$  — пространства полиномов степени  $k \geq 1$  и  $l \geq 1$  соответственно, определенных на элементе  $T$ .

Определим скалярный численный поток  $\hat{p} = (\hat{p}_T)_{T \in \Xi_h}$  и векторный численный поток  $\hat{u} = (\hat{u}_T)_{T \in \Xi_h}$  как линейные операторы:

$$\hat{p} : H^1(\Xi_h) \rightarrow T(\Gamma)$$

$$\hat{u} : H^2(\Xi_h) \times [H^1(\Xi_h)]^2 \rightarrow [T(\Gamma)]^2$$

Функции из пространства  $T(\Gamma) = \prod_{T \in \Xi_h} L_2(\Omega)$  принимают два значения на множестве внутренних границ конечных элементов  $\Gamma_0$  и одно значение на границе  $\partial\Omega$ .

Для того, чтобы определить численные потоки на границах конечных элементов, необходимо ввести операторы среднего значения  $\{\cdot\}$  и скачка  $[\cdot]$  скалярной и векторной функций. Пусть  $e \in \Gamma_0$  — внутреннее

ребро, разделяющее элементы  $T_1$  и  $T_2$ , для которых на ребре  $e$  определены внешние нормали  $n_1$  и  $n_2$  соответственно. Тогда операторы среднего значения и скачка скалярной функции  $q \in T(\Gamma)$  можно определить следующим образом:

$$\{q\} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2),$$

$$[q] = q_1 n_1 + q_2 n_2,$$

где  $q_i = q|_{T_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Операторы  $\{\cdot\}$  и  $[\cdot]$  для векторной функции  $u \in [T(\Gamma)]^2$  примут вид:

$$\{u\} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),$$

$$[u] = u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2$$

Выберем в качестве численных потоков среднее значение давления на границе конечного элемента и скачок скорости через границу [12], т.е.:

$$\hat{p} = \{p\} \quad \text{на } \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega \quad (7)$$

$$\hat{u} = [u] \quad \text{на } \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega \quad (8)$$

Введем дополнительный стабилизатор вида  $\mu \int_{\Gamma} [u] \cdot [v] d\Omega$  в первое уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} u \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{p\} [v] dS + \int_{\Gamma_D} p(v \cdot n) dS + \mu \int_{\Gamma_0} [u] \cdot [v] dS + \mu \int_{\Gamma_D} u \cdot v dS = 0 \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot u q d\Omega + \int_{\Gamma_0} [u] \{q\} dS + \int_{\Gamma_D} (u \cdot n) q dS = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS \end{cases} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим другой подход к выбору численных потоков. Выберем в качестве потоков среднее значение скорости на границе конечного элемента и скачок давления через границу, т.е.:

$$\hat{p} = [p] \quad \text{на } \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega \quad (10)$$

$$\hat{u} = \{u\} \quad \text{на } \Gamma = \Gamma^0 \cup \partial\Omega \quad (11)$$

Подставим выражения для потоков в систему, а для дополнительной стабилизации вариационной постановки введем штраф на скачки давления  $p$  и скорости  $u$ , следуя подходу, описанному в [11]. Получим:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1} u \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p] \{v\} dS + \int_{\Gamma_D} (pn) \cdot v dS - \theta \int_{\Omega} (K^{-1} u + \nabla p) \cdot v d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot u q d\Omega + \int_{\Gamma_0} \{u\} [q] dS + \int_{\Gamma_D} u \cdot (qn) dS + \delta \theta \int_{\Omega} (u + K \nabla p) \cdot \nabla q d\Omega = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} g q dS \end{cases} \quad (12)$$

где  $\theta$  — выбираемый параметр,  $\delta = \pm 1$ .

Прямая вариационная формулировка для решения задачи Дарси разрывным методом Галеркина в форме Baumann-Oden [1] имеет вид:

$$\int_{\Omega} K \nabla p \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_0} [p] \cdot \{K \nabla q\} - \{K \nabla p\} \cdot [q] dS + \int_{\Gamma_D} pn \cdot K \nabla q - K \nabla p \cdot q n dS = \int_{\Omega} f q d\Omega - \int_{\Gamma_D} gn \cdot K \nabla q dS \quad (13)$$

## 2 Построение базисных систем в пространствах $H^{div}$ и $L_2$

Рассмотрим один из способов построения иерархического конформного базиса в пространстве  $H^{div}$ . Базисные функции будем строить как результат тензорного произведения ортогональных полиномов, заданных на данном носителе, само пространство при этом представляется в виде суммы двух подпространств: подпространства дивергентно свободных функций и подпространства недивергентно свободных функций [14].

Диаграмма De Rham'a:

$$H^1 \xrightarrow{\nabla} H^{curl} \xrightarrow{\nabla \times} H^{div} \xrightarrow{\nabla \cdot} L_2$$

Конформность подразумевает требование непрерывности нормальных компонент базисных функций на межэлементных границах.

Для построения базиса для скорости в пространстве  $H^{div}$  будем использовать ортогональные полиномы Лежандра. Рассмотрим прямоугольный мастер-элемент  $T_{quad}^{div} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

Будем формировать базисные функции двух типов: дивергентно свободные edge-функции высокого порядка и базисные функции недивергентно свободные высокого порядка, определенные во внутренних узлах конечного элемента (bubble-функции).

Диаграмма De Rham'a предполагает, что конечный элемент  $T_{quad}^{div}$  будет оснащен полиномиальным пространством:

$$V_{quad} = \{v \in Q_{p^{b,1}+1, p^{b,2}} \times Q_{p^{b,1}, p^{b,2}+1}, v \cdot n|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), j = \overline{1, 4}\} \quad (14)$$

где  $p^{b,1}, p^{b,2}$  — степени полиномов для bubble-функций,  $p^{e_j}$  — степени полиномов для edge-функций.

Следы нормальных компонент edge-функций  $\gamma_k^{e_i}$  связаны с полиномами Лежандра  $L_k$  степени  $k = 0, 1, \dots, p^{e_i}$  на ребре  $e_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  и равны нулю на остальных ребрах.

$$\gamma_k^{e_1} = l_0(\xi_1)L_k(\xi_2)\tau_1, \quad 0 \leq k \leq p^{e_1} \quad (15)$$

$$\gamma_k^{e_2} = l_1(\xi_1)L_k(\xi_2)\tau_1, \quad 0 \leq k \leq p^{e_2} \quad (16)$$

$$\gamma_k^{e_3} = L_k(\xi_1)l_0(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k \leq p^{e_3} \quad (17)$$

$$\gamma_k^{e_4} = L_k(\xi_1)l_1(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k \leq p^{e_4} \quad (18)$$

где  $\tau_1 = (1, 0)$  и  $\tau_2 = (0, 1)$  — направления,  $l_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ ,  $l_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$ .

Bubble-функции строятся таким образом, что их нормальные компоненты равны нулю на всех ребрах:

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,1} = l_{k_1}(\xi_1)L_{k_2}(\xi_2)\tau_1, \quad 2 \leq k_1 \leq p^{b,1} + 1, \quad 0 \leq k_2 \leq p^{b,2} \quad (19)$$

$$\gamma_{k_1, k_2}^{b,2} = L_{k_1}(\xi_1)l_{k_2}(\xi_2)\tau_2, \quad 0 \leq k_1 \leq p^{b,1}, \quad 2 \leq k_2 \leq p^{b,2} + 1 \quad (20)$$

Рассмотрим построение квадратичного базиса для давления в пространстве  $L_2$ . Представим каждую базисную функцию в виде тензорного произведения одномерных квадратичных базисных функций, определенных на отрезке  $[0, 1]$ . Для построения одномерного базиса введем две разрывные функции и дополним одной непрерывной функцией. Квадратичные базисные функции для одномерного случая определяются формулами [15]:

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)(1 - 3\xi) \quad (21)$$

$$\psi_2(\xi) = -2\xi^2 + 2\xi \quad (22)$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 2\xi) \quad (23)$$

Биквадратичные базисные функции будут определяться по следующим формулам:

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \psi_1(\xi)\psi_1(\eta) \quad (24)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \psi_2(\xi)\psi_1(\eta) \quad (25)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \psi_3(\xi)\psi_1(\eta) \quad (26)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta) = \psi_1(\xi)\psi_2(\eta) \quad (27)$$

$$\varphi_5(\xi, \eta) = \psi_2(\xi)\psi_2(\eta) \quad (28)$$

$$\varphi_6(\xi, \eta) = \psi_3(\xi)\psi_2(\eta) \quad (29)$$

$$\varphi_7(\xi, \eta) = \psi_1(\xi)\psi_3(\eta) \quad (30)$$

$$\varphi_8(\xi, \eta) = \psi_2(\xi)\psi_3(\eta) \quad (31)$$

$$\varphi_9(\xi, \eta) = \psi_3(\xi)\psi_3(\eta) \quad (32)$$

### 3 Вычислительные эксперименты

Проведем вычислительные эксперименты для смешанной вариационной постановки (12) с параметром  $\theta = 0.5$  и прямой постановки (13). Пусть задана расчетная область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  с вертикальными и горизонтальными прямоугольными включениями (см. Рис. 1). Рассмотрим систему уравнений (3) с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} p|_{y=0} &= p_1 = 0; \\ p|_{y=1} &= p_2 = 1; \\ K \frac{\partial p}{\partial n}|_{x=0} &= K \frac{\partial p}{\partial n}|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

Правая часть  $f = 0$ , коэффициент проницаемости среды  $K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , шаг сетки  $h = 0.05$ ,  $h/2 = 0.025$ ,  $h/4 = 0.0125$ . Базис для давления квадратичный (см. (24)–(32)), для скорости основан на полиномах Лежандра, включает edge-функции 0 и 1 порядков и bubble-функции 2 порядка.

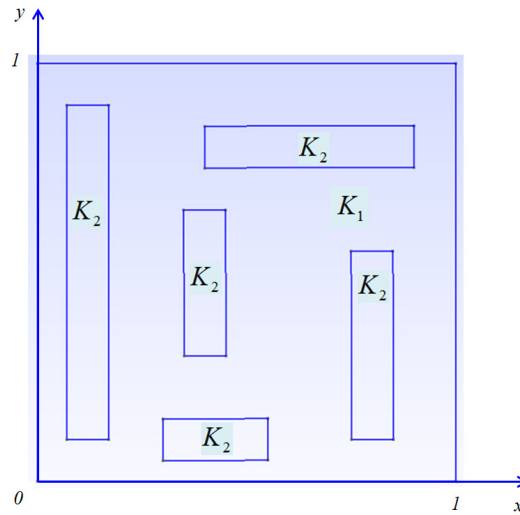


Рис. 1: Расчетная область с вертикальными и горизонтальными включениями

В таблицах 1 — 3 представлены результаты вычислительных экспериментов, полученных с использованием прямой и смешанной вариационных постановок, при различном коэффициенте проницаемости включений.

Таблица 1: Относительные погрешности давления  $\frac{\|p_{h/4} - p_{h/2}\|_{L_2}}{\|p_{h/4}\|_{L_2}}$  в норме  $L_2$

$K_2$	$\begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.0 & 0 \\ 0 & 10.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 100.0 & 0 \\ 0 & 100.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000.0 & 0 \\ 0 & 1000.0 \end{bmatrix}$
Прямая	1.1523e-3	1.1523e-3	4.68548e-4	8.52589e-4	1.8816e-3	2.13219e-3
Смешанная	3.25489e-4	2.98654e-4	1.52004e-4	1.62997e-4	3.49262e-4	3.88961e-4

Таблица 2: Относительные погрешности  $x$ -компоненты скорости  $\frac{\|u_{h/4}^x - u_{h/2}^x\|_{L_2}}{\|u_{h/4}^x\|_{L_2}}$  в норме  $L_2$

$K_2$	$\begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.0 & 0 \\ 0 & 10.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 100.0 & 0 \\ 0 & 100.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000.0 & 0 \\ 0 & 1000.0 \end{bmatrix}$
Прямая	8.63586e-2	8.27021e-2	6.68058e-2	1.29577e-1	2.21698e-1	2.41531e-1
Смешанная	8.6855e-2	8.57888e-2	7.87274e-2	9.29783e-2	1.00427e-1	1.00516e-1

Таблица 3: Относительные погрешности  $y$ -компоненты скорости  $\frac{\|u_{h/4}^y - u_{h/2}^y\|_{L_2}}{\|u_{h/4}^y\|_{L_2}}$  в норме  $L_2$ 

$K_2$	$\begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10.0 & 0 \\ 0 & 10.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 100.0 & 0 \\ 0 & 100.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1000.0 & 0 \\ 0 & 1000.0 \end{bmatrix}$
Прямая	2.70711e-2	2.46069e-2	1.29488e-2	1.87025e-2	3.97079e-2	4.44857e-2
Смешанная	2.63486e-2	2.47273e-2	1.48604e-2	1.38548e-2	1.80322e-2	1.84071e-2

На Рис. 2 представлены численные поля давления, полученные с использованием смешанной вариационной постановки, при коэффициенте проницаемости включений  $K_2 = \begin{bmatrix} 10.0 & 0 \\ 0 & 10.0 \end{bmatrix}$ .

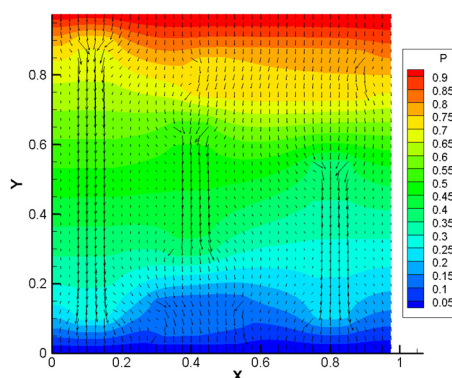


Рис. 2: Численные поля давления

## Заключение

Построена вычислительная схема смешанной постановки на базе разрывного метода Галеркина для решения задачи Дарси с тензорным коэффициентом проницаемости среды. Исследовано влияние выбора численных потоков на устойчивость вычислительной схемы, в процессе которого обнаружено, что численные потоки F. Bassi и S. Rebay оказываются неэффективны [12]. Однако подход, описанный в [11], позволяет получить устойчивую схему, обладающую необходимыми свойствами. Проведенные исследования на классе модельных задач показали, что порядок аппроксимации метода существенно зависит от выбора численных потоков и построения адекватной базисной системы. Получено, что вычислительная схема с численными потоками F. Brezzi и T. J. R. Hughes устойчива к контрастным значениям тензорного коэффициента проницаемости среды. Сравнительный анализ относительных погрешностей вычисления давления и скорости (см. Табл. 1 – 3) полученных с использованием прямой и смешанной вариационных постановок показал, что применение смешанных методов не ухудшает точность вычисления, несмотря на увеличение размерности задачи на 30–40 %.

## Список литературы

- [1] Arnold D.N., Brezzi F., Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. 2002. Vol. 39, No. 5. P. 1749–1779.
- [2] Arnold D.N. Mixed finite element methods for elliptic problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990. No. 82. P. 281–300.
- [3] Brezzi F. On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO Anal. Numer. 1974. 8-32. P. 129–151.
- [4] Arnold D.N., Brezzi F. Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates // Math. Modelling and Numer. Anal. 1985. No. 19. P. 7–32.

- [5] Arnold D.N., Brezzi F., Fortin M. A stable finite element for the Stokes equations // *Calcolo*. 1984. No. 21. P. 337–344.
- [6] Crouzeix M., Raviart P.-A. Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations // *RAIRO Anal. Numer.* 1973. R3. P. 33–76.
- [7] Ainsworth M., Coggins P. The stability of mixed hp-finite element methods for Stokes flow on high aspect ratio elements // *Siam J. Numer. Anal.* 2000. No. 38(5). P. 1721–1761.
- [8] Darlow B., Ewing R., Wheeler M. Mixed finite element methods for miscible displacement in porous media // *Six SPE Symposium on Reservoir Simulation*. SPE 10501. New Orleans: 1982.
- [9] Ewing R., Russel T., Wheeler M. Simulation of miscible displacement using mixed methods and a modified method of characteristics // *Seventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*. SPE 12241. San Francisco: 1983.
- [10] Masud A., Hughes T.J.R. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2002. No. 191. P. 4341–4370.
- [11] Brezzi F., Hughes T.J.R., Marini L.D., Masud A. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow // *Journal of Scientific Computing*. 2005. Vol. 22, No. 1. P. 119–225.
- [12] Bassi F., Rebay S. Discontinuous finite element high order accurate numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations // in *Proceedings of the Conference "Numerical methods for fluid dynamics V"*. Oxford: Clarendon Press. April 3–6 1995. P. 295–302.
- [13] Baumann C.E., Oden J.T. A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1999. No. 175. P. 311–341.
- [14] Beuchler S., Pillwein V., Zaglmayr S. Sparsity optimized high order finite element functions for  $H(\text{div})$  on simplices. // *Numerische Mathematik*. 2012. Vol. 22, No. 2. P. 197–225.
- [15] Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные многосеточные методы. // Часть I. Многомасштабные методы: учеб. пособие – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 68 с.

*Элла Петровна Шурина — д.т.н., профессор кафедры Вычислительных технологий Новосибирского государственного университета,  
гл. науч. сотр. Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН;  
e-mail: shurina@online.sinor.ru;*

*Светлана Алексеевна Трофимова — аспирант Новосибирского государственного технического университета,  
инженер Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН;  
e-mail: www.svetik-missy@mail.ru;*

*Иткина Наталья Борисовна — к.т.н., доцент кафедры Вычислительных технологий;  
Новосибирский государственный технический университет;  
e-mail: itkina.nat@yandex.ru.*

*Дата поступления — 30 мая 2017 г.*