

# ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩАЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

А. Н. Роголев

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск*

УДК 517.968

В статье решается задача построения границ множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), учитывающих самые наихудшие возмущения. Используемые для этого методы основаны на символьном представлении формул, приближающих оператор сдвига вдоль траектории решения этой системы. Построение символьных формул решений учитывает геометрические свойства решений дифференциальных уравнений. На основе этих формул вычисляются границы множеств решений ОДУ (области допустимых отклонений). Области допустимых отклонений применяются для проверки условий безопасности функционирования сложных систем, описываемых этими ОДУ. Приводятся примеры расчетов.

**Ключевые слова:** символьные формулы решений, априорная неопределенность, возмущающие воздействия, включения решений.

## Введение

Во многих практических задачах изменение вектора состояния происходит в условиях возмущающих воздействий. Как правило возмущающее воздействие влияет на динамику системы (процесса или иного объекта) и на качество изменения системы в выбранном направлении. Возмущающее воздействие разделяется на две категории: целенаправленное (управляющее) воздействие и возмущение (воздействие под влиянием фактора неопределенности), которое может быть регулярным (систематическим) или случайным (вероятностным). Если влияние управляющих воздействий и возмущения учитываются одновременно, то большинство исследователей к решению задач привлекают теорию игр [1], [2]. Исходное управление представляет игрока-союзника и подлежит определению, воздействия трактуют как управление игрока-противника, которые строятся на основе любой допустимой информации. Будем полагать, что известны лишь некоторые характеристики возмущений и погрешностей, а реализации их неизвестны. В данной работе вопросы игровой подход не рассматриваются.

Полагаем в дальнейшем, что возмущающее воздействие допускает двойное разделение [2]: либо это фактическое управляющее воздействие, либо это вектор возмущающих воздействий. К классу этих задач относятся задачи включения множеств достижимости [1], [2], задачи накопления возмущений (задача Булгакова о максимальном отклонении [3], которая получает свое дальнейшее развитие и приложения в наше время. В технических устройствах часто встречаются случаи, когда информация о поведении возмущений заключается лишь в знании ограничений на эти возмущения [4]. Такие задачи приходится, например, решать при отыскании максимального отклонения управляемой системы от желаемого состояния [5], [6], что характерно также в задачах наблюдения за накопившимися боковыми отклонениями движения самолета, или вычисления включения области достижимости при движении самолета на горизонтальной плоскости [7].

В статье рассматриваются вопросы применения гарантированных методов, основанных на символьном представлении формул решений [8], [9], [10], [11], [12] в типичных задачах, где требуется оценка множеств решений, при решении этих задач необходимо учитывать влияние многих реально существующих возмущений на движение системы. Под гарантированным (минимаксным) методом решения таких задач понимается метод, для которого целью является оптимизация влияния самых “худших” (максимальных) реализаций возмущений. Если реализация возмущающих воздействий окажется не самая максимальная (“наихудшая”), это чаще всего происходит, то показатель неблагоприятности динамики системы не превышает показатель, характерный для “наихудшего” случая. Гарантированный метод обеспечивает определенный результат при

любых допустимых реализациях возмущающего фактора. Описываемые в статье методы для этого используют символьные формулы решений и контролируют сохранение геометрических свойств решений (а также множеств решений) дифференциальных уравнений, что не только улучшает качественное поведение численных решений, но позволяет более точно определять поведение численных решений для более длительного интервала времени. Это способствует более точному вычислению границ множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 1 Вычисление гарантированных границ допустимых отклонений

Решается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая динамику состояний реального объекта (системы) с изменением времени

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z(t), u(t)), \quad (1)$$

где  $z = (z_i(t))$  — вектор состояния объекта (системы),  $u(t) = (u_j)$  — воздействия, определяемые нашим выбором, либо факторы, на выбор которых мы повлиять не можем — возмущения системы.

Метод строящий оценки множеств решений (гарантированный метод) выполняет приближение оператора сдвига вдоль траектории, и реализуется в два этапа.

На первом этапе выполняется конструирование (запись на хранение и преобразование) символьных формул  $\mathcal{S}(t, h, \mathcal{Y}^0) = \mathcal{S}_h(t, \mathcal{Y}^0)$  приближенных решений

$$\mathcal{S}_h(t^n, \mathcal{Y}^0) \circ \mathcal{S}_h(t^{n-1}, \mathcal{Y}^0) \circ \dots \mathcal{S}_h(t^0, \mathcal{Y}^0),$$

где вектор начальных значений  $\mathcal{Y}^0(t) = (\mathcal{Y}_1^0, \mathcal{Y}_2^0, \dots, \mathcal{Y}_n^0)$  является вектором символьных величин, представляющих вектор состояния системы (1).

Второй этап реализует две операции. Сначала определяются границы множества приближенных решений. Границы строятся по вычисленным максимальным значениям функций, представленных символьными формулами приближенных решений  $\mathcal{S}_h(t, \mathbf{Y}^0) = (\mathcal{S}_i(t, h, \mathcal{Y}^0)_{i=1,n})$ . Приблизить формулу  $\mathcal{F}$  метода сдвига вдоль траектории возможно, выбрав приближенный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и преобразовав зависимости между символьными переменными, входящими в форму этого метода. Разумно применять экономичные символьные формулы (последовательности имен переменных и действий над ними), эти формулы хранятся в памяти машины и преобразуются за наименьшее время и затраты памяти. Это означает, что выполнение методов, основанных на преобразовании символьных формул с последующим вычислением областей значений этих формул, принципиально отличается от реализации численных методов решения систем ОДУ. Хорошие результаты для методов преобразований символьных формул возможно получить, если моделируя процессы на больших промежутках промежутках времени, сохранять физические инварианты. Наиболее простой пример очень точное сохранение полной энергии системы (гамильтониана) даже для больших шагов сетки. Это свойство помогает определить характер динамического процесса, используя достаточно грубые вычисления (с большим шагом сетки).

Методы включения решений, применяющих символьные формулы решений, реализуются с контролем за производительностью вычислительного процесса: отслеживание за скоростью вычислений, экономией памяти и т.д. Так как для большинства задач оценки множеств решений появлялся рост границ множеств решений, это вызвало необходимость сохранять физические инварианты и геометрические структуры. Для этого использовались методы, сохраняющие геометрические структуры [13], начавшиеся развиваться в 90-е годы прошлого века. Если решаются задачи гамильтоновой механики, то такие методы называются симплектическими численными методами.

На втором этапе вычисляются границы областей глобальной ошибки приближенного решения. Численно решается уравнение для глобальной ошибки, полученное в некоторой промежуточной точке интервала  $[y(t^i), y(t^{i+1})]$ . Строится область точных решений (“коридор” точных решений), после этого определяются границы областей значений глобальной ошибки. Важно, что ни на одном шаге по времени не складываются значения оценок приближенных решений и оценок глобальной ошибки (в методе отсутствует накопление вычисленных значений).

Для получения результирующих границ множеств решений выполняется объединение двух множеств значений: множества значений приближенных решений и множества всех возможных глобальных ошибок, заданных своими границами. Границы объединения будут гарантированными границами множества точных

решений  $\mathcal{Y}(t) \subseteq \mathbf{Y}(t)$ . Эти границы применяются для получения математически точных результатов в оценках областей допустимых отклонений (контроль за безопасностью функционирования систем) в широком классе задач.

В начальный момент времени  $t_0$  и в момент времени  $t_k$  на заданном интервале времени для всех представленных методов строятся функциональные связи между областями всех решений системы ОДУ.

Приведем задачу оценки фазовых состояний в задаче наблюдений на основе методов, применяющих приближения операторов сдвига вдоль траектории.

1. Строим оценки для следующей систему управления

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= u, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $|u| \leq 1$ , а  $x(0) = 0$ .

Граница области достижимости  $Q(t)$  этой системы при любом  $T$  содержит две угловые точки с центральной симметрией. Координаты этих точек можно вычислить, если подставить в формулу Коши решения этой системы выражения  $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$ . Необходимо определить наихудшее возмущение, на котором достигается максимум квадратичного функционала

$$J = x^T(T)x(T) = \int_0^T b^T e^{A^T(T-t)} u(t) \int_0^T e^{A(T-\tau)} bu(\tau) d\tau.$$

Построение границ множества достижимости в фазовом пространстве, поможет вычислить самую удаленную от начала координат точку и возмущение, под действием которого достигается эта точка.

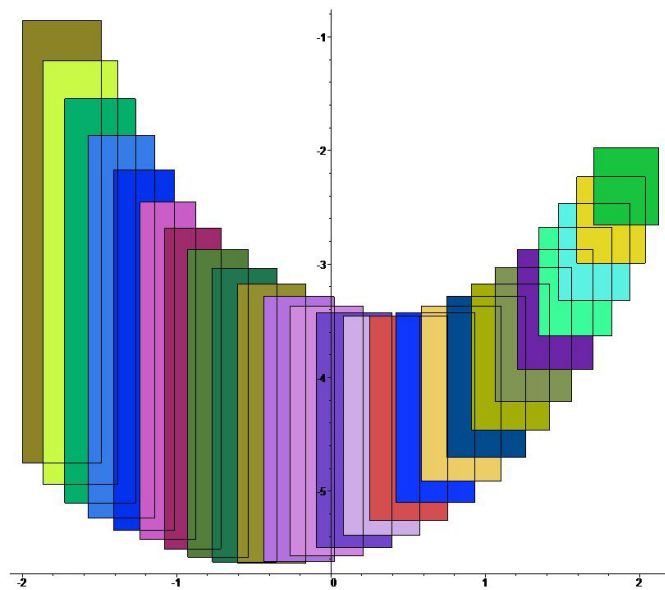


Рис. 1: Границы множеств достижимости системы (2)

2. Для обеспечения безопасности полетов применяются несколько систем управления самолетом, выполняющих контроль посадки самолета и захода на посадку в различных метеорологических условиях. Для различных значений дальности видимости на взлетно-посадочной полосе (ВПП) и значениях высоты принятия решения (ВПР) вводятся различные категории эксплуатации (посадочные метеоминимумы). Автоматическое управление отключается при достижении визуального контакта с ориентирами на Земле на высоте принятия решений, дальнейший этап захода и посадка осуществляется при ручном управлении по земным ориентирам. Если визуальный контакт с землей не установлен, то самолет уходит на второй круг. Длина участка траектории захода на посадку, оставшаяся после перехода на ручное управление, очень коротка, сам полет на ней выполняется на малой высоте. Это значит, что для исправления накопившихся отклонений может не хватить времени.

Поэтому необходимо решить задачу — вывести систему в некоторую область пространства состояний на момент принятия решений. Ее можно свести к двум следующим зависящим одна от другой задачам [14].

1. В первой задаче необходимо вычислить границы области  $D$  допустимых отклонений на ВПР, начиная из любой точки этой области самолет может совершить посадку на участок ВПП, отведенный для посадки, используя ручное управление за ограниченное время.
2. Во второй задаче необходимо определить границы области  $W$  возможных состояний системы на ВПР, в эту область самолет может попасть при любых допустимых, в том числе экстремальных возмущениях, используя автоматическое управление. Определив решения этих задач, можно проверить выполнение условия  $D \subset W$ .

Управление самолетом реализуется системой с необходимой точностью, если справедливо вложение, записанное выше. Если вложение не выполняется, то появляются так называемые непосадочные заходы, при управлении самолетом принимаются решения об уходе на второй круг.

Чтобы облегчить задачу будем изучать предпосадочную прямую — последний участок траектории захода на посадку. Координаты центра масс определяют положение самолета, для этого используется система координат  $xOz$ , связанная с землей, углом рыскания  $\psi$  и углом крена  $\gamma$ . Скорости изменения этих величин  $\dot{z}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$  также включены в фазовые координаты. Пусть ось  $Ox$  направлена вдоль продольной оси ВПП. Боковое уклонение центра масс самолета от оси ВПП определяет величина  $z$ . Отклонения элеронов (угол  $\delta_M$ ) и руля направления (угол  $\delta$ ) считаются управляющими воздействиями.

При записи уравнений бокового движения самолета, полагаем, что значения отклонений самолета от заданной траектории по величине принимают очень маленькие значения [14]. В уравнения использовались стандартные размеры ВВП и характерные значения предельных отклонений вероятностей их превышения [14].

На рис. 2 изображены границы включений областей допустимых отклонений под влиянием быстрых изменений скорости бокового ветра. Управляющее воздействие назначается так, чтобы расширить размеры этой области, а возмущение направлено на то, чтобы сделать эти размеры меньше.

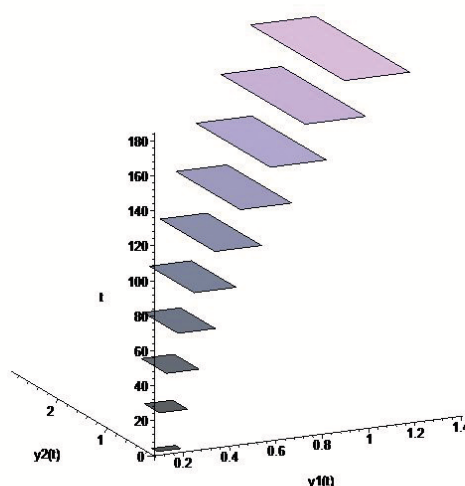


Рис. 2: Границы включений областей допустимых отклонений под влиянием быстрых изменений скорости

## Заключение

В реальных физических, химических, технических задачах часто возникают случаи, когда информация о поведении возмущений состоит лишь в знании ограничений на возмущения. Например, при отыскании максимального отклонения управляемой системы от желаемого состояния приходится решать такие задачи. Используемый показатель качества — максимум модуля выходной величины в заданный конечный момент времени — полезен для этих задач, так как требуется гарантия, что выходная величина или некоторая ее функция под действием возмущений не превзойдет заданных пределов. В этой статье показаны результаты применения метода вычисления границ областей решений с возмущающими воздействиями, применяющего для этого символьные формулы решений с учетом сохранения физических инвариантов и геометрических структур.

## Список литературы

- [1] Куржанский А.Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности: моногр. М.: Наука, 1977.
- [2] Черноусько Ф.Л., Оценивание фазового состояния динамических систем: моногр. М.: Наука, 1988.
- [3] Булгаков Б.В., Накопление возмущений линейных осциллирующих систем // Доклады Академии Наук, 1946. 51. — с. 339–342.
- [4] Овсеевич А.И., Шматков А.М., Сравнение вероятностного и гарантированного подходов прогноза фазовых состояний динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4 — с. 11–16
- [5] Гноенский Л.С. О точности некоторых нестационарных следящих систем // Автоматика и телемеханика, 1986. вып. 9. — с. 5–19.
- [6] Жермоленко В.Л. О максимальном отклонении линейной системы // Автоматика и телемеханика, 2012. вып. 7. — с. 3–14.
- [7] Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А. Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4 — с. 51–61.
- [8] Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.
- [9] Рогалев, А.Н. Вопросы устойчивости ансамблей дифференциальных уравнений / А.Н. Рогалев // Вычислительные технологии. 2008. 13(3) — с. 111–117.
- [10] Rogalyov, A.N. Computation of reachable sets guaranteed bounds / A.N. Rogalyov // Proceedings of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology — Control, Diagnostics, and Automation (ACIT — CDA 2010). — ACTA Press, B6, Calgary, Canada. 2010 — p. 132–139.
- [11] Рогалев А.Н. Вычисление гарантированных границ множеств достижимости управляемых систем // Автометрия. 2011. т. 47, № 3 — с. 100–112.
- [12] Рогалев А. Н. Безопасность сложных систем и оценки областей допустимых отклонений // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2014. № 4(44). С. 84–91.
- [13] Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. Second ed. Springer, 2006.
- [14] Федоров С.М., Драбкин В.В., Кейн В.М., Михайлов О.И. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами: моногр. М.: Транспорт, 1977.

*Алексей Николаевич Рогалев — к.ф.-м.н., ст. науч.сотр. Института  
вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск;  
e-mail: rogalyov@ict.krasn.ru.*

*Дата поступления — 31 мая 2017 г.*