

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЦЕНОВОГО РЯДА

А. В. Новиков¹, А. В. Бурмистров^{2,3},

¹ООО *Мой капитал*, 630090, Новосибирск

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск

³Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск

УДК 519.865

В работе рассматривается задача построения адекватной математической модели ценового ряда в рамках стохастической дифференциальной модели [3]. Проводится анализ динамики вероятностных характеристик ценовых рядов: коэффициента роста и коэффициента волатильности. Для этих коэффициентов по историческим данным строятся стохастические дифференциальные уравнения, наиболее адекватно описывающие их историческую динамику.

Ключевые слова: ценовой ряд, стохастическое дифференциальное уравнение, геометрическое броуновское движение, случайная волатильность, коэффициент роста, непрерывное распределение.

Введение

Одной из классических задач финансовой математики является задача построения адекватной, с точки зрения практического применения определенных вероятностных характеристик в конкретной ситуации, математической модели ценового ряда. Обзор методов построения математических моделей, а также набор значимых (с практической точки зрения) вероятностных характеристик представлены, например, в статье [5]. В работе [3] проведен анализ динамики вероятностных характеристик ценовых рядов (в качестве примера таких данных были рассмотрены цены российских акций, торгуемых на ММВБ в 2002–2003 годах), на основе которого построена стохастическая дифференциальная модель (СДМ) ценового ряда. Предложенная модель учитывает случайную природу изменения коэффициентов роста и волатильности, что значительно улучшило классическую модель цены (см., например, [6]), в которой данные коэффициенты предполагались постоянными. По прошествии 15 лет назрела необходимость в обогащении предложенного алгоритма новыми распределениями в силу значительного расширения рынка ценных бумаг и накопления огромного массива исторических цен.

Прежде чем приступить к изложению основного материала, введем ряд обозначений и сокращений, используемых в работе. Случайные величины будем обозначать строчными буквами греческого алфавита (например, ξ , ζ , η). Функция плотности распределения вероятностей случайной величины ξ обозначается $f_\xi(x)$, а функция распределения — $F_\xi(x)$. Математическое ожидание ξ будем обозначать через $M\xi$, а дисперсию — через $D\xi$.

1 Недостатки классической модели

Классической моделью динамики цены рискованного актива является геометрическое броуновское движение P_t , которое удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) в смысле Ито [6]:

$$\begin{cases} dP_t = \mu P_t + \sigma P_t dw_t, & 0 \leq t \leq T, \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00698).

- P_t — цена базисного актива,
- $\mu \in \mathbb{R}$ — постоянный коэффициент роста,
- $\sigma \in \mathbb{R}$ — постоянный коэффициент волатильности,
- w_t — стандартный винеровский процесс.

Степень влияния параметров модели на плотность распределения P_t подробно изучена. Также хорошо известны недостатки данной модели, основным из которых является неограниченный рост дисперсии P_t с ростом t .

Поскольку в прикладных задачах финансовой математики время дискретно в силу специфики данной предметной области (котировки акций, индексов даются с определенной периодичностью), то целесообразно перейти от непрерывной модели к дискретной:

$$P_{n+1} = P_n \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h - \sigma \sqrt{h} \eta_n \right\},$$

где

- P_n — моделируемая цена акции в узле номер n ,
- h — шаг равномерной сетки по времени,
- η_n — последовательность независимых между собой стандартных нормальных случайных величин.

Заметим, что у нас есть исторический ряд цен $\{P_i; i = 1, \dots, T\}$. Из последней формулы по оценкам первых двух моментов выборки $\{\ln(P_{n+1}/P_n)\}_{n=0}^{N-1}$ размера N для параметров μ и σ получаем:

$$\hat{\mu} = a + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}, \quad a = \frac{\ln P_N - \ln P_0}{Nh}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{Nh} \sum_{i=0}^{N-1} (\ln P_{i+1} - \ln P_i - ah)^2}$$

При формировании СДМ, учитывающей стохастичность параметров μ и σ , использовался метод “скользящего окна” [3, 4], который заключается в следующем:

1. Применяем формулы для подсчета $\hat{\sigma}$ и $\hat{\mu}$, используя сдвиг порядка ρN (величину выборки $N \ll T$ и коэффициент ρ можно оптимизировать в алгоритме, мы выбирали $N \sim 2000$, $\rho = 0.5$), получаем наборы $\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_{\rho N} \dots \hat{\mu}_{k\rho N}$ и $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_{\rho N} \dots \hat{\sigma}_{k\rho N}$. Здесь $k = \max \{j : j\rho N + N \leq T\}$.
2. Для выборки $\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_{\rho N} \dots \hat{\mu}_{k\rho N}$ считаем выборочное среднее и выборочный второй момент

$$\bar{\mu} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{\mu}_{i\rho N}, \quad \overline{\mu^2} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{\mu}_{i\rho N}^2,$$

при этом выборочная дисперсия $V_\mu = \overline{\mu^2} - (\bar{\mu})^2$.

3. Для выборки $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_{\rho N} \dots \hat{\sigma}_{k\rho N/2}$ считаем выборочное среднее и выборочный второй момент

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{\sigma}_{i\rho N}, \quad \overline{\sigma^2} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \hat{\sigma}_{i\rho N}^2,$$

при этом выборочная дисперсия $V_\sigma = \overline{\sigma^2} - (\bar{\sigma})^2$.

Таким образом, в СДМ коэффициенты роста и волатильности ведут себя как стационарные случайные процессы на \mathbb{R} и \mathbb{R}^+ соответственно. Далее для аппроксимации распределений $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона [8] в случае, когда по выборке оцениваются параметры распределения, определяются наиболее адекватные распределения в множестве анализируемых непрерывных распределений на \mathbb{R} и \mathbb{R}^+ соответственно.

2 Выбор непрерывных распределений

По результатам анализа динамики изменения коэффициента роста $\hat{\mu}$ ранее в [3, 4] было предложено приближать его распределение одним из следующих симметричных непрерывных распределений с возможными значениями на всей числовой оси R : нормальное распределение, логистическое распределение, а также распределения Лапласа и Чампернауна.

С другой стороны, аппроксимировать распределение коэффициента волатильности $\hat{\sigma}$ было предложено следующими распределениями с возможными значениями на положительной полуоси R^+ : гамма распределение, логнормальное распределение, а также распределения Вальда и Рэлея.

Целесообразность выбора именно этих распределений вытекала из практических наблюдений выборок $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ для ценовых рядов, соответствующих различным акциям в 2002–2003 годах. Однако сейчас на рынке гораздо больше акций, чем 15 лет назад и описанный в [3, 4] арсенал распределений часто оказывается недостаточным. Поэтому, кроме разобранных в [3, 4] распределений обновленный алгоритм будет дополнительно рассматривать следующие распределения.

Для коэффициента роста $\hat{\mu}$ рассмотрим два распределения.

1. Обобщённое нормальное распределение ($\alpha > 0, \beta > 0$).

$$f_{\xi}(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-\left(\frac{x-m}{\alpha}\right)^{\beta}},$$

$$M\xi = m,$$

$$D\xi = \frac{\alpha^2\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)}.$$

2. Распределение Стюдента ($n > 3$).

$$f_{\xi}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi ns}} \left(1 + \frac{1}{n} \left[\frac{x-m}{s}\right]^2\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

$$M\xi = m,$$

$$D\xi = \frac{s^2 n}{n-2}.$$

Для коэффициента волатильности $\hat{\sigma}$ рассмотрим четыре распределения.

1. Распределение Накагами ($m \geq 0.5, \omega > 0$).

$$f_{\zeta}(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\omega^m} x^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\omega} x^2\right),$$

$$M\zeta = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\omega}{m}\right)^{1/2},$$

$$D\zeta = \omega - (M\xi)^2.$$

2. Распределение Вейбулла ($\lambda > 0, k > 0$).

$$f_{\zeta}(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k},$$

$$M\zeta = \lambda\Gamma(1 + 1/k),$$

$$D\zeta = \lambda^2\Gamma(1 + 2/k) - (M\xi)^2.$$

3. Распределение Эрланга ($\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$).

$$f_{\zeta}(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!},$$

$$M\zeta = \frac{k}{\lambda},$$

$$D\zeta = \frac{k}{\lambda^2}.$$

4. Распределение Максвелла ($a > 0$).

$$f_{\zeta}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} e^{-x^2/(2a^2)},$$

$$M\zeta = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$D\zeta = 3a^2 - (M\zeta)^2.$$

Для всех рассмотренных в данном пункте распределений в обновленном алгоритме строятся соответствующие СДУ на коэффициенты μ и σ (см. подробнее [1, 3]) и в итоге получается СДМ в виде системы нелинейных СДУ вида:

$$P_{n+1} = P_n + h\mu_n P_n + \sqrt{h}\sigma_n P_n \eta_{n,1},$$

$$\mu_{n+1} = \mu_n - hA_1(\mu_n - M\zeta) + \sqrt{A_1 h} \Phi_1(\mu_n) \eta_{n,2},$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - hA_2(\sigma_n - M\zeta) + \sqrt{A_2 h} \Phi_2(\sigma_n) \eta_{n,3},$$

здесь

- $\eta_{n,i}$ — независимые стандартные нормальные величины,
- $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ — положительные константы, встречающиеся в экспоненте соответствующих корреляционных функций, которые также оцениваются по историческим данным,
- Φ_1 и Φ_2 — функции связанные с распределениями, аппроксимирующими выборочные распределения для коэффициентов роста и волатильности, соответственно.

Полученная система СДУ используется в режиме реального времени для моделирования цены, в том числе для прогноза цены при использовании торговых алгоритмов.

Заключение и дальнейшие планы

В заключение отметим, что добавление СДУ для коэффициента роста и коэффициента волатильности заметно улучшило адекватность модельной цены по отношению к историческим данным. Кроме того, добавление новых непрерывных распределений в алгоритм выбора СДУ, описывающих поведение коэффициентов роста и волатильности, позволило рассматривать более широкий набор финансовых инструментов. Практические расчеты с помощью расширенной СДМ мы приведем в следующих работах.

Также планируется дальнейшее расширение модели ценового ряда в рамках модели больцмановского типа [2, 7]. В этой модели цена изменяется вследствие случайных флуктуаций, моделируемых как стандартное броуновское движение с некоторой волатильностью ς , а также в результате дискретных сделок между двумя группами: продавцами и покупателями. Данные группы в каждый момент времени t описываются двумя положительными плотностями: плотностью покупателей $f(x, t)$ и плотностью продавцов $g(x, t)$, здесь x — цена покупки или цена продажи (для покупателя и продавца, соответственно). В момент времени достижения согласия по цене происходит сделка, после чего продавец и покупатель меняются ролями. Поскольку в модели существует внешний параметр “цена транзакции” $a > 0$, то покупатель реально платит $x + a$ и поэтому, став продавцом, он будет просить за товар не менее этой величины. С другой стороны, прибыль продавца равна $x - a$, следовательно, став покупателем, в следующую сделку он не будет платить больше

этой величины. Рассматривая сделки как акты кинетических взаимодействий (подобно столкновению молекул в газовой динамике), мы получим модель, в которой изменение во времени плотности покупателей $f(x, t)$ и плотности продавцов $g(x, t)$ описываются следующими дифференциальными уравнениями

$$f_t^k(x, t) = \frac{\zeta^2}{2} f_{xx}^k(x, t) - k f^k(x, t) g^k(x, t) + k f^k(x + a, t) g^k(x + a, t),$$

$$g_t^k(x, t) = \frac{\zeta^2}{2} g_{xx}^k(x, t) - k f^k(x, t) g^k(x, t) + k f^k(x - a, t) g^k(x - a, t),$$

с начальными данными $f^k(x, 0) = f_0(x) \geq 0$ и $g^k(x, 0) = g_0(x) \geq 0$. Здесь k — частота сделок. При моделировании плотности заменяются на доли продавцов и покупателей, готовых в момент времени t к сделке в некоторой окрестности цены x . При этом покупатель в состоянии x совершит сделку с продавцом в состоянии y с вероятностью, зависящей от их текущих состояний. Вся информация о возможных сделках описывается интегральным ядром $K(x, y, x', y')$ равным числу сделок, в которых покупатели хотят купить товар за цену x и перепродать за цену x' , а продавцы хотят продать товар за цену y и купить еще за цену y' . Вид ядра $K(x, y, x', y')$ нужно восстанавливать по историческим данным. В итоге получим систему интегральных уравнений Больцмановского типа:

$$f_t(x, t) - \frac{\zeta^2}{2} f_{xx}(x, t) = \int_{R^3} K(x', y', x, y) f(x', t) g(y', t) dy dx' dy' - \int_{R^3} K(x, y, x', y') f(x, t) g(y, t) dy dx' dy',$$

$$g_t(x, t) - \frac{\zeta^2}{2} g_{xx}(x, t) = \int_{R^3} K(x', y', y, x) f(y', t) g(x', t) dx dx' dy' - \int_{R^3} K(y, x, x', y') f(y, t) g(x, t) dx dx' dy'.$$

Решая эту систему, находим цены сделок в момент времени t и используем их для построения прогноза цены при использовании торговых алгоритмов.

Список литературы

- [1] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Моделирование стационарных случайных процессов с заданным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией // Препринт 495. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1984, 24 с.
- [2] Коротченко М.А., Бурмистров А.В. Моделирование динамики многочастичных ансамблей при использовании кинетических моделей // Образовательные ресурсы и технологии. 2016. Т. 14, № 2. С. 324–330.
- [3] Новиков А.В. Адаптированные стохастические дифференциальные модели ценового ряда // Препринт 1157. ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, 2003, 27 с.
- [4] Новиков А.В. Математические модели и вычислительные алгоритмы для решения некоторых задач финансовой математики // Диссертация ... кандидата физико-математических наук: 01.01.07. Новосибирск, 2003. 108 с.
- [5] Artemiev S.S., Novikov A.V., Ogorodnikov V.A. Mathematical aspects of Computer aided share trading // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2002. Vol. 17, No. 4. P. 331–346.
- [6] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81, No. 3. P. 637–654.
- [7] Burger M., Caffarelli L., Markowich P., Wolfram M.-T. On a Boltzmann-type price formation model // Proceedings of the Royal Society A. 2013. Vol. 469, N 2157, 20130126.
- [8] Greenwood P.E., Nikulin M.S. A guide to chi-squared testing. New York: John Wiley & Sons, 1996. 280 p.

Алексей Владимирович Новиков — к.ф.-м.н., директор по развитию ООО Мой капитал;
e-mail: alex.novikov@moikapital.com,

Александр Васильевич Бурмистров — к.ф.-м.н., науч.сотр. Института вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН;
ст. преподаватель Новосибирского государственного университета;
e-mail: burm@osmf.sssc.ru.

Дата поступления — 30 мая 2017 г.