

ГРАДИЕНТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ СОВМЕЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

О. И. Криворотько^{1,2}, С. И. Кабанихин^{1,2}

¹ Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

УДК 519.63

Предложен численный алгоритм решения задачи определения источника возмущений для системы нелинейных уравнений мелкой воды одновременно по двум типам измерений отклонения возмущения водной поверхности от состояния покоя в конечном числе точек пространственной области и в фиксированный момент времени на части области. Исследуемая совмещенная обратная задача сводится к задаче минимизации целевого функционала, характеризующего квадратичное отклонение моделируемых данных от измерений. Получен явный вид градиента целевого функционала, связанный с решениями двух сопряженных задач.

Ключевые слова: нелинейные уравнения мелкой воды, обратная задача, определение источника возмущений, цунами, совмещенные данные, градиентный подход, градиент функционала.

Введение

В настоящее время одним из важнейших направлений современной вычислительной математики является моделирование различных природных процессов, связанных с перемещением потоков жидкости в мировом океане. К числу таких процессов можно отнести возникновение приливных волн или волн цунами. Основной математической моделью, описывающей динамику приливных волн, является система уравнений динамики мелкой воды. Теория мелкой воды основывается на предположениях малости вертикального ускорения частицы на свободной поверхности по отношению к ускорению свободного падения и слабой зависимости горизонтальных скоростей от вертикальной координаты.

Разрушительность события цунами, порожденного подводным землетрясением, поставили вопрос о прогнозировании этого явления. Любой прогноз события цунами подразумевает наличие ошибки в расчетах (неточные сейсмические данные и данные с подводных датчиков, спутниковые данные, вычислительные и модельные ошибки), в результате чего увеличивается вероятность ложного прогноза. Поэтому необходимо добиться высокой точности прогноза цунами. Одним из важных вопросов является уточнение параметров источника цунами, а именно параметров землетрясения. В работе L. Manshina и D. Smylie [1] приведена связь параметров землетрясения с начальным возмущением водной поверхности. Поэтому вопрос определения параметров землетрясения сводится к вопросу определения формы начального возмущения свободной поверхности. Задача восстановления источника цунами, в свою очередь, не является однозначно разрешимой (В.М. Кайстренко, 1972, [2]). Первые исследования, связанные с методом обращения формы волны цунами, были опубликованы в работах K. Satake 1987 и 1989 гг. [3, 4]. Основная идея метода заключается в применении функции Грина для определения параметров сейсмического разлома по измерениям проходящей волны в точках пространства с привлечением априорной информации об источнике цунами. В качестве альтернативы технике K. Satake в работе C. Pires и P. Miranda (2001, [5]) был предложен сопряженный метод обращения формы волны цунами. В отличие от своих предшественников этот метод ориентирован на нелинейные уравнения мелкой воды. Предложенный метод уточняет форму начального возмущения,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-31-00189 и № 16-29-15120).

которая задается как линейной, так и нелинейной функцией от любого набора свободных параметров. Различные дискретные сопряженные методы успешно были применены в геофизике с целью прогнозирования распространения волн цунами (см. [6] и ссылки в ней).

Для приемлемого моделирования процесса распространения волн цунами необходимо задать точное начальное условие (т.е. начальное возмущение водной поверхности) и выбрать оптимальные параметры вычислительной сетки. Для линейной модели теории мелкой воды были предложены несколько подходов выбора оптимальных размеров сетки (например, [7, 8]. Форма начального возмущения может быть получена из параметров геологического разлома [1]. Однако информации о сейсмических волнах, как правило, бывает недостаточно, чтобы определить все параметры источника возмущения в режиме реального времени. В работе А. Piatanesi, S. Tinti, G. Pagnoni (2001, [9]) используется модель, в которой пространство данных состоит из конечного набора приемников, измеряющих высоту проходящей волны в точке, а пространство параметров модели представлено значениями начальной высоты столба жидкости в заданном числе точек. Предлагаемый в работе подход применим в том случае, когда прямая задача может быть записана в терминах функции Грина. В работах С.И. Кабанихина с соавторами (2012, [10]; 2014, [11]) исследованы градиентные методы (метод итерации Ландвебера и метод сопряженных градиентов) восстановления источника возмущений для уравнений мелкой воды в линейном приближении. В рамках линейной теории мелкой воды в работах Т.А. Ворониной [12–15]) была исследована задача восстановления источника цунами с помощью метода усеченного сингулярного разложения оператора обратной задачи. Впервые этот подход был применен в 1998 году Т.А. Ворониной и В.А. Чевердой для модельного случая постоянной глубины в работе [12] и позднее успешно применен к более сложным моделям для реальной батиметрии побережья Перу с зашумленными синтетическими данными.

В случае, когда волна приближается к точкам (или времени) измерений, справедливы нелинейные уравнения мелкой воды, более точно описывающие движение жидкости. В данной работе получен явный вид градиента целевого функционала, характеризующий отклонение модельных данных от измерений, и предложен градиентный подход численного решения совмещенной обратной задачи для нелинейных уравнений мелкой воды, которая заключается в определении источника возмущений по измерениям отклонения водной поверхности от состояния покоя в конечном числе точек пространства и в фиксированный момент времени на части области.

1 Совмещенная обратная задача для системы нелинейных уравнений мелкой воды

Рассмотрим совмещенную постановку задачи уточнения источника цунами в рамках нелинейных уравнений мелкой воды. Запишем в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ начально-краевую задачу определения поля скоростей и смещения водной поверхности для уравнений мелкой воды в размерном виде без учета воздействия внешних сил Кориолиса и донного трения

$$\begin{cases} \eta_t + [u(\eta + H)]_x + [v(\eta + H)]_y = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x = 0, & t > 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y = 0, \\ \eta(x, y, 0) = q(x, y), \quad u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0; \\ \eta|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ описывает смещение водной поверхности относительно невозмущенного уровня, $H(x, y)$ — функция дна, u и v — компоненты скорости частиц жидкости вдоль осей x и y , соответственно, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, область $\Omega := (0, L_x) \times (0, L_y)$ предполагается прямоугольной (для простоты изложения). Функция $q(x, y)$ описывает источник возмущения. Для простоты изложения приведены однородные граничные условия. Схематичное изображение движения волны в мелкой воде и масштабы моделирования представлены на рисунке 1.

Пусть о колебаниях свободной поверхности задана дополнительная информация, а именно измерения отклонения водной поверхности от состояния покоя в конечном числе точек пространственной области

$$\eta(x_m, y_m, t) = f_m(t), \quad (x_m, y_m) \in \Omega, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad M \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

и в фиксированный момент времени T на части области $\omega \subset \Omega$

$$\eta(x, y, T) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega. \quad (3)$$

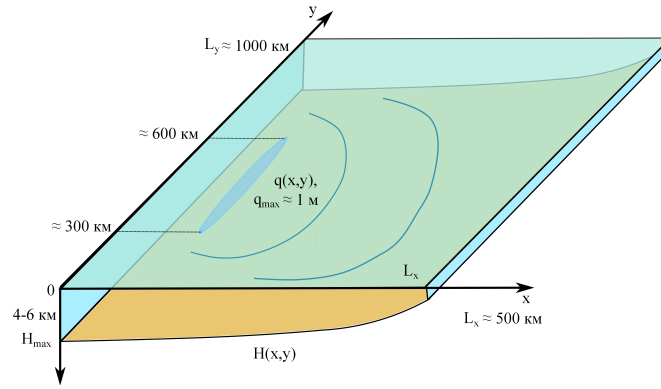


Рис. 1: Схематическая иллюстрация моделирования движения волны в мелкой воде.

Совмещенная обратная задача (1)-(3) состоит в уточнении параметров источника цунами $q(x, y)$ по дополнительным измерениям отклонения водной поверхности $f_m(t)$, $f(x, y)$.

Обратная задача (1)-(3) сводится к задаче определения минимума целевого функционала [11]

$$J(q) = \sum_{m=1}^M \int_0^T (\eta(x_m, y_m, t; q) - f_m(t))^2 dt + \iint_{\omega} (\eta(x, y, T; q) - f(x, y))^2 dxdy = J_1(q) + J_2(q), \quad (4)$$

характеризующего степень отклонения модельных данных от измерений (2) и (3).

Решение задачи минимизации целевого функционала (4) может быть получено с помощью градиентных методов (методов сопряженных градиентов, итерации Ландвебера, Ньютона-Канторовича), которые заключаются в поиске приближенного решения задачи в следующем виде:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'(q_n), \quad \alpha_n > 0.$$

Здесь $J'(q_n)$ — градиент функционала $J(q)$ (4), α_n — параметр спуска.

2 Градиент целевого функционала

Обозначим отклонение $\delta W = \overline{W} - W$, где $\overline{W} = W(x, y, t; q + \delta q) = (\overline{\eta}, \overline{u}, \overline{v})$ как решение возмущенной начально-краевой задачи (1) с начальными данными $(q + \delta q, 0, 0)$, и $W = W(x, y, t; q) = (\eta, u, v)$ — решение начально-краевой задачи (1). Пренебрегая возмущениями функций второго порядка и выше (ввиду их малости), запишем начально-краевую задачу для вектора $\delta W = (\delta \eta, \delta u, \delta v)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 \delta \eta := \delta \eta_t + [\delta \eta u + \delta u (\eta + H)]_x + [\delta \eta v + \delta v (\eta + H)]_y = 0, & \delta \eta|_{t=0} = \delta q, \\ \mathcal{L}_2 \delta u := \delta u_t + (\delta u \cdot u)_x + \delta v \cdot u_y + v \cdot \delta u_y + g \delta \eta_x = 0, & \delta u|_{t=0} = 0, \\ \mathcal{L}_3 \delta v := \delta v_t + (\delta v \cdot v)_y + \delta u \cdot v_x + u \cdot \delta v_x + g \delta \eta_y = 0, & \delta v|_{t=0} = 0, \\ \delta W|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega \times (0, T))$ следующим образом: $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(\Omega \times (0, T))}$. Вариация целевого функционала (4) удовлетворяет соотношению (по определению производной Фреше):

$$\delta J = J(q + \delta q) - J(q) = \langle J'q, \delta q \rangle + o(\|\delta q\|^2).$$

С другой стороны, используя выражение (4), получим

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = \int_0^T \iint_{\Omega} \delta \eta(x, y, t; \delta q) r_1(x, y, t) dxdydt + \int_0^T \iint_{\Omega} \delta \eta(x, y, t; \delta q) r_2(x, y, t) dxdydt + \langle \delta \eta, \delta \eta \rangle. \quad (6)$$

Здесь $r_1(x, y, t) = 2 \sum_{m=1}^M (\eta(x, y, t; q) - f_m(t)) \delta(x - x_m) \delta(y - y_m)$, $r_2(x, y, t) = 2 (\eta(x, y, t; q) - f(x, y)) \chi(\omega) \delta(t - T)$, δ — дельта-функция Дирака, $\chi(\omega)$ — характеристическая функция области ω .

Введем две обобщенные сопряженные задачи в области $\Omega \times (0, T)$, соответствующие двум типам данных (2) и (3) совмещенной обратной задачи:

$$\begin{cases} \Phi_{1t} + u\Phi_{1x} + v\Phi_{1y} + g(\Phi_{2x} + \Phi_{3y}) = r_1, & \Phi_1|_{t=T} = 0, \\ \Phi_{2t} + u\Phi_{2x} + (v \cdot \Phi_2)_y - v_x\Phi_3 - (\eta + H)\Phi_{1x} = 0, & \Phi_2|_{t=T} = 0, \\ \Phi_{3t} + v\Phi_{3y} + (u \cdot \Phi_3)_x - u_y\Phi_2 - (\eta + H)\Phi_{1y} = 0, & \Phi_3|_{t=T} = 0, \\ \Phi_1|_{\partial\Omega} = \Phi_2|_{\partial\Omega} = \Phi_3|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Psi_{1t} + u\Psi_{1x} + v\Psi_{1y} + g(\Psi_{2x} + \Psi_{3y}) = r_2, & \Psi_1|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{2t} + u\Psi_{2x} + (v \cdot \Psi_2)_y - v_x\Psi_3 - (\eta + H)\Psi_{1x} = 0, & \Psi_2|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{3t} + v\Psi_{3y} + (u \cdot \Psi_3)_x - u_y\Psi_2 - (\eta + H)\Psi_{1y} = 0, & \Psi_3|_{t=T} = 0, \\ \Psi_1|_{\partial\Omega} = \Psi_2|_{\partial\Omega} = \Psi_3|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ввиду того, что сопряженные задачи (7) и (8) отличаются между собой правыми частями r_1 и r_2 , приведем вывод первой части градиента целевого функционала $J_1(q)$, связанной с решением сопряженной задачи $\Phi(x, y, t; q)$ (5). Вывод второй части градиента $J_2(q)$ будет аналогичным.

Используя возмущенную задачу для уравнений мелкой воды (5), сопряженную задачу (7) и метод интегрирования по частям, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1 \delta \eta, \Phi_1 \rangle &= \langle \delta \eta, -\Phi_{1t} - u\Phi_{1x} - v\Phi_{1y} \rangle + \langle \delta u, (\eta + H)\Phi_{1x} \rangle + \langle \delta v, (\eta + H)\Phi_{1y} \rangle - \iint_{\Omega} \delta q \cdot \Phi_1(x, y, 0) dx dy = 0, \\ \langle \mathcal{L}_2 \delta u, \Phi_2 \rangle &= \langle \delta u, -\Phi_{2t} - u\Phi_{2x} - (v\Phi_2)_y \rangle + \langle \delta \eta, -g\Phi_{2x} \rangle + \langle \delta v, u_y\Phi_2 \rangle = 0, \\ \langle \mathcal{L}_3 \delta v, \Phi_3 \rangle &= \langle \delta v, -\Phi_{3t} - v\Phi_{3x} - (u\Phi_3)_x \rangle + \langle \delta \eta, -g\Phi_{3y} \rangle + \langle \delta u, v_x\Phi_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Запишем в векторном виде полученные соотношения для $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T$ и оператора $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)^T$:

$$\langle \mathcal{L}W, \Phi \rangle = \langle \mathcal{L}_1 \delta \eta, \Phi_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_2 \delta u, \Phi_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_3 \delta v, \Phi_3 \rangle = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\int_0^T \iint_{\Omega} \delta \eta(x, y, t; \delta q) r_1(x, y, t) dx dy dt = \iint_{\Omega} \delta q \cdot \Phi_1(x, y, 0) dx dy.$$

Таким образом, градиент первой части функционала $J'_1 q = \Phi_1(x, y, 0)$. Аналогичные соотношения получаем для второй части градиента функционала $J'_2 q = \Psi_1(x, y, 0)$. Итоговый градиент целевого функционала (4) для совмещенной обратной задачи в случае нелинейных уравнений мелкой воды имеет вид:

$$J'q = \Phi_1(x, y, 0) + \Psi_1(x, y, 0).$$

2.1 Алгоритм численного решения совмещенной обратной задачи для нелинейных уравнений мелкой воды

Алгоритм численного решения совмещенной обратной задачи (1)-(3) для нелинейных уравнений мелкой воды, основанный на градиентном методе первого порядка, выглядит следующим образом:

1. Обрабатываем экспериментальные данные (2), (3) или создаем синтетические данные путем решения начально-краевой задачи (1) для известной функции $q(x, y)$. Считаем r_1 и r_2 .
2. Задаем начальное приближение $q_0(x, y) = 0$, характеризующее состояние ровной поверхности.
3. Решаем начально-краевую задачу (1) и получаем функции $\eta(x, y, t)$, $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$.
4. Решаем сопряженные задачи (7) и (8) и получаем $\Phi_1(x, y, t)$, $\Psi_1(x, y, t)$.
5. Вычисляем градиент целевого функционала $J'q = \Phi_1(x, y, 0) + \Psi_1(x, y, 0)$.
6. Вычисляем параметр спуска α_n согласно выбранному типу градиентного метода.
7. Вычисляем следующую итерацию согласно формуле $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n$.

Заключение

Построен алгоритм решения задачи определения источника возмущения для системы нелинейных уравнений мелкой воды одновременно по двум типам измерений отклонения водной поверхности от состояния покоя в конечном числе точек пространственной области и в фиксированный момент времени на части области моделирования. Обратная задача сведена к задаче минимизации целевого функционала, характеризующего квадратичное отклонение модельных данных от измерений. Получено явное выражение для вычисления градиента функционала, связанное с решениями соответствующих сопряженных задач. Планируется апробировать алгоритм для нелинейной модели мелкой воды в случае экспериментальных данных.

Список литературы

- [1] Mansinha L., Smylie D.E. The displacement fields of inclined faults // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1971. V. 61. P. 1433–1440.
- [2] Кайстренко В.М. Обратная задача на определение источника цунами. В кн.: Волны цунами. Выпуск 29. Южно-Сахалинск: Труды СахКНИИ. 1972. P. 82–92.
- [3] Satake K. Inversion of tsunami waveforms for the estimation of a fault heterogeneity: Method and numerical experiments // *Journal of Physics of the Earth*. 1987. V. 35. P. 241–254.
- [4] Satake K. Inversion of tsunami waveforms for the estimation of heterogeneous fault motion of large submarine earthquakes: the 1968 Tokachi-oki and the 1983 Japan sea earthquake // *Journal of Geophysical Research*. 1989. V. 94. P. 5627–5636.
- [5] Pires C., Miranda P.M.A. Tsunami waveform inversion by adjoint methods // *Journal of Geophysical Research*. 2001. V. 106. P. 19773–19796.
- [6] Blaise S., St-Cyr A., Mavriplis D., Lockwood B. Discontinuous Galerkin unsteady discrete adjoint method for real-time efficient tsunami simulations // *Journal of Computational Physics*. 2013. V. 232, iss. 1. P. 416–430.
- [7] Greenberg J.M., Leroux A.Y. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1996. V. 33, iss. 1. P. 1–16.
- [8] Tang H. Solution of the shallow-water equations using an adaptive moving mesh method // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2004. V. 44, iss. 7. P. 789–810.
- [9] Piatanesi A., Tinti S., Pagnoni G. Tsunami waveform inversion by numerical finite-elements Green's functions // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2001. V. 1, P. 187–194.
- [10] Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2012. V. 20, iss. 2. P. 193–211.
- [11] Kabanikhin S.I., Hasanov A., Marinin I.V., Krivorotko O.I., Khidasheli D. A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation // *Applied Numerical Mathematics*. 2014. V. 83, P. 22–37.
- [12] Voronina T.A., Tcheverda V.A. Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // *Bulletin of the Novosibirsk Computer Center. Series Mathematical Modeling in Geophysics*. 1998. V. 4, P. 127–136.
- [13] Воронина Т.А. An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2004. V. 7, iss. 3. P. 203–211.
- [14] Voronina T.A. Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2011. V. 19, P. 615–629.
- [15] Voronin V.V., Voronina T.A., Tcheverda V.A. Inversion method for initial tsunami waveform reconstruction // *Natural Hazards and Earth System Sciences. Discussions*. 2014. V. 2, P. 7735–7772.

Ольга Игоревна Криворотько — к.ф.-м.н., н.с. Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, ст.преп. кафедры высшей математики физического факультета Новосибирского государственного университета;

e-mail: olga.krivorotko@sscc.ru;

Сергей Игоревич Кабанихин — чл.-корр. РАН, профессор, директор Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;

e-mail: kabanikhin@sscc.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.