

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. С. Глуховский², В. И. Паасонен^{1,2}

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 519.6

Для успешного численного исследования течений вязкой несжимаемой жидкости с областями быстрого изменения в пограничных слоях представляется полезным повышать порядок точности разностных схем или использовать неравномерную сетку, сгущающуюся в зонах больших градиентов. В данной работе совмещаются оба этих подхода в комплексе, т. е. применяется компактная схема второго порядка точности на неравномерной сетке. Проведены сравнения результатов расчетов с данными других авторов на стандартной тестовой задаче о течении в каверне со скользящей крышкой.

Ключевые слова: компактная схема, течение в каверне, неравномерная сетка.

1 Разностная схема

Рассматривается система уравнений Навье — Стокса стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} (u\omega)_x + (v\omega)_y = \mu(\omega_{xx} + \omega_{yy}), \\ \psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega, \end{cases} \quad (1)$$

где ψ — функция тока, ω — вихрь скорости, а $u = \psi_y$ и $v = -\psi_x$ — компоненты скорости.

Пусть область покрыта прямоугольной сеткой, неравномерной по обоим переменным. Определим операторы разностных аппроксимаций первой и второй производной:

$$\Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad \Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2}, \quad (2)$$

где h_- , h_+ — шаги слева и справа от узла сетки, $s = h_- + h_+$ — их сумма, а Δ_+ и Δ_- — операторы односторонних разделенных разностей. Разностные операторы и параметры условимся снабжать индексами x и y , определяющими координатные направления.

Если аппроксимировать производные в системе (1) разностными отношениями типа (2), то получится схема первого порядка аппроксимации, в которой главные члены погрешности содержат третьи производные искомых функций. Выражая их из продолженной системы уравнений и аппроксимируя полученные слагаемые разностными отношениями, а затем учитывая их в исходной схеме с обратным знаком, получим компактную схему второго порядка аппроксимации. В ней первое уравнение системы аппроксимируется разностным уравнением

$$\mu B\omega = D_x(u\omega) + D_y(v\omega), \quad (3)$$

где для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} D_x &= (E + \frac{d_y}{3} \Delta_y) \Delta_x + \frac{d_x}{3} \Lambda_x, & D_y &= (E + \frac{d_x}{3} \Delta_x) \Delta_y + \frac{d_y}{3} \Lambda_y, \\ B &= (E + \frac{d_y}{3} \Delta_y) \Lambda_x + (E + \frac{d_x}{3} \Delta_x) \Lambda_y, \end{aligned}$$

а уравнение для вихря аппроксимируется разностным уравнением

$$\Omega\psi = \Sigma\omega, \quad (4)$$

где

$$\Omega = \Lambda_x + \Lambda_y + \frac{d_y}{3}\Delta_y\Lambda_x + \frac{d_x}{3}\Delta_x\Lambda_y, \quad \Sigma = E + \frac{d_y}{3}\Delta_y + \frac{d_x}{3}\Delta_x.$$

В результате получилась компактная разностная схема (3), (4), которая аппроксимирует (ψ, ω) — систему уравнений Навье — Стокса (1) со вторым порядком на произвольной неравномерной сетке. Она действительно компактная, так как ее шаблон не выступает за пределы трех узлов в каждом направлении.

Для решения стационарной краевой задачи будем использовать итерационный метод универсального алгоритма с факторизованным оператором.

Итерационная формула для (3) записывается в виде

$$A_x A_y \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \mu B \omega^n - D_x(u\omega^n) - D_y(v\omega^n), \quad (5)$$

где

$$A_x = E + \alpha\tau\Delta_x u E - \mu\alpha\tau\Lambda_x, \quad A_y = E + \alpha\tau\Delta_y v E - \mu\alpha\tau\Lambda_y.$$

Здесь τ, α — итерационные параметры, а компоненты скорости u и v берутся с нижнего слоя.

Аналогично получим факторизованную итерационную схему для (4) :

$$C_x C_y \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} = \Omega\psi^n - \Sigma\omega^n, \quad (6)$$

где

$$C_x = (E - \alpha\tau\Lambda_x), \quad C_y = (E - \alpha\tau\Lambda_y).$$

Для реализации итерационной схемы (5), (6) необходимо поставить граничные условия. Специфика схемы требует по одному граничному условию для ψ и ω , тогда как в дифференциальной задаче поставлено два условия для ψ (функция тока и ее нормальная производная) и ни одного для ω . Поэтому для ω граничные условия обычно ставятся по методу, предложенному Вудсом. В данной работе использовалось обобщение формулы Вудса для неравномерной сетки. Например, на участке границы, перпендикулярной к x , вторую производную ψ_{yy} по касательной можно считать известной, и для вычисления вихря на границе остается аккуратно аппроксимировать вторую производную по нормали. Ее определим в виде выражения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{\Gamma} = \sum_{i=0}^s \alpha_i \psi(x_i) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Gamma}, \quad (7)$$

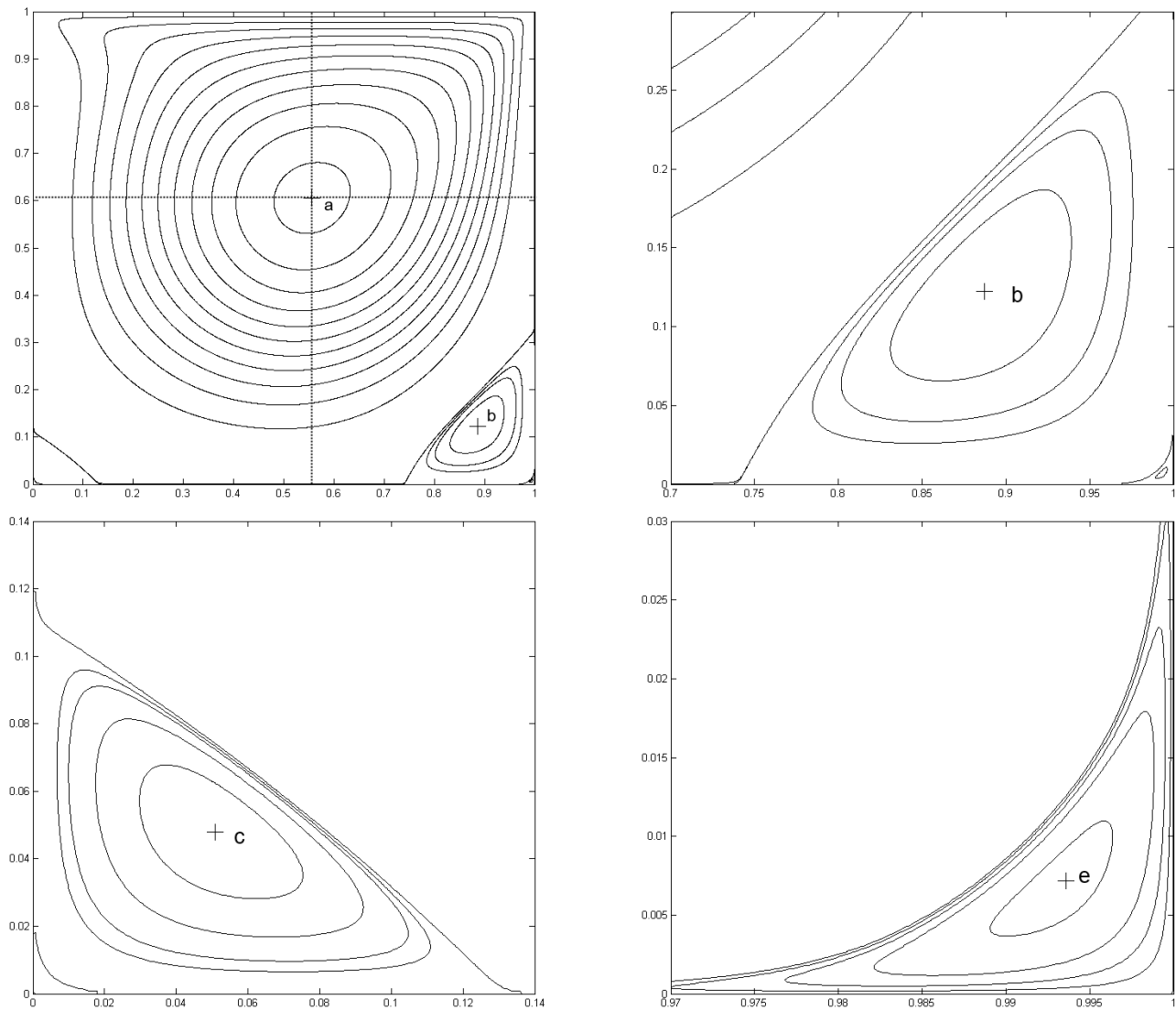
неопределенные коэффициенты α_i, β которого выбираются так, чтобы обеспечить порядок точности s . Для этого разложим $\psi(x_i)$ в ряд Тейлора в точке границы x_0 , и приравняв коэффициенты при производных одного порядка в левой и правой частях получим линейную систему уравнений для коэффициентов, которая решается явно методом Крамера:

$$\alpha_k = \frac{\prod_{i=1}^s y_i}{y_k^3 \prod_{l \neq k} (y_l - y_k)}, \quad y_i = x_i - x_0, \quad k \neq 0,$$

$$\alpha_0 = - \sum_{i=1}^s \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^s \alpha_i y_i.$$

2 Результаты

В качестве тестового решения используем решение задачи о течении вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой. В этом решении присутствуют вихри различной интенсивности, количество, конфигурация и свойства которых зависят от числа Рейнольдса. Эта задача очень популярна для изучения свойств численных методов, и на данный момент опубликовано большое количество работ, в которых она решается.

Рис. 1: Линии тока в каверне при $Re = 400$ и их детализированные фрагменты.Таблица 1: Численные характеристики вихрей в каверне при $Re = 400$.

i	a	b	c	e
Работа [1], сетка 640×640 .				
ψ_i	-0.1141	$6.462 \cdot 10^{-4}$	$1.445 \cdot 10^{-5}$	$-1.146 \cdot 10^{-8}$
x_i	0.5539	0.8852	0.0516	0.9929
y_i	0.6055	0.1219	0.0469	0.0072
Эта работа, сетка 61×61 .				
ψ_i	-0.1132	$6.379 \cdot 10^{-4}$	$1.403 \cdot 10^{-5}$	$-1.346 \cdot 10^{-8}$
x_i	0.5554	0.8871	0.0513	0.9930
y_i	0.6062	0.1220	0.0473	0.0066

На рис. 1 изображена картина линий тока и ее фрагменты при $Re = 400$. В работе использованы обозначения для вихрей, предложенные в работе [1]. Знаком «+» обозначаются центры вихрей, и каждому из них присваивается свой буквенный индекс.

В табл. 1 приведены координаты центров вихрей (x_i, y_i) , представленных на графиках, и значения функ-

ции тока $\psi(x_i, y_i)$ в них.

На рис. 1 пунктирной линией отмечены сечения $x = 0.5569$ и $y = 0.6081$, в которых построены эпюры, изображенные на рис. 2, которые иллюстрируют сходимость при увеличении числа узлов. При дальнейшем увеличении числа узлов результаты визуально становятся неразличимыми.

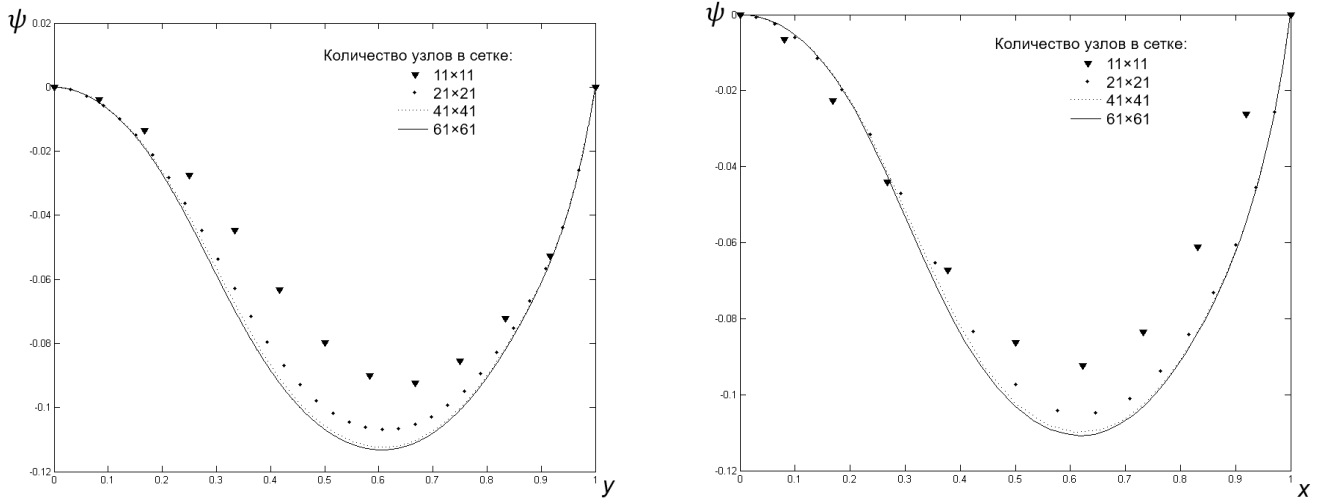


Рис. 2: Эпюры функции тока ψ , вычисленной на последовательности сгущающихся сеток.

Аналогичный смысл, но для числа Рейнольдса $Re = 7500$, имеют рис. 3 и табл. 2.

Таблица 2: Численные характеристики вихрей в каверне при $Re = 7500$.

i	a	b	c	d	e
Работа [1], сетка 640×640 .					
ψ_i	-0.1182	$3.139 \cdot 10^{-3}$	$1.493 \cdot 10^{-3}$	$2.003 \cdot 10^{-3}$	$-2.033 \cdot 10^{-5}$
x_i	0.5136	0.7916	0.0649	0.0664	0.9533
y_i	0.5322	0.0656	0.1520	0.9120	0.0402
Эта работа, сетка 61×61 .					
ψ_i	-0.1132	$3 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$-1.78 \cdot 10^{-5}$
x_i	0.5235	0.8272	0.0646	0.0667	0.9631
y_i	0.5275	0.0768	0.1521	0.9121	0.0324

Подобное сравнение часто используется для исследования свойств численного метода и может достоверно показать, удовлетворяет ли разностная схема требованиям точности. В этой работе результаты численного эксперимента сопоставлены с большим количеством результатов, полученных другими авторами [1, 2, 3, 4, 5].

В табл. 3 представлены характерные значения компонент скорости течения в каверне u_{min} , v_{min} и v_{max} полученные для разных чисел Рейнольдса. Величины v_{min} и v_{max} — это минимальное и максимальное значение компоненты скорости v , вычисленные на горизонтальной средней линии каверны. Величина u_{min} — это минимальное значение скорости на вертикальной средней линии каверны, а y_{min} — это координата по y , при которой достигается u_{min} .

Сравнение с результатами других авторов свидетельствуют о том, что схема достаточно достоверно показывает картину течений для различных чисел Рейнольдса.

Сетка 61×61 , на которой получены расчеты, существенно более грубая, чем сетка 640×640 , использованная в работе [1], но несмотря на такое большое различие численные результаты, в том числе в области возвратных вихрей, довольно близки. На наш взгляд, это связано с тем, что в [1] используется кусочно-равномерная сетка со ступенчатой детализацией сетки по мере приближения к углам области. Поэтому в окрестности углов метод работает прекрасно, а области вблизи середин границ квадрата детализацией не охвачены. В нашем методе, напротив, сетка сгущается в окрестности всех твердых поверхностей.

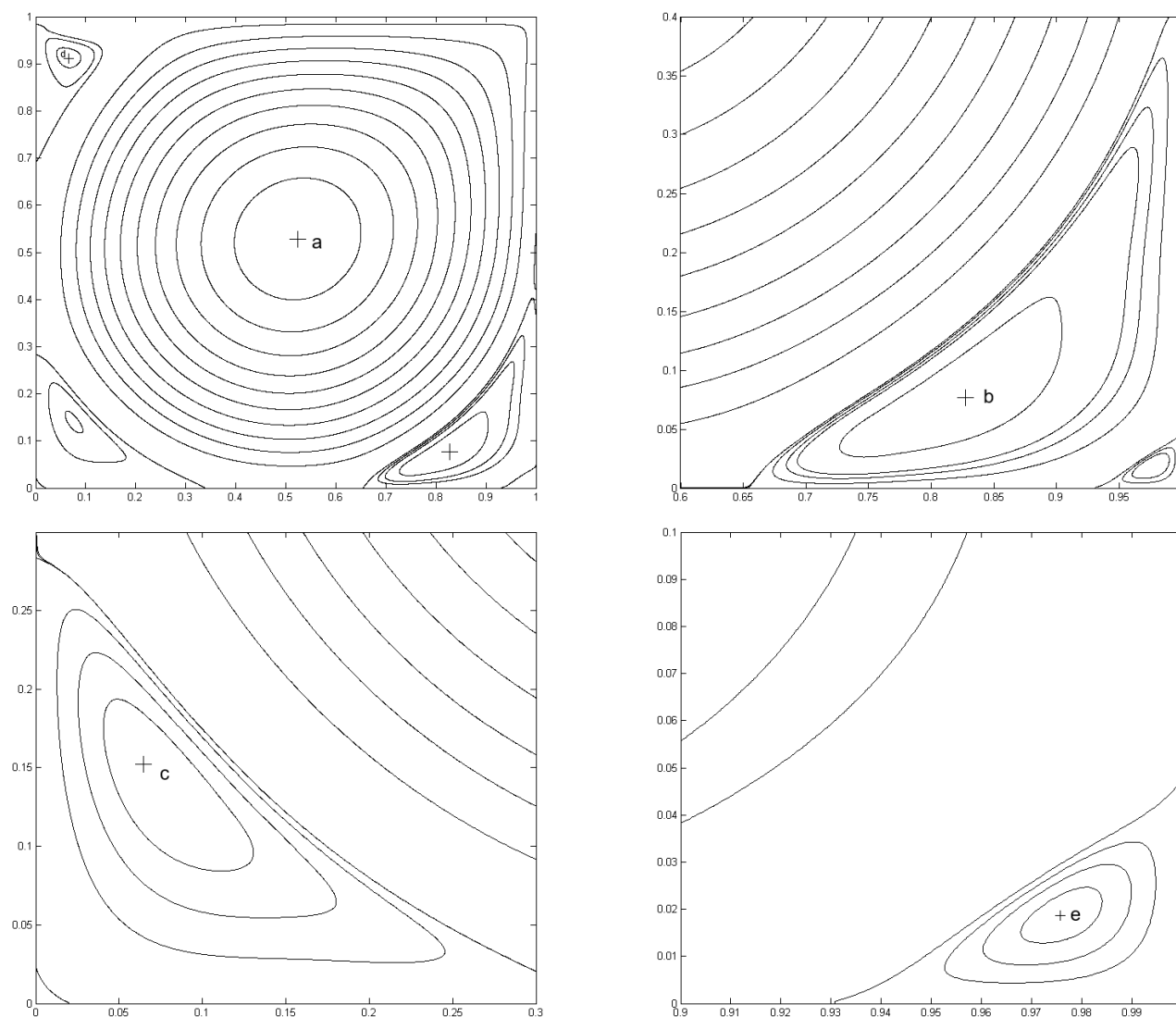


Рис. 3: Линии тока в каверне при $Re = 7500$ и их детализированные фрагменты.

Таким образом, предложен и реализован метод численного исследования течений жидкости, который заключается в сочетании схем повышенного порядка аппроксимации и неравномерных сеток. Численными экспериментами показано, что схема описывает течение в каверне на уровне лучших известных методов, позволяя при этом существенно экономить на числе узлов сетки.

Таблица 3: Характерные значения компонент скорости течения в каверне.

Метод	Сетка	u_{min}	y_{min}	v_{min}	v_{max}
$Re = 1$					
Работа [2]	80×80	-0.20777	0.5390625	-0.18483	0.18408
Работа [1]	640×640	-0.20755	0.53594	-0.18476	0.18394
Эта работа	21×21	-0.20223	0.53000	-0.18012	0.17935
Эта работа	41×41	-0.2061	0.53482	-0.1834	0.1826
Эта работа	51×51	-0.2065	0.53484	-0.1838	0.1831
$Re = 100$					
Работа [3]	129×129	-0.21090	0.4531	-0.24533	0.17527
Работа [4]	96×96	-0.2140424	0.4581	-0.2538030	0.1795728
Работа [1]	640×640	-0.21412	0.45781	-0.2593	0.17968
Работа [2]	160×160	-0.21412	0.4609375	-0.25391	0.17968
Эта работа	21×21	-0.19982	0.45833	-0.24184	0.1701
Эта работа	41×41	-0.20793	0.4590	-0.2491	0.1756
Эта работа	61×61	-0.2107	0.4586	-0.2509	0.1772
$Re = 400$					
Работа [3]	129×129	-0.32726	0.2813	-0.44993	0.30203
Работа [1]	640×640	-0.32903	0.27969	-0.45439	0.30421
Работа [2]	80×80	-0.32947	0.28125	-0.45466	0.30464
Эта работа	21×21	-0.2784	0.2942	-0.3958	0.2624
Эта работа	41×41	-0.3158	0.2862	-0.4399	0.2930
Эта работа	61×61	-0.3229	0.2845	-0.4476	0.2988
$Re = 1000$					
Работа [3]	129×129	-0.38289	0.1719	-0.51550	0.37095
Работа [1]	1280×1280	-0.38893	0.17171	-0.52744	0.3737
Работа [4]	160×160	-0.38857	0.1717	-0.52708	0.37694
Работа [5]	601×601	-0.3869	0.18	-0.5263	0.3756
Работа [2]	160×160	-0.38907	0.171875	-0.52692	0.37745
Эта работа	21×21	-0.2917	0.2077	-0.4070	0.2875
Эта работа	41×41	-0.3653	0.1790	-0.4974	0.3555
Эта работа	61×61	-0.3747	0.1773	-0.5098	0.3641
$Re = 7500$					
Работа [3]	129×129	-0.43590	0.0625	-0.55216	0.44030
Работа [1]	1280×1280	-0.44876	0.06036	-0.57455	0.44970
Работа [5]	601×601	-0.4491	0.06	-0.5550	0.4495
Эта работа	21×21	-0.3545	0.5489	-0.5274	0.4036
Эта работа	41×41	-0.4008	0.5732	-0.5430	0.4320
Эта работа	61×61	-0.4338	0.0598	-0.5640	0.4480

Список литературы

- [1] Исаев В.И., Шапеев В.П. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 52–58.
- [2] Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The collocation and least squares method for numerical solution of Navier — Stokes equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2. 2003. P. S115–S137.
- [3] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-re solutions for incompressible flow using the Navier — Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. 1982. №. 48. P. 387–411.
- [4] Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Computers & Fluids. 1998. Vol. 27, № 4. P. 421–433.

- [5] Erturk E., Corke T.C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. № 48. P. 747–774.

*Артём Сергеевич Глуховский — студент
Новосибирского государственного университета;
e-mail: artemg1995@gmail.com.*

*Виктор Иванович Паасонен — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.
Института вычислительных технологий СО РАН;
e-mail: paas@ict.nsc.ru.*

Дата поступления — 30 мая 2017 г.