

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ПУАССОНОВСКИХ ТОЧЕЧНЫХ ПОТОКАХ

О. В. Сересева¹, В. А. Огородников^{1,2}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.6, 551.501

В работе исследуются статистические свойства кусочно-линейных процессов на пуассоновских потоках с независимыми негауссовскими случайными величинами в пуассоновских опорных точках. Исследуются асимптотические свойства некоторых вероятностных характеристик, в частности начальных моментов данного процесса и скорости их выхода на стационарный режим.

Рассмотрен подход к вычислению корреляционной функции процесса. Представлены результаты расчета корреляционной функции по модельным выборкам. Приведена зависимость корреляционной функции процесса от времени.

Ключевые слова: кусочно-линейные процессы, пуассоновский поток точек, одномерное распределение, корреляционная функция.

Введение

В работах Г.А. Михайлова [1, 2] был рассмотрен класс кусочно-постоянных процессов, в которых узловые точки на временной оси представляют собой поток Пальма, а значениями процесса в узловых точках являются независимые величины с заданной функцией распределения. Одномерное распределение такого кусочно-постоянного процесса в любой точке временной оси совпадает с заданным распределением в опорных точках, а корреляционная функция принадлежит к классу произвольных выпуклых функций. В работах Огородникова В.А., Савельева Л.Я., Сересевой О.В. [3–7] рассматривается кусочно-линейный процесс с независимыми одинаково распределенными случайными значениями в опорных точках, что, по сути, является модификацией кусочно-постоянного процесса, описанного Г.А. Михайловым.

В работах [3, 4] приведены результаты исследования нестационарного кусочно-линейного процесса на пуассоновских потоках, значения которого в опорных точках являются суммой независимых одинаково распределенных величин с последовательно увеличивающимся числом слагаемых с произвольным одномерным распределением. Получены точные выражения для функции распределения случайных переменных, образующих этот процесс, их начальных моментов произвольного порядка k , $k = 1, 2, \dots$ и дисперсии как функций от времени. Для кусочно-линейного процесса получены точные выражения для средних значений и дисперсий как функций от времени. Исследованы асимптотические свойства этих функций.

Наряду с нестационарным кусочно-линейным процессом в работе [4] был рассмотрен кусочно-линейный процесс с независимыми негауссовскими случайными величинами в пуассоновских опорных точках. Для процесса данного типа получены точные выражения для среднего значения, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса как функций от времени. Этот кусочно-линейный процесс в работе [4] был представлен в виде:

$$Y(t) = (Y_{\nu(t)} - Y_{\nu(t)-1}) \frac{t - S_{\nu(t)-1}}{S_{\nu(t)} - S_{\nu(t)-1}} + Y_{\nu(t)-1} = (Y_{\nu(t)} - Y_{\nu(t)-1})Q(t) + Y_{\nu(t)-1}, \quad S_{\nu(t)-1} \leq t < S_{\nu(t)}, \quad (1)$$

где $\nu(t)$ — целочисленные случайные величины $\nu(t) = \text{Min}\{n \geq 1 : S_n \geq t\} \in [0, \infty)$, $t > 0$, $S_0 = 0$, $S_{\nu(t)} = \sum_{i=1}^{\nu(t)} X_i$, $\nu(t) \geq 1$, X_i — независимые положительные случайные величины с экспоненциальной плотностью распределения $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$. Величины $Y_{\nu(t)}$: $Y_0 = \alpha_0$, $Y_{\nu(t)} = \alpha_{\nu(t)}$, $\nu(t) \geq 1$ в выражении (1) являются независимыми между собой и от X_i случайными величинами с произвольным одномерным распределением $G(y)$.

В настоящей работе представлены результаты численных исследований одномерных распределений и корреляционных функций кусочно-линейного процесса с независимыми негауссовскими случайными величинами в пуассоновских опорных точках.

1 Одномерные распределения кусочно-линейного процесса

В работе [4] было показано, что кусочно-линейный процесс вида (1) для произвольных распределений величин $Y_{\nu(t)}$ является асимптотически стационарным по средним значениям, дисперсиям, асимметрии и эксцессу. В отличие от кусочно-постоянных процессов, рассмотренных в работах Г.А. Михайлова [1, 2], одномерное распределение (и соответствующие моменты) исследуемого процесса в любой точке временной оси не совпадают с заданным распределением в опорных точках.

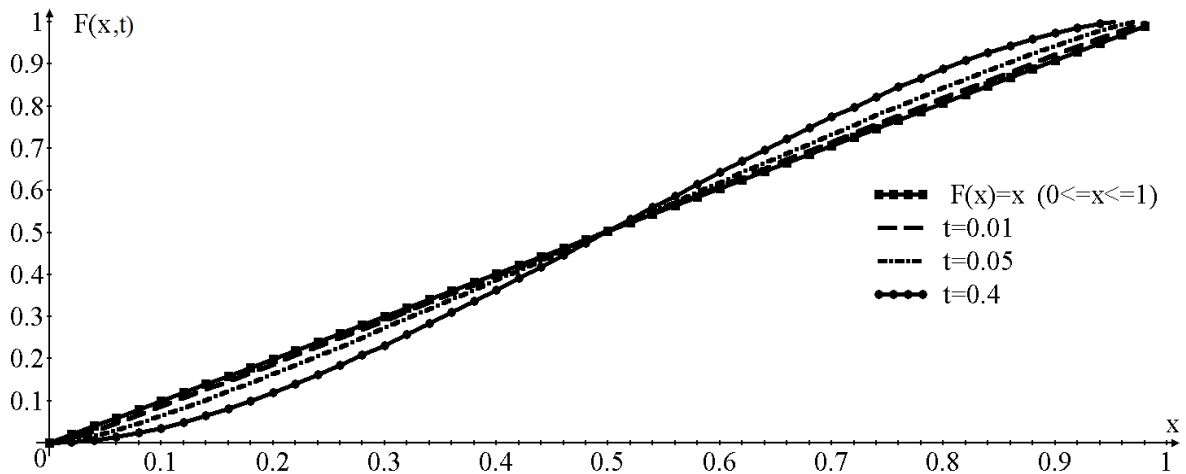


Рис. 1: Функции одномерного распределения $F(x, t)$ процесса $Y(t)$ вида (1) с независимыми равномерными случайными величинами из интервала $(0, 1)$ в пуассоновских опорных точках в зависимости от времени t .

На рисунках 1 – 3 приведены результаты оценивания по модельным выборкам одномерных распределений вероятностей $F(x, t)$ процесса (1) для различных распределений $G(y)$ независимых случайных величин $Y_{\nu(t)}$ в пуассоновских опорных точках: равномерного из интервала $(0, 1)$ (Рис. 1), экспоненциального распределения вида $G(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ (Рис. 2) и стандартного нормального (Рис. 3). При моделировании использовался 1000000 траекторий процесса (1). При больших значениях t процесс выходит на стационарный уровень. Следует отметить, что начальные одномерные распределения в первых двух случаях не имеют точек перегиба, а при $t \rightarrow \infty$ точка перегиба возникает. Для нормального начального распределения точка перегиба сохраняется.

В работе [4] было показано, что для случайного процесса $Y(t)$ вида (1) первые четыре начальных момента $m_k(t) = E[Y^k(t)]$, $k = 1, \dots, 4$ имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= E[Y(t)] = \mu_1, \\ m_2(t) &= E[Y^2(t)] = 2(\mu_2 - \mu_1^2)E[Q^2(t) - Q(t)] + \mu_2, \\ m_3(t) &= E[Y^3(t)] = \mu_3 + 3(\mu_3 - \mu_2\mu_1)E[Q^2(t) - Q(t)], \\ m_4(t) &= E[Y^4(t)] = \mu_4 E[1 - 4Q(t) + 6Q^2(t) - 4Q^3(t) + 2Q^4(t)] + \\ &\quad + 4\mu_3\mu_1 E[Q(t) - 3Q^2(t) + 4Q^3(t) - 2Q^4(t)] + 6\mu_2^2 E[Q^2(t) - 2Q^3(t) + Q^4(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

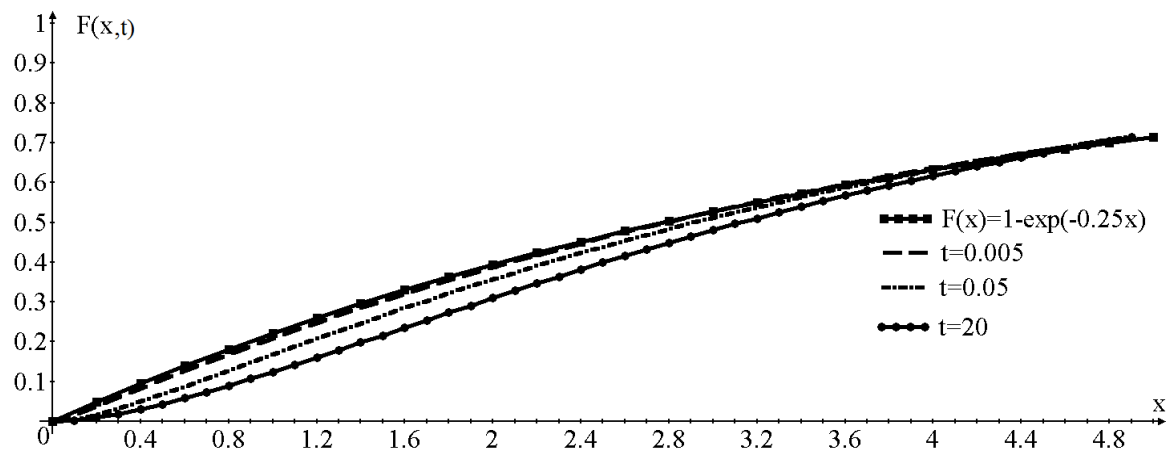


Рис. 2: Функции одномерного распределения $F(x, t)$ процесса $Y(t)$ вида (1) с независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами ($G(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $\lambda = 0.25$) в пуассоновских опорных точках в зависимости от времени t .

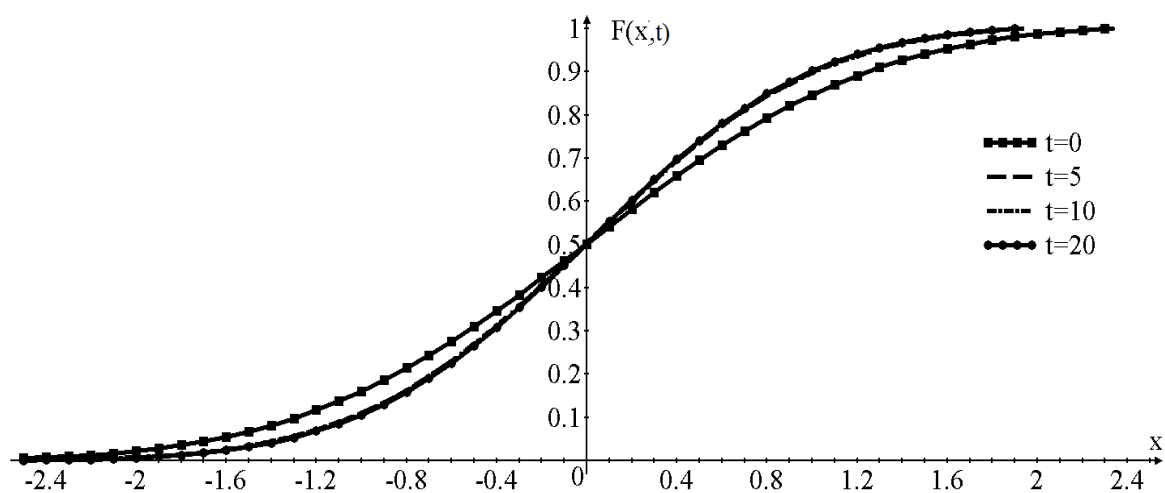


Рис. 3: Функции одномерного распределения $F(x, t)$ процесса $Y(t)$ вида (1) с независимыми стандартными нормальными величинами в пуассоновских опорных точках в зависимости от времени t .

где $E[Y_{\nu(t)}^k] = E[Y_0^k] = \mu_k$, $k = 1, 2, \dots$ начальный момент порядка k случайной величины $Y_{\nu(t)}$, а начальный момент $E[Q^k(t)]$ случайной величины $Q(t)$ порядка $k = 1, 2, \dots$, как показано также в [4], имеет вид:

$$E[Q^k(t)] = \frac{1}{k+1} (1 - e^{-\lambda t} (\lambda t + 1) + (\lambda t)^k (1 + k + \lambda t) \Gamma[1 - k; \lambda t]), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $\Gamma[a, z] = \int_z^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ есть неполная гамма-функция.

При этом

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} m_2(t) &= \mu_2; & \lim_{t \rightarrow \infty} m_2(t) &= \mu_2 - \frac{1}{3}(\mu_2 - \mu_1^2) \\ \lim_{t \rightarrow 0} m_3(t) &= \mu_3; & \lim_{t \rightarrow \infty} m_3(t) &= \frac{1}{2}(\mu_3 + \mu_2\mu_1) \\ \lim_{t \rightarrow 0} m_4(t) &= \mu_4; & \lim_{t \rightarrow \infty} m_4(t) &= \frac{1}{5}(2\mu_4 + 2\mu_3\mu_1 + \mu_2^2) \end{aligned}$$

Из приведенных последних формул видно, что кусочно-линейный процесс $Y(t)$ вида (1) является асимптотически стационарным по приведенным характеристикам.

В Таблице 1 приведены оценки начальных моментов $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$, $m_4(t)$, вычисленные по модельным выборкам для процесса (1), а также соответствующие значения этих моментов, вычисленные по теоретическим формулам (2). Расчеты производились для значения $\lambda = 0.25$ пуассоновского потока точек и для равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ независимых случайных величин $Y_{\nu(t)}$ в пуассоновских опорных точках. При оценке по модельным выборкам использовался 1 000 000 траекторий процесса. Из таблицы видно, что с точностью до статистической погрешности оценки рассматриваемых моментов, полученные по модельным выборкам, и их теоретические значения совпадают, при этом значения этих моментов достаточно быстро выходят на стационарный уровень.

Таблица 1: Оценки начальных моментов $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$, $m_4(t)$, вычисленные по модельным выборкам и формулам (2).

t	$m_2(t)$ теор.	$m_2(t)$ мод.	$m_3(t)$ теор.	$m_3(t)$ мод.	$m_4(t)$ теор.	$m_4(t)$ мод.
0.0	0.333	0.333	0.250	0.250	0.200	0.200
0.2	0.319	0.319	0.229	0.229	0.175	0.176
0.4	0.314	0.314	0.221	0.221	0.166	0.166
0.6	0.311	0.311	0.216	0.216	0.161	0.161
0.8	0.308	0.309	0.213	0.213	0.157	0.157
1.0	0.307	0.307	0.211	0.211	0.155	0.155
1.2	0.306	0.306	0.209	0.209	0.153	0.153
1.4	0.305	0.306	0.208	0.208	0.152	0.152
1.6	0.305	0.305	0.207	0.207	0.151	0.151
1.8	0.305	0.305	0.207	0.207	0.150	0.150
2.0	0.304	0.304	0.207	0.207	0.150	0.150

2 Корреляционная структура кусочно-линейного процесса

В работе [7] было показано, что корреляционная функция кусочно-линейного процесса вида (1) в отличие от выпуклых корреляционных функций кусочно-постоянных процессов [1], [2] в асимптотике имеет точку перегиба. В данной работе были проведены численные эксперименты по исследованию зависимости корреляционных функций кусочно-линейных процессов (1) от вида функции распределения $G(x)$ значений процесса в пуассоновских опорных точках. Можно теоретически показать [8], что нормированная корреляционная функция кусочно-линейного процесса (1) не зависит от вида распределения $G(x)$ величин $Y_{\nu(t)}$, что также

подтверждается численными экспериментами. В расчетах моделировались пары ансамблей из 1 000 000 траекторий кусочно-линейного процесса (1) в каждой паре, с одними и теми же параметрами пуассоновского потока точек, но разными функциями распределения $G(y)$ в узловых точках. По этим ансамблям траекторий оценивались соответствующие корреляционные функции. Оказалось, что различие функций полученных для этих двух ансамблей находится в пределах статистической погрешности оценки коэффициентов корреляции, соответствующей данному объему выборки.

Были также проведены численные эксперименты, связанные с исследованием зависимости корреляционной функции $r(t, \tau)$ кусочно-линейного процесса вида (1) от параметра λ пуассоновского потока и от времени. Результатами исследования, судя по различным характеристикам процесса, стало, то, что он не является стационарным, а выходит на стационарный уровень при $t \rightarrow \infty$. Численно показано, что в начальный момент времени корреляционные функции при различных параметрах λ пуассоновского потока являются выпуклыми функциями, однако при $t \rightarrow \infty$ в них появляется точка перегиба. На рисунке 4 приведены графики корреляционных функций $r(t, \tau)$ кусочно-линейного процесса вида (1) для различных значений параметра λ пуассоновского потока точек и времени t .

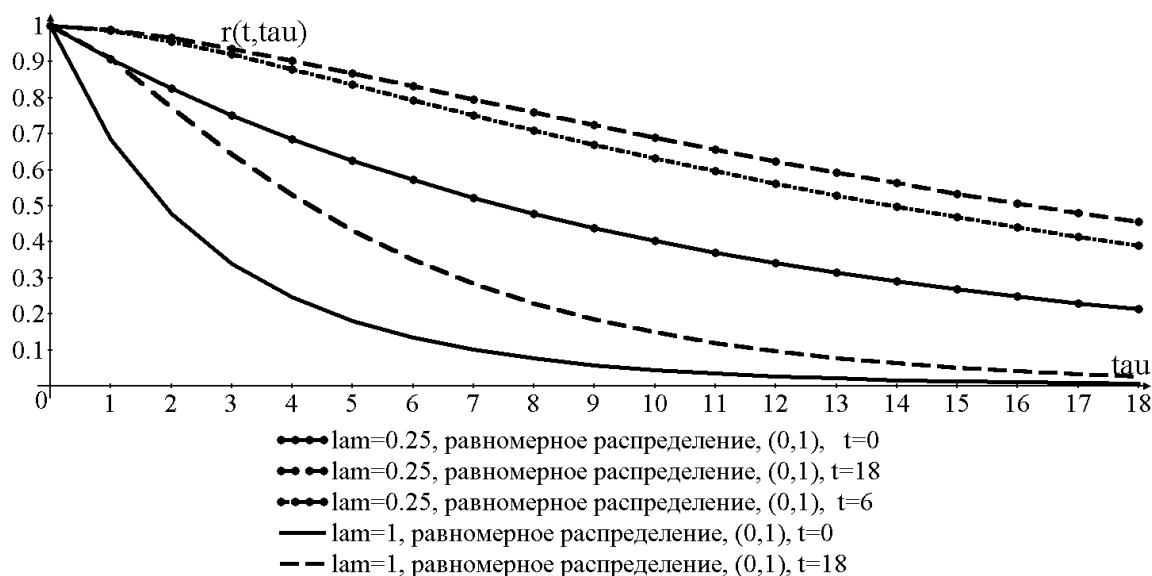


Рис. 4: Корреляционные функции $r(t, \tau)$ кусочно-линейного процесса вида (1) в зависимости от параметра λ пуассоновского потока и времени t .

Заключение

В данной работе продемонстрированы некоторые статистические свойства кусочно-линейных процессов на пуассоновских потоках с независимыми негауссовскими случайными величинами в пуассоновских опорных точках. Приведены одномерные распределения кусочно-линейного процесса вида (1) для различных распределений вероятностей независимых случайных величин $Y_{\nu(t)}$ в пуассоновских опорных точках. Показано, что при больших значениях t процесс выходит на стационарный уровень и при $t \rightarrow \infty$ в одномерных распределениях возникает точка перегиба. Однако, для нормального распределения, взятого в опорных точках, точка перегиба сохраняется и для начальных моментов времени, в отличие от равномерного или экспоненциального распределений. Представлены результаты расчета корреляционной функции по модельным выборкам. Численно показано, что нормированная корреляционная функция кусочно-линейного процесса (1) не зависит от вида распределения величин $Y_{\nu(t)}$ в пуассоновских опорных точках. Кусочно-линейные процессы, рассмотренные в работе, могут быть использованы для моделирования некоторых негауссовских метеорядов, полезны в финансовой математике.

Список литературы

- [1] Михайлов Г.А. Моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма // Докл. АН СССР, 1982, т. 3, N 3, стр. 531–535.
- [2] Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло // — М: Наука, 1986 [Engl.transl.: Springer-Verlag, 1992].
- [3] Савельев Л.Я., Огородников В.А., Сересева О.В. Стохастическая модель кусочно-линейного процесса // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1, Вып. 7, 2007. С. 67–76.
- [4] Сересева О.В. Нестационарные и асимптотически стационарные кусочно-линейные процессы на пуассоновских потоках и некоторые их свойства // Труды конференции молодых ученых. ИВМиМГСОРАН, 2016. С. 83–92.
- [5] Сересева О.В. Стохастическая модель кусочно-линейного процесса на пуассоновском потоке // Вычислительные технологии. Том 13. Специальный выпуск 4, 2008. С. 114–119.
- [6] Ogorodnikov V.A., Saveliev L.Ya., Sereseva O.V. Computation stochastic models of piecewise random processes. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2007. — Vol. 22, No. 3. — P. 505–514.
- [7] Sereseva Olga V. and Ogorodnikov Vasily A. Piecewise Linear Processes on Pouisson Flow // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical analysis. Nonparametric approach”. Novosibirsk&Belokurikha, 2015, pp. 384–391.
- [8] Sereseva Olga V. and Ogorodnikov Vasily A. Correlation structure of the piecewise linear process on pouisson flow // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical analysis. Nonparametric method in cybernetics and system analysis”. Krasnoyarsk, 2017, pp. 292–298.

*Ольга Владимировна Сересева — к.ф.-м.н., мл. науч.сотр. Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
e-mail: sereseva@mail.ru;*

*Василий Александрович Огородников — д.ф.-м.н., главн. науч. сотр. Института вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН; Новосибирский государственный университет;
e-mail: ova@osmf.sscs.ru.*

Дата поступления — 30 мая 2017 г.