

РАЗРАБОТКА НАДЕЖНОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

И. В. Целищева, Г. И. Шишкин

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Екатеринбург

УДК 519.624

В двусвязной области, представляющей из себя прямоугольник с выключенным кругом, рассматривается краевая задача Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции–диффузии с возмущающим параметром ε , принимающим произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. При стремлении параметра к нулю в окрестности границы возникают пограничные слои. В окрестности внешней границы, но вне окрестности угловых точек прямоугольника, слой является регулярным, а в окрестности угловых точек — угловым; в окрестности внутренней границы появляется регулярный круговой слой. Погранслои экспоненциально убывают при удалении от внешней и внутренней границ, что затрудняет построение специальных связанных сеток, сгущающихся по нормали к границе. Для краевой задачи строится итерационная схема метода Шварца на перекрывающихся подобластях, содержащих или границу круга, или границу прямоугольника. Показана ε -равномерная сходимость метода в равномерной норме с ростом числа итераций (и числа сеточных узлов в случае разностной схемы). Используются сетки Шишкина, сгущающиеся в окрестности пограничных слоев — сетки, кусочно-равномерные по нормали к гладким частям границ подобластей.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Дирихле, эллиптическое уравнение реакции–диффузии, пограничные слои, разностная схема, кусочно-равномерные сетки, декомпозиция области, метод Шварца, ε -равномерная сходимость.

Введение

В последние годы растет интерес к разработке надежных численных методов для решения сингулярно возмущенных задач в случае областей сложной геометрии и достаточно сложных пограничных слоев. К надежным относятся методы, специально ориентированные на разрешение пограничных и внутренних слоев в равномерной норме при всех допустимых значениях возмущающего параметра. В этой связи применение методов декомпозиции области является привлекательным, так как позволяет строить эффективные численные аппроксимации, являющиеся достаточно простыми на подобластях. Целью исследований в настоящей работе является построение итерационных схем на основе альтернирующего метода Шварца, позволяющего свести решение задачи к последовательности задач на более простых подобластях, содержащих особенности одного типа, а также осуществить в дальнейшем распараллеливание процесса решения задачи. При построении разностных схем используются классические монотонные аппроксимации и простейшие кусочно-равномерные сетки, сгущающиеся в окрестности пограничных слоев по каждой координате — сетки, кусочно-равномерные по нормали к гладким частям границ подобластей.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции–диффузии¹

$$\begin{aligned} L_{(1)}u(x) &\equiv \varepsilon^2 \Delta u(x) - a(x)u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ u(x) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

на двусвязном множестве \bar{D} — прямоугольнике \bar{D}_1 с выключенным кругом D_2 (см. Рис. 1). Здесь $D = D_1 \setminus D_2$, D_1 — прямоугольник, $D_1 = (-d_1 < x_1 < d_1) \times (-d_2 < x_2 < d_2)$, $D_2 = \{x : (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < d\}$ — круг, $d_1, d_2 > d > 0$; $\Gamma = \bar{D} \setminus D$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — граница прямоугольника, Γ_2 — граница круга. Коэффициент и свободный член уравнения $a(x)$, $f(x)$, $x \in \bar{D}$ и граничная функция $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$ (рассматриваемая на гладких частях границы Γ) предполагаются ограниченными и достаточно гладкими, причем коэффициент $a(x)$ удовлетворяет условию $a(x) \geq a_0 > 0$. Для простоты считаем, что на множестве угловых точек данные задачи (1) удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим гладкость решения на \bar{G} . Параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$.

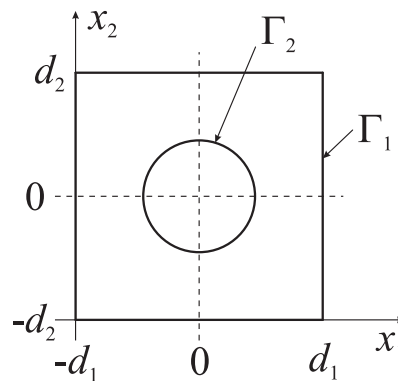


Рис. 1: Двусвязная область

При значении параметра, равном нулю, дифференциальное уравнение вырождается в уравнение нулевого порядка. При $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности границы Γ возникают пограничные слои. В окрестности множества Γ_1 , но вне окрестности угловых точек Γ_1^* , пограничный слой является *регулярным*, а в окрестности множества Γ_1^* — *угловым*. В окрестности множества Γ_2 появляется *круговой* погранслой, являющийся регулярным и экспоненциально убывающим при удалении от границы Γ_2 . Для построения сеток в окрестности внешней границы Γ_1 , где погранслоем является достаточно гладким и экспоненциально убывает при удалении от сторон прямоугольника, естественной системой координат является прямоугольная. В двусвязной кольцевой области в окрестности внутренней границы Γ_2 предлагается использовать полярную систему координат. При построении сеточных аппроксимаций, сходящихся ε -равномерно, такое поведение пограничных слоев обуславливает необходимость использования специальных *составных* сеток, согласованных с границами Γ_1 и Γ_2 , и применения метода декомпозиции области с достаточной шириной перекрытия подобластей, содержащих либо границу прямоугольника, либо границу круга.

2 Априорные оценки решения и производных

Обсудим оценки решения задачи (1) и его производных, используемые при построениях и обосновании схем.

С использованием теорем сравнения находим

$$|u(x)| \leq M, \quad x \in \bar{D}. \quad (2a)$$

Для решения краевой задачи и его производных справедлива стандартная оценка

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} u(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad x \in \bar{D}, \quad k \leq K. \quad (2b)$$

¹Запись $L_{(i)} (D_{(i)}, m_{(i)})$ означает, что этот оператор (множество, константа) введен в формуле (i). Через M (m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε и от параметров схем.

Приведем более тонкие оценки, получаемые на основе асимптотических представлений. Решение задачи (1) запишем в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (3)$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функции $U(x)$ и $V(x)$, $x \in \bar{D}$, являются соответственно решениями неоднородного и однородного уравнений. Для функции $U(x)$ выполняется оценка

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} U(x) \right| \leq M, \quad x \in \bar{D}, \quad k \leq K. \quad (4)$$

Функцию $V(x)$ представим в виде суммы функций

$$V(x) = V_0(x) + \sum_{j=1}^4 V_j(x) + \sum_{i,j=1}^4 V_{ij}(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (5)$$

где $V_0(x)$ — пограничный слой в окрестности границы Γ_2 , $V_j(x)$ и $V_{ij}(x)$ — соответственно, регулярный и угловой эллиптический пограничные слои в окрестности границы Γ_1 .

Для сингулярных компонент решения задачи из представления (5) получаются оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k}{\partial n} V_0(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-k} r(x, \Gamma_2)), \quad x \in \bar{D}, \\ \left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V_j(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k_j} \exp(-m \varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_1^j)), \quad x \in \bar{D}, \quad 1 \leq j \leq 4, \\ \left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} V_{ij}(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \min \left[\exp(-m \varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_1^i)), \exp(-m \varepsilon^{-1} r(x, \Gamma_1^j)) \right], \quad x \in \bar{D}, \quad k \leq K, \end{aligned} \quad (6)$$

где $r(x, \Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ ; $k_j = 1$ при $j = 1, 3$ и $k_j = 2$ при $j = 2, 4$; m — произвольное число из $(0, m^0)$, $m^0 = \min_{\bar{D}} [a^{1/2}(x)]$, $\partial^k / \partial n$ — производная по нормали к границе Γ_2 . Через Γ_1^j , $j = 1, 2, 3, 4$, обозначаем стороны прямоугольника D_1 . Считаем, что стороны Γ_1^1 и Γ_1^3 ортогональны оси x_1 , а Γ_1^2 и Γ_1^4 — оси x_2 ; стороны Γ_1^1 и Γ_1^2 содержат вершину $(-d_1, -d_2)$.

Оценки (6) показывают, что функции пограничного слоя убывают экспоненциально при удалении от соответствующих границ.

Априорные оценки получены в предположении, что данные краевой задачи (1) являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям согласования в угловых точках, обеспечивающим требуемую гладкость решения дифференциальной задачи и его регулярной и сингулярной компонент. В оценках (4), (6) $K \geq 2$.

3 Безытерационные разностные схемы

Построим разностную схему для задачи (1), предполагая выполненными оценки (2), (4), (6).

3.1. Рассмотрим случай, когда выполняется условие $D_2 = \emptyset$.

На множестве \bar{D} введем прямоугольную сетку

$$\bar{D}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \quad (7)$$

где $\bar{\omega}_s$ — вообще говоря, неравномерная сетка на $[-d_s, d_s]$ на оси x_s , $s = 1, 2$. Полагаем $h_s^i = x_s^{i+1} - x_s^i$, $x_s^i, x_s^{i+1} \in \bar{\omega}_s$, $h_s = \max_i h_s^i$, $h = \max_s h_s$, $s = 1, 2$. Через $N_s + 1$ обозначим число узлов сетки $\bar{\omega}_s$, $N = \min_s N_s$, $h \leq MN^{-1}$.

На сетке $\bar{D}_{h(7)}$ задаче (1) сопоставим разностную схему [1]

$$\begin{aligned} \Lambda_{(8)} z(x) &\equiv \left\{ \varepsilon^2 \sum_{s=1,2} \delta_{\bar{x}_s} \hat{x}_s - a(x) \right\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \\ z(x) &= \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $D_h = D \cap \bar{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \bar{D}_h$, $\delta_{\bar{x}_s} \hat{x}_s z(x) = z_{\bar{x}_s} \hat{x}_s(x)$ — вторые разностные производные по x_s на неравномерной сетке. Разностная схема (8), (7) является монотонной [1].

Разностная схема (8), (7) сходится лишь при фиксированном значении параметра, а именно, при условии $N^{-1} = o(\varepsilon)$. Для погрешности приближенного решения верна оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M (\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1}, \quad x \in \bar{D}_h. \quad (9)$$

Введем специальную сетку [2]

$$\bar{D}_h^c = \bar{\omega}_1^c \times \bar{\omega}_2^c, \quad (10a)$$

где $\bar{\omega}_s^c = \bar{\omega}_s^c(\sigma_s)$ — кусочно-равномерная сетка, сгущающаяся в окрестности концов отрезка $[-d_s, d_s]$, σ_s — параметр, зависящий от ε и N , $\sigma_s \leq 4^{-1}d_s$. Строим сетку $\bar{\omega}_s^c(\sigma_s)$ равномерной на каждом из множеств $[0, \sigma_s]$, $[\sigma_s, d_s - \sigma_s]$, $[d_s - \sigma_s, d_s]$; шаг сетки равен $h_s^{(1)} = \sigma_s(N_s/4)^{-1}$ на множествах $[0, \sigma_s]$, $[d_s - \sigma_s, d_s]$ и $h_s^{(2)} = (d_s - 2\sigma_s)(N_s/2)^{-1}$ на множестве $[\sigma_s, d_s - \sigma_s]$. Величина σ_s определяется соотношением

$$\sigma_s = \sigma_{s(10)}(\varepsilon, N_s) = \min [d_s/4, M\varepsilon \ln N_s], \quad (10b)$$

где $M \geq 2(m_{(6)})^{-1}$.

Разностная схема (8), (10) сходится ε -равномерно:

$$|u(x) - z(x)| \leq MN^{-1} \ln N, \quad x \in \bar{D}_h^c. \quad (11)$$

Т е о р е м а 1. Пусть для решения краевой задачи (1) и его компонент из представлений (3), (5) выполняются оценки (2), (4), (6) при $K = 4$. Тогда решение разностной схемы (8) на сетке (10) сходится ε -равномерно; на сетке (7) схема сходится при условии $N^{-1} = o(\varepsilon)$. Для решений разностной схемы на сетках (7) и (10) справедливы оценки (9) и (11) соответственно.

3.2. Подобным образом строится ε -равномерно сходящаяся схема в том случае, когда $D_2 \neq \emptyset$.

В случае двухсвязной кольцевой области

$$\bar{D}_3^* = \bar{D}_3 \setminus D_2,$$

где \bar{D}_3 — некоторая r_0 -окрестность множества D_2 , перейдя к полярным координатам r и ψ , связанным с декартовыми формулами $x_1 = r \cos \psi$, $x_2 = r \sin \psi$ (Рис. 2), рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} L_{(1)}^{r, \psi} u(r, \psi) &= f(r, \psi), \quad (r, \psi) \in D_3^*, \\ u(r, \psi) &= \varphi(r, \psi), \quad (r, \psi) \in \Gamma_3^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Данные задачи в полярных координатах (r, ψ) предполагаются достаточно гладкими, дифференциальный оператор $L_{(1)}^{r, \psi}$ задается выражением

$$L_{(1)}^{r, \psi} u(r, \psi) = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right) - a(r, \psi)u(r, \psi)$$

или в дивергентном виде главной части оператора:

$$L_{(1)}^{r, \psi} u(r, \psi) = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right) - a(r, \psi)u(r, \psi).$$

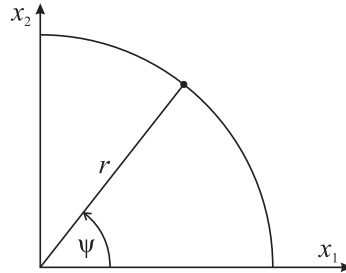


Рис. 2: Полярные координаты

Аппроксимируем задачу (12) неявной разностной схемой

$$\begin{aligned}\Lambda_{(8)}^{r,\psi} z(r, \psi) &= f(r, \psi), \quad (r, \psi) \in D_{3h}^*, \\ z(r, \psi) &= \varphi(r, \psi), \quad (r, \psi) \in \Gamma_{3h}^*; \end{aligned} \quad (13)$$

в разностном операторе $\Lambda_{(8)}^{r,\psi}$ в полярных координатах производная $\partial u / \partial r$ аппроксимируется первой разностной производной $\delta_r z$ (вперед).

Для схемы (13) получается оценка, подобная оценке (9)

$$|u(r, \psi) - z(r, \psi)| \leq M (\varepsilon + N_*^{-1})^{-1} N_*^{-1}, \quad (r, \psi) \in \overline{D}_{3h}^*, \quad (14)$$

где $N_* + 1$ — минимальное число узлов сеток по r и ψ .

На сетке, равномерной по ψ и кусочно-равномерной по r , имеем оценку, подобную (11)

$$|u(r, \psi) - z(r, \psi)| \leq M N_*^{-1} \ln N_*, \quad (r, \psi) \in \overline{D}_{3h}^*. \quad (15)$$

4 Схемы метода декомпозиции области

Опишем классический альтернирующий метод Шварца на перекрывающихся областях, позволяющий проводить аналитические вычисления, подобный рассмотренному в [3]. Укажем условия, обеспечивающие ε -равномерную сходимости последовательности решений при увеличении числа итераций. В построениях используется техника работ [2, 4].

4.1. Пусть совокупность открытых подобластей

$$D^1, D^2, \dots, D^K \quad (16)$$

с кусочно-гладкими границами Γ^k , $\Gamma^k = \Gamma(D^k) = \overline{D}^k \setminus D^k$, образует покрытие множества D : $D = \bigcup_{k=1}^K D^k$.

Через δ^k обозначим минимальную толщину перекрытия пары множеств D^k и $D^{[k]}$ — объединения подобластей, не содержащих D^k :

$$D^{[k]} = \bigcup_{i=1, i \neq k}^K D^i,$$

а через δ — наименьшую из величин δ^k , $k = 1, \dots, K$; δ — минимальное перекрытие подобластей из (16). Величина δ , вообще говоря, может зависеть от параметра ε : $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пусть

$$u^0(x), \quad x \in \overline{D} \quad (17a)$$

есть начальная функция в итерационном процессе — произвольно заданная функция, удовлетворяющая краевому условию из (1). Находим функции $u^n(x)$, $x \in \overline{D}$, $n = 1, 2, \dots$, решая последовательно краевые задачи

$$L_{(17)}(u^{n+\frac{k}{K}}(x)) \equiv L_{(1)}u^{n+\frac{k}{K}}(x) - f(x) = 0, \quad x \in D^k, \quad (17b)$$

$$u^{n+\frac{k}{K}}(x) = u^{n+\frac{k-1}{K}}(x), \quad x \in \overline{D} \setminus D^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$u^{n+1}(x) = u^{n+\frac{K}{K}}(x), \quad x \in \overline{D}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Каждая вспомогательная функция $u^{n+\frac{k}{K}}(x)$, $x \in \overline{D}$, является решением задачи Дирихле на множестве \overline{D}^k

$$L_{(17)}(u^{n+\frac{k}{K}}(x)) = 0, \quad x \in D^k, \quad u^{n+\frac{k}{K}}(x) = u^{n+\frac{k-1}{K}}(x), \quad x \in \Gamma^k$$

и совпадает с функцией $u^{n+\frac{k-1}{K}}(x)$ на множестве $\overline{D} \setminus D^k$. Последовательность функций $u^n(x)$, $x \in \overline{D}$, $n = 1, 2, \dots$, назовем решением итерационного процесса (17), (16) — альтернирующего метода Шварца.

Условие на ширину перекрытия подобластей

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad \inf_{\varepsilon \in (0, 1]} [\varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon)] > 0, \quad (18)$$

эквивалентное условию $\delta = \delta(\varepsilon) \geq m_{(18)}\varepsilon$, является достаточным для ε -равномерной сходимости решения метода Шварца (17), (16) при $n \rightarrow \infty$:

$$|u(x) - u^n(x)| \leq Mq^n, \quad x \in \overline{D}, \quad \text{где } q \leq 1 - m. \quad (19)$$

Заметим, что величина q , вообще говоря, $q(\varepsilon, \delta)$ стремится к единице при $\delta \rightarrow 0$ и фиксированных значениях параметра ε . При $\delta = 0$ функция $u^n(x)$ не сходится при $n \rightarrow \infty$ к решению краевой задачи даже при фиксированных ε .

Это же условие является и необходимым. Если условие (18) нарушается и для величины δ выполняется условие

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad \inf_{\varepsilon \in (0, 1]} [\varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon)] = 0, \quad (20)$$

то функция $u^n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ не сходится ε -равномерно. Таким образом, в случае условия (20) для любой сколь угодно большой величины n можно указать такое значение параметра ε , $\varepsilon = \varepsilon(n)$, что для функций $u^n(x) = u^n(x; \varepsilon(n), \delta(\varepsilon))$ и $u(x) = u(x; \varepsilon(n))$ будет выполняться неравенство

$$\max_{\overline{D}} |u(x) - u^n(x)| \geq m_{(21)}, \quad (21)$$

где величина $m_{(21)}$ не зависит от n . Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть задачу Дирихле для однородного одномерного уравнения с постоянными коэффициентами.

Т е о р е м а 2. Условие (18) является необходимым и достаточным для ε -равномерной сходимости решения $u^n(x)$ итерационного метода Шварца (17), (16) при $n \rightarrow \infty$ со скоростью геометрической прогрессии к решению $u(x)$ краевой задачи (1). Пусть для решения задачи и его компонент выполняются оценки (2), (4), (6) при $K = 4$. Тогда при условии (18) для решения метода Шварца (17), (16) выполняется оценка (19).

4.2. Подобным образом строятся итерационные разностные схемы метода Шварца на кусочно-равномерных сетках, сгущающихся в пограничных слоях.

На каждом из множеств \overline{D}^k введем специальные сетки

$$\overline{D}_h^k \equiv \overline{D}_h^{kc} = \overline{D}^k \cap \overline{D}_{h(10)}^c. \quad (22)$$

Считаем, что грани множеств \overline{D}^k проходят через узлы сетки.

Пусть функция $z^0(x)$, $x \in \overline{D}_h$, есть произвольная функция, удовлетворяющая соотношению

$$z^0(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \quad (23a)$$

Определим последовательность сеточных функций $z^1(x)$, $z^2(x), \dots$, $x \in \overline{D}_h$. Последовательность вспомогательных функций $z^{n+\frac{k}{K}}(x)$, $k = 1, \dots, K$, $n = 1, 2, \dots$, находим из решения таких сеточных задач

$$\Lambda_{(23)}(z^{n+\frac{k}{K}}(x)) \equiv \Lambda_{(8)} z^{n+\frac{k}{K}}(x) - f(x) = 0, \quad x \in D_h^k, \quad (23b)$$

$$z^{n+\frac{k}{K}}(x) = z^{n+\frac{k-1}{K}}(x), \quad x \in \overline{D}_h \setminus D^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$z^{n+1}(x) = z^{n+\frac{K}{K}}(x), \quad x \in \overline{D}_h, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Каждая функция $z^{n+\frac{k}{K}}(x)$ определена на множестве \overline{D}_h , являясь решением сеточной задачи Дирихле, и совпадает с функцией $z^{n+\frac{k-1}{K}}(x)$ на множестве $\overline{D}_h \setminus D^k$. Функцию $z^n(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $n = 1, 2, \dots$, назовем решением итерационного сеточного метода Шварца (23), (22).

С учетом оценок (11), (15) и (19), решение итерационного сеточного метода Шварца на перекрывающихся подобластях, содержащих либо границу прямоугольника, либо границу круга, сходится ε -равномерно

$$|u(x) - z^n(x)| \leq M(N^{-1} \ln N + N_*^{-1} \ln N_* + q^n), \quad x \in \overline{D}_h, \quad (24)$$

с ростом числа сеточных узлов N , N_* и числа итераций n в методе Шварца. В (24) $q \leq 1 - m$.

Т е о р е м а 3. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда в случае условия (18) решение итерационного сеточного метода Шварца (23) на сетке (22) при $N, N_*, n \rightarrow \infty$ сходится ε -равномерно к решению краевой задачи (1) с оценкой (24).

Заключение

В случае модельной краевой задачи Дирихле в прямоугольной области с удаленным кругом для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции–диффузии построены и исследованы континуальная, а также разностная (на кусочно-равномерных сетках, сгущающихся в пограничных слоях) схемы метода декомпозиции области на перекрывающихся подобластях, содержащих либо границу прямоугольника, либо границу круга. Получены априорные оценки решения краевой задачи и его производных, показывающие, что в окрестности пограничных слоев производные сингулярных компонент решения неограниченно растут при стремлении возмущающего параметра ε к нулю. Указаны необходимые и достаточные условия, которые обеспечивают ε -равномерную сходимость решений схем декомпозиции при увеличении числа итераций. Показано, что построенный итерационный метод Шварца сходится ε -равномерно в равномерной норме с ростом числа итераций (а в случае разностной схемы — и числа сеточных узлов). Использовались сетки Шишкина — сетки, кусочно-равномерные по нормали к гладким частям границ подобластей. В случае сеток с произвольным распределением узлов, в частности равномерных сеток, имеет место сходимость сеточного метода лишь для фиксированных значений параметра ε , а именно, при условии $h = o(\varepsilon)$, где h — эффективный максимальный шаг сеток.

Список литературы

- [1] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [2] Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
- [3] Шишкин Г. И., Целищева И. В. Параллельные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптических уравнений // Матем. моделирование. 1996. Т. 8, N 3. С. 111–127.
- [4] Shishkin G. I., Shishkina L. P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Vol. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009.

*Ирина Васильевна Целищева — вед. математик Института математики и механики УрО РАН;
e-mail: tsi@imm.uran.ru;*

*Григорий Иванович Шишкин — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института математики и механики УрО РАН;
e-mail: shishkin@imm.uran.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.