

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Г. А. Бабичева¹, Н. А. Каргаполова^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 519.6

В работе исследуются два алгоритма моделирования однородных гауссовских двумерных полей с четырехпараметрической экспоненциальной корреляционной функцией. В основе первого алгоритма лежат метод факторизации корреляционной функции и рандомизация ее параметров. Второй алгоритм основан на методе условных распределений для моделирования векторных гауссовских последовательностей с блочно-теплицевой корреляционной матрицей. Основной вопрос, рассматриваемый в работе — численное исследование областей практической применимости указанных алгоритмов.

Ключевые слова: численное моделирование, однородное гауссовское поле, регулярная сетка.

Введение

При решении широкого класса прикладных задач методами статистического моделирования достаточно часто приходится моделировать случайные гауссовские поля с заданной корреляционной структурой. Существует ряд алгоритмов моделирования случайных полей, например, векторные алгоритмы, основанные на методе условных распределений, на векторных моделях авторегрессии, скользящего среднего, смешанных моделях авторегрессии и скользящего среднего и др., позволяющих строить реализации гауссовских полей дискретных аргументов с заданной корреляционной структурой [7].

В ряде задач статистической метеорологии корреляционная структура однородного поля определяется функцией вида

$$r(x_1, y_1, x_2, y_2) = \exp\left(-(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)^\theta\right), \quad (1)$$

где (x_i, y_i) , $i = 1, 2$ — координаты точки поля, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, а $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ — некоторые числовые коэффициенты. Перечисленные выше алгоритмы можно использовать для моделирования случайных полей с корреляционной структурой, определяемой функцией вида (1). Однако, они обладают общим недостатком: моделирование большого количества реализаций случайного поля оказывается достаточно трудоёмкой задачей в смысле затрат времени на вычисления и затрат машинной памяти. Кроме того, для корреляционных функций указанного выше вида стандартные алгоритмы при некоторых наборах параметров $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ вычислительно неустойчивы. В связи с этими недостатками, для различных частных случаев разрабатывают специальные более экономичные и устойчивые алгоритмы моделирования [5, 6, 7].

В данной работе исследуются два алгоритма моделирования однородных гауссовских двумерных полей с четырехпараметрической экспоненциальной корреляционной функцией вида (1). В основе первого алгоритма лежат метод факторизации корреляционной функции и рандомизация ее параметров. Второй алгоритм основан на методе условных распределений для моделирования векторных гауссовских последовательностей с блочно-теплицевой корреляционной матрицей. Основной вопрос, рассматриваемый в работе — численное

исследование областей практической применимости указанных алгоритмов. В частности, в работе будет показано, что первый алгоритм применим для более узкого, по сравнению с вторым, класса корреляционных функций, но позволяет устойчиво моделировать поля на сетках с существенно большим числом узлов.

1 Описание алгоритмов

В данном параграфе приведено краткое описание двух алгоритмов моделирования гауссовских однородных полей на регулярных сетках с корреляционными функциями вида (1).

Для корреляционных функций $r(\rho) = \exp(-\alpha\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r(x_1, y_1, x_2, y_2) = \exp(-(\alpha x^2 + \gamma y^2))$, которые являются частными случаями функции вида (1), существует эффективный алгоритм моделирования гауссовских полей на регулярных сетках. В литературе его называют алгоритмом “по строкам и столбцам” [2, 3, 7]. При его реализации корреляционные матрицы задаются отдельно на горизонтальных и вертикальных сечениях поля. В основе этого алгоритма лежит тот факт, что корреляционная матрица поля представима в виде прямого произведения корреляционных матриц его горизонтального и вертикального сечений. Преимуществом данного метода является то, что он сводится к последовательному использованию алгоритмов моделирования гауссовских векторов с теплицевыми корреляционными матрицами, заданными функциями вида $r(x) = \exp(-\alpha x^2)$. Для них алгоритмы, основанные на методе условных распределений, реализуются с высокой точностью.

Алгоритм моделирования “по строкам и столбцам” имеет специфику, которую можно проиллюстрировать следующим примером. Предположим, что мы моделируем однородное гауссовское поле на равномерной прямоугольной сетке размера $m \times n$ узлов (для простоты здесь и далее используем единичный шаг сетки). Элементы корреляционных матриц горизонтального $R^{(1)} = (r_{ij}^{(1)})$, $i, j = 1, \dots, n$ и вертикального $R^{(2)} = (r_{kp}^{(2)})$, $k, p = 1, \dots, m$ сечений поля задаются функциями $r_{ij}^{(1)} = \exp(-\alpha_1|i-j|^2)$ и $r_{kp}^{(2)} = \exp(-\alpha_2|k-p|^2)$ соответственно. После реализации алгоритма “по строкам и столбцам” корреляционная функция построенного однородного случайного поля имеет вид

$$r(i, j, k, p) = \exp\left(-\left(\alpha_1(i-j)^2 + \alpha_2(k-p)^2\right)\right).$$

При этом, изолинии корреляционной функции (сечения поверхности корреляционной функции горизонтальными плоскостями) будут представлять собой эллипсы с главными осями, ориентированными вдоль осей Ox , Oy .

Однако, в прикладных задачах достаточно часто встречаются корреляционные функции случайных полей, изолинии которых являются эллипсами с главными осями, повернутыми относительно положительных направлений осей Ox , Oy на некоторый угол $\phi \in (0^\circ, 180^\circ)$. Так, например, для корреляционной функции поля геопотенциала на уровне 500 мбар угол поворота $\phi \approx 45^\circ$, а для корреляционной функции поля скорости ветра на этом же уровне $\phi \approx 100^\circ$ [1]. Для моделирования полей с такими корреляционными функциями в работе [6] была предложена модификация метода “по строкам и столбцам”. Суть предложенной модификации заключается в том, что после моделирования векторов с корреляционной матрицей $R^{(1)}$, на втором шаге алгоритма “по строкам и столбцам” производится преобразование не по вертикальным сечениям поля, а по наклонным (т.е. по узлам, находящимся на прямых некоторого наклона d относительно горизонтального направления сетки). Эта модификация имеет свои ограничения, в том числе угол ϕ не может быть произвольным. Ограничения на угол ϕ накладываются за счет того, что должно выполняться равенство

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2d\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1(d^2 - 1)},$$

а сдвиг d не может превышать число n узлов сетки в горизонтальном направлении. Второй алгоритм, рассматриваемый в данной статье, основан на методе условных распределений вероятностей, в котором матрицы коэффициентов регрессии вычисляются на основе решения уравнений Юла–Волкера с блочно-теплицевой корреляционной матрицей с помощью известного рекурсивного алгоритма Робинсона [4, 7]. Этот алгоритм является общим в том смысле, что теоретически он должен работать для произвольной блочно-теплицевой корреляционной матрицы, в том числе и матрицы, построенной с помощью корреляционной функции вида (1). Также, теоретически, этот алгоритм позволяет моделировать гауссовские поля с произвольным углом поворота ϕ . На практике же, этот алгоритм устойчив не для всех наборов параметров корреляционной функции (1). Соответствующие примеры будут приведены в следующем параграфе.

2 Численные эксперименты

Был проведен ряд экспериментов по моделированию гауссовских полей с корреляционной функцией вида (1) с помощью алгоритмов, описанных в предыдущем параграфе. Во всех экспериментах моделировалось N реализаций поля размерности 25×30 узлов.

Если говорить об алгоритме, основанном на методе условных распределений вероятностей, то эксперименты показали, что для $\theta \leq 0.85$ алгоритм работает корректно при произвольных параметрах α, β, γ и определяемом этими параметрами угле ϕ . В качестве примера на Рис. 1 и Рис. 2 приведены теоретические изолинии и изолинии, полученные при оценке корреляционной функции по модельным реализациям для различных наборов параметров α, β, γ .

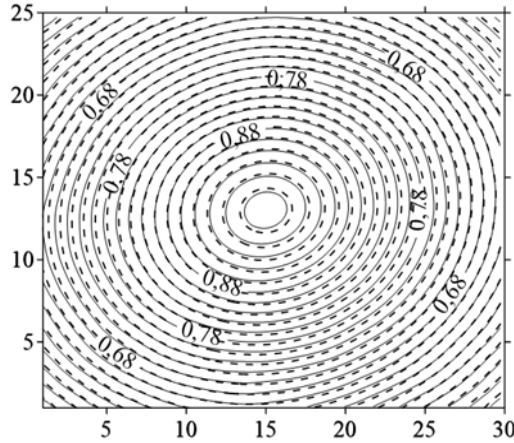


Рис. 1: Теоретические (пунктир) и эмпирические (сплошная) изолинии. $\alpha = 0.00098$, $\beta = -0.00016$, $\gamma = -0.00147$, $\theta = 0.7$, $N = 10^5$.

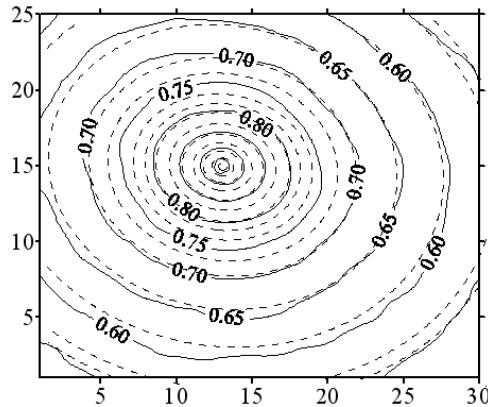


Рис. 2: Теоретические (пунктир) и эмпирические (сплошная) изолинии. $\alpha = 0.00147$, $\beta = 0.00016$, $\gamma = 0.00098$, $\theta = 0.36$, $N = 10^4$.

При $\theta > 0.85$ алгоритм, основанный на методе условных распределений перестает быть устойчивым. При $\theta > 0.85$ используемые при моделировании матрицы оказываются плохо обусловленными, в следствие чего при моделировании накапливаются существенные ошибки. Для иллюстрации на Рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные изолинии при $\theta = 0.9$.

Несмотря на то, что теоретических ограничений на размерность сетки при использовании рассматриваемого алгоритма нет, на практике уже для сеток размерностью порядка 100×100 узлов алгоритм оказывается

непригодным в том смысле, что время построения одной реализации поля слишком велико. Таким образом, можно заключить, что алгоритм на основе метода условных распределений применим только для моделирования на относительно небольших сетках и при $\theta \leq 0.85$.

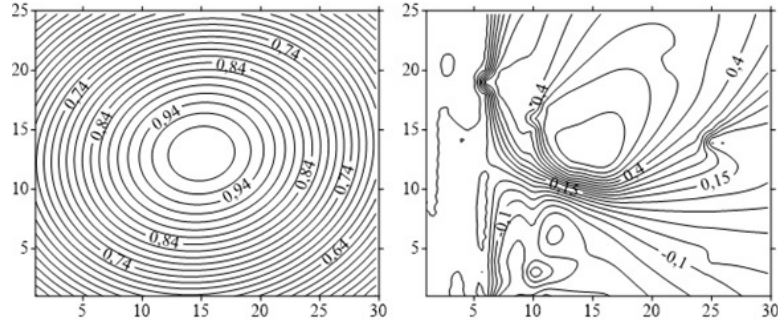


Рис. 3: Теоретические (слева) и эмпирические (справа) изолинии. $\alpha = 0.00098$, $\beta = -0.00016$, $\gamma = -0.00147$, $\theta = 0.9$, $N = 10^5$.

Что касается алгоритма, основанного на модификации метода “по строкам и столбцам”, то по своему построению он применим только для случая $\theta = 1$ (заметим, что для такого значения θ алгоритм на основе метода условных распределений, как уже отмечалось выше, неустойчив). При этом алгоритм устойчиво работает при произвольных параметрах α , β , γ (хотя и требует регуляризации корреляционной матрицы в ряде случаев). Также следует отметить, что численные эксперименты не выявили каких-либо ограничений на размерность сетки, кроме тех, что накладываются размером оперативной памяти компьютера. На Рис. 4 приведен пример теоретических и экспериментальных изолиний, полученных при использовании рассматриваемой модификации метода “по строкам и столбцам”.

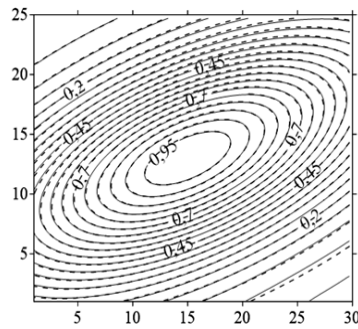


Рис. 4: Теоретические (пунктир) и эмпирические (сплошная) изолинии. $\alpha = 0.005$, $\beta = -0.01$, $\gamma = 0.015$, $\theta = 1$, $N = 10^5$.

Заключение

В работе были численно исследованы области практической применимости двух алгоритмов моделирования однородных гауссовских полей с корреляционной структурой, определяемой функцией вида (1). Было показано, что алгоритм, основанный на методе условных распределений устойчиво работает для значений параметра $\theta \leq 0.85$, и неустойчив при $\theta > 0.85$. При этом использование этого алгоритма позволяет моделировать поля с произвольным углом поворота ϕ , но лишь на сетках с относительно небольшим числом узлов. В тоже время, модификация алгоритма “по строкам и столбцам” применима только при $\theta = 1$, и возможные углы поворота определяются соотношениями между параметрами корреляционной функции. Зато на раз-

мерность сетки, на которой осуществляется моделирование, не накладываемся никаких ограничений, кроме тех, что определяются размером оперативной памяти компьютера, на котором производится моделирование.

Список литературы

- [1] Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л: Гидрометеиздат, 1976.
- [2] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
- [3] Каган Р.Л., Федорченко Е.И. К вопросу о статистическом моделировании двумерных метеорологических полей // Труды ГГО. 1973/.No 308. С. 20–26.
- [4] Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
- [5] Огородников В.А. Моделирование одного класса изотропных гауссовских полей // Сб. научных трудов “Теория и приложения статистического моделирования”.Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 25–30.
- [6] Babicheva G.A., Kargapolova N.A., Ogorodnikov V.A. Special algorithms for the simulation of homogeneous random fields // Numerical Analysis and Applications. 2016. .Vol. 9, iss. 2. P. 95–106.
- [7] Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. The Netherlands, Utrecht: VSP, 1996.

*Галина Андреевна Бабичева — асп. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: galinab2811@gmail.com;*

*Нина Александровна Каргаполова — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
e-mail: nkargapolova@gmail.com.*

Дата поступления — 15 мая 2017 г.