

# О ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИИ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

Б. М. Шумилов

*Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, Томск*

УДК 517.968

Для сплайнов третьей степени с неравномерными узлами получен алгоритм вейвлет-разложения в виде решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов.

**Ключевые слова:** неравномерные измерения, кубические сплайны, вейвлеты, ортогональность вторых производных, дифференцирование, прогнозирование.

## Введение

В теории кратномасштабного анализа вейвлетами называют базис множества, заполняющего разность между аппроксимирующими пространствами на густой и прореженной сетках (см. [1, с. 41]). В классическом случае аппроксимации на равномерных бесконечно продолженных в обе стороны сетках такой базис порождается сжатиями и смещениями единственной волновой функции, имеющей вид короткого всплеска или быстро затухающей ряби, которая и называется вейвлетом. За счет сжатия вейвлеты выявляют с разной степенью подробности различие в характеристиках измеренного сигнала, а путем сдвига способны проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. При анализе нестационарных сигналов свойство локальности вейвлетов обеспечивает им существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает только глобальные сведения о свойствах исследуемого сигнала, поскольку используемые при этом базисные функции (синусы и косинусы) имеют бесконечный носитель. При решении задач численного анализа, поскольку вейвлеты преобразуют систему базисных функций с распределенными параметрами в систему с сосредоточенными параметрами, такой базис оказывается гораздо более эффективным с точки зрения обусловленности и сходимости.

Вейвлет-преобразованием в данном контексте и называется, собственно, проблема вычисления коэффициентов вейвлет-разложения по заданным коэффициентам аппроксимирующей функции. В случае ортонормальных и биортогональных вейвлетов решение сводится к применению локальных усредняющих фильтров. Мы считаем это недостатком, так как информация для расчета каждого коэффициента на прореженной сетке учитывается не полностью. В отличие от этого, коэффициенты полуортогональных [2, с. 115] вейвлетов связаны системой линейных алгебраических уравнений, но хорошая обусловленность для нее не гарантирована. В случае измерений, заданных на неравномерной сетке, эти проблемы усугубляются проблемой устойчивости относительно расположения узлов сетки [3]. В [4] при вычислениях предлагалось воспользоваться уникальным свойством “Point Value Vanishing” построенных вейвлетов для того, чтобы получить алгоритм вейвлет-преобразования, требующий на каждом шаге вычисления коэффициентов некоторых интерполяционных сплайнов. Но результирующие выражения получились очень запутанными, и ссылки на использование предложенной конструкции в практических вычислениях найти не удалось. Мы предлагаем использовать вместо этого разработанный ранее [5] прием получения конечных неявных соотношений, связывающих базисные функции пространства сплайнов на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты. В [6] сходная идея факторизации матрицы вейвлет-преобразования использовалась при доказательстве ее обратимости, однако без явного указания возможности практического применения для вычислений.

# 1 Калибровочные соотношения для кубических сплайнов на неравномерной сетке

Основой для построения вейвлетов является наличие так называемых масштабирующих (или, иначе, калибровочных) соотношений таких, что каждая базисная функция на прореженной сетке может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций на густой сетке. В частности, такими соотношениями обладают сплайны – гладкие функции, склеенные из кусков многочленов степени  $m$ , на вложенной последовательности сеток. В случае равномерных сеток на всей числовой оси эти соотношения хорошо известны, так же, как и некоторые случаи приближения на конечном интервале. В практически важном случае измерений, заданных на неравномерной сетке, некоторые рекомендации по получению системы уравнений для нахождения масштабирующих коэффициентов и способах ее решения содержатся в [7]. В [8] рассматривалась задача добавления узлов "по одному" для построения "телескопического" вейвлет-разложения, а в [9] другой вариант – удаления узлов "по одному". В [4] для этого использовался рекурсивный алгоритм вставки узлов, иначе называемый «Oslo algorithm», требующий для своего обоснования теорию дискретных  $B$ -сплайнов и имеющий неоднозначность в виде наличия неустойчивых вариантов. Однако явные выражения калибровочных коэффициентов указаны не были. Поэтому в данной работе мы применим решение Демьяновича Ю.К. [10], полученное с использованием специального дробно-рационального тождества.

Пусть пространство  $V_L$  является пространством сплайнов третьей степени, непрерывных до производных второго порядка включительно, на отрезке  $[a, b]$  с неравномерной сеткой узлов  $\Delta^L : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2^L} = b$  размерности  $2^L + 3$ . Для того, чтобы получить базисные функции пространства  $V_L$ , следует к сетке  $\Delta^L$  добавить фиктивные узлы  $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$ ,  $x_{2^L} < x_{2^L+1} < x_{2^L+2} < x_{2^L+3}$  и построить для функции  $\varphi_3(x, t) = (\max\{x - t, 0\})^3$  разделенные разности 4-го порядка по значениям аргумента  $t = x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$ . Тогда функции (см. [11, с. 86]; [12, с. 18–23])

$$N_k^L(x) = (x_{k+2} - x_{k-2})\varphi_3[x; x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}], \quad k = -1, 0, \dots, 2^L + 1,$$

суть нормализованные  $B$ -сплайны. Это – сплайн-функции степени 3 дефекта 1. Они отличны от нуля на промежутках (носителях)  $(x_{k-2}, x_{k+2})$  и тождественно равны нулю вне их. Иначе говоря, в точках  $x_{k-2}, x_{k+2}$  производные  $N_k^L(x)$  до порядка 2 включительно равны нулю. Последнее накладывает 6 условий на параметры полученного сплайна, и еще один свободный параметр в данном случае определяется так, чтобы было выполнено условие нормировки  $\sum_{k=-1}^{2^L+1} N_k^L(x) = 1, a \leq x \leq b$ . Всякий сплайн третьей степени  $S^L(x) \in V_L$  может быть единственным образом представлен на интервале  $[a, b]$  изменения параметра  $x$  в виде линейной комбинации  $B$ -сплайнов:

$$S^L(x) = \sum_{i=-1}^{2^L+1} C_i^L N_i^L(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

где  $C_i^L$  – постоянные коэффициенты.

Мы не устанавливаем каких-либо условий непрерывности в конечных точках рассматриваемого интервала. Это соответствует тому, что базис из  $B$ -сплайнов обеспечивает правильное представление элементов пространства  $V_L$  только на интервале  $[a, b]$ . При этом для того, чтобы включить в рассмотрение случай дефекта  $\nu > 1$ , следует приписать узлу сетки  $\Delta$  кратность, равную дефекту сплайна в этой точке, и перенумеровать узлы с учетом их кратности. Для последующего удобно выбрать начальные и конечные узлы такими, чтобы  $a = x_{-2} = x_{-1} = x_0$ ,  $x_{2^L} = x_{2^L+1} = x_{2^L+2} = b$ . Тогда при  $C_{-1}^L = C_0^L = C_{2^L}^L = C_{2^L+1}^L = 0$  введенные функции удовлетворяют однородным краевым условиям [13]

$$S^L(a) = (S^L)'(a) = S^L(b) = (S^L)'(b) = 0.$$

Обозначим полученное пространство  $V_L^0$ . Пусть сетка  $\Delta^{L-1}$ ,  $L \geq 3$ , получена из  $\Delta^L$  посредством удаления внутренних нечетных узлов. Тогда соответствующее пространство  $V_{L-1}^0$  с базисными функциями  $N_i^{L-1}(x)$ , не равными нулю на удвоенных носителях  $[x_{2i-4}, x_{2i+4}]$ , вложено в  $V_L^0$ . Двухмасштабное калибровочное соотношение между базисными функциями в  $V_L^0$  и  $V_{L-1}^0$  было получено в [10]

$$N_i^{L-1}(x) = \sum_{k=0}^4 p_{i,k} N_{2i-2+k}^L(x), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} p_{i,0} &= \frac{(x_{2i-1} - x_{2i-4})(x_{2i-3} - x_{2i-4})}{(x_{2i+2} - x_{2i-4})(x_{2i} - x_{2i-4})}, \quad p_{i,1} = \frac{x_{2i-1} - x_{2i-4}}{x_{2i+2} - x_{2i-4}}, \\ p_{i,2} &= \frac{(x_{2i+1} - x_{2i+2})(x_{2i-1} - x_{2i-4})}{(x_{2i+2} - x_{2i-2})(x_{2i-4} - x_{2i+2})} + \frac{(x_{2i+1} - x_{2i-2})(x_{2i-1} - x_{2i+4})}{(x_{2i-2} - x_{2i+4})(x_{2i+2} - x_{2i-2})}, \\ p_{i,3} &= \frac{x_{2i+1} - x_{2i+4}}{x_{2i-2} - x_{2i+4}}, \quad p_{i,4} = \frac{(x_{2i+3} - x_{2i+4})(x_{2i+1} - x_{2i+4})}{(x_{2i} - x_{2i+4})(x_{2i-2} - x_{2i+4})}. \end{aligned}$$

В частности, на левом краю интервала калибровочное соотношение между базисными функциями в  $V_L^0$  и  $V_{L-1}^0$  принимает вид

$$N_1^{L-1}(x) = \sum_{k=1}^4 p_{1,k} N_k^L(x) \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= \frac{x_1 - x_0}{x_4 - x_0}, \quad p_{1,2} = \frac{(x_1 - x_0)(x_4 - x_3)}{(x_0 - x_4)^2} + \frac{(x_6 - x_1)(x_3 - x_0)}{(x_6 - x_0)(x_4 - x_0)}, \\ p_{1,3} &= \frac{x_3 - x_6}{x_0 - x_6}, \quad p_{1,4} = \frac{(x_5 - x_6)(x_3 - x_6)}{(x_2 - x_6)(x_0 - x_6)}. \end{aligned}$$

Представление крайней правой широкой базисной функции зеркально отражает полученное выше представление

$$N_{2^{L-1}-1}^{L-1}(x) = \sum_{k=0}^3 p_{2^{L-1}-1,k} N_{2^L-4+k}^L(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} p_{2^{L-1}-1,0} &= \frac{(x_{2^L-5} - x_{2^L-6})(x_{2^L-3} - x_{2^L-6})}{(x_{2^L-2} - x_{2^L-6})(x_{2^L} - x_{2^L-6})}, \quad p_{2^{L-1}-1,1} = \frac{x_{2^L-3} - x_{2^L-6}}{x_{2^L} - x_{2^L-6}}, \\ p_{2^{L-1}-1,2} &= \frac{(x_{2^L-1} - x_{2^L})(x_{2^L-4} - x_{2^L-3})}{(x_{2^L} - x_{2^L-4})^2} + \\ &+ \frac{(x_{2^L} - x_{2^L-3})(x_{2^L-1} - x_{2^L-6})}{(x_{2^L-6} - x_{2^L})(x_{2^L-4} - x_{2^L})}, \quad p_{2^{L-1}-1,3} = \frac{x_{2^L} - x_{2^L-1}}{x_{2^L} - x_{2^L-4}}. \end{aligned}$$

## 2 Построение кубических сплайн-вейвлетов

Второе, что лежит в основе всякого вейвлет-преобразования, — это масштабирующие (калибровочные) соотношения для самих вейвлетов. Такие соотношения известны для случаев ортогональных и биортогональных вейвлетов, что позволяет бесконечным итерированием получить их графическое представление, но не доставляет аналитического выражения, которое может быть использовано в качестве пробной функции, например, в методе типа Галеркина. В отличие от этого, полуортогональные [2, с. 112] вейвлеты определяются явным образом, как линейные комбинации базисных сплайнов на густой сетке. Характерным свойством полуортогональных вейвлетов, которое иногда полагается в основу численного метода [14] построения вейвлет-преобразования, является то, что вейвлет-разложение обеспечивает построение наилучшего среднеквадратического приближения сплайнов на густой сетке посредством сплайнов на прореженной сетке. Это дает преимущество при решении задачи сжатия дискретной числовой информации. Однако данное преимущество нивелируется при дифференцировании полученных сплайн-вейвлетных разложений. Поэтому оптимальным решением являются сплайн-вейвлеты, наследующие свойство наилучшего среднеквадратического приближения производных сплайнов на густой сетке посредством производных сплайнов на прореженной сетке. Впервые такие вейвлеты были изучены в случае кубических сплайнов [15], где были найдены вейвлеты третьей степени  $\psi(x-i)\forall i$ , для которых удовлетворяются условия ортогональности соответствующим базисным сплайнам  $\varphi(x-j)\forall j$ , относительно скалярного произведения со вторыми производными:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi''(x-i)\varphi''(x-j)dx = 0 \forall i, j$ . При этом оказывается, что эти вейвлеты имеют очень простую конструкцию, в частности, носитель меньше носителя классических полуортогональных сплайн-вейвлетов, а именно,  $[0, 3] \subset [0, 7]$ . Обобщение данной конструкции на случай неравномерной сетки было сделано в [4].

Пространство вейвлетов  $W_{L-1}$  определяется как ортогональное дополнение  $V_{L-1}^0$  до  $V_L^0$  в гильбертовом пространстве

$$H_0^2[a, b] = \{f \in C[a, b]; f'' \in L^2[a, b], f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\},$$

в котором скалярное произведение определяется как

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f'' g''.$$

Характерным свойством функций  $g \in W_{L-1}$  является то, что  $g(x_{2i}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2^{L-1}$ , откуда немедленно следует, что множество базисных вейвлетов удовлетворяет следующим масштабирующим соотношениям [4]:

$$\psi_k^{L-1}(x) = q_{k,0} N_{2k-2}^L(x) + N_{2k-1}^L(x) + q_{k,2} N_{2k}^L(x), \quad k = 2, 3, \dots, 2^{L-1} - 1, \quad (5)$$

$$\psi_1^{L-1}(x) = N_1^L(x) + q_{1,2} N_2^L(x), \quad (6)$$

$$\psi_{2^{L-1}}^{L-1}(x) = q_{2^{L-1},0} N_{2^{L-2}}^L(x) + N_{2^{L-1}}^L(x), \quad (7)$$

где

$$q_{k,0} = -\frac{N_{2k-1}^L(x_{2k-2})}{N_{2k-2}^L(x_{2k-2})}, \quad k = 2, 3, \dots, 2^{L-1},$$

и

$$q_{k,2} = -\frac{N_{2k-1}^L(x_{2k})}{N_{2k}^L(x_{2k})}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1.$$

Очевидно, что носитель данных вейвлетов равен  $[x_{2k-4}, x_{2k+2}] \cap [a, b]$ , что меньше носителя кубического  $B$ -сплайна.

### 3 Построение вейвлет-преобразования

Удобно записать коэффициенты сплайна и базисные функции в  $V_L^0$ , как  $C^L = [C_1^L, C_2^L, \dots, C_{2^{L-1}}^L]^T$  и  $\varphi^L = [N_1^L, N_2^L, \dots, N_{2^{L-1}}^L]$ . Тогда для любой функции  $S_0^L(x) \in V_L^0$  уравнение (1) переписывается в виде  $S_0^L(x) = \varphi^L(x) C^L$ . Аналогично, в пространстве  $W_L$  запишем базисные вейвлет-функции в виде матрицы-строки,  $\psi^L = [\psi_1^L, \psi_2^L, \dots, \psi_{2^{L-1}}^L]$ . Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор,  $D^L = [D_1^L, D_2^L, \dots, D_{2^{L-1}}^L]^T$ . Для сетки  $\Delta^{L-1}$ ,  $L \geq 3$ , можно записать функции  $\varphi^{L-1}$  и  $\psi^{L-1}$  в виде линейных комбинаций функций  $\varphi^L$ , так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из пяти (соответственно, из трех), а на краях интервала из четырех (соответственно, из двух) узких базисных функций  $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$  и  $\psi^{L-1} = \varphi^L Q^L$ , где элементы столбцов матрицы  $P^L$  составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (2)–(4), тогда как элементы столбцов матрицы  $Q^L$  — из коэффициентов калибровочных соотношений для вейвлетов (5)–(7).

Поскольку любая функция в  $V_L^0$  может быть записана в виде суммы некоторой функции в  $V_{L-1}^0$  и некоторой функции в  $W_{L-1}$ , то справедливы равенства

$$\varphi^L(x) C^L = \varphi^{L-1}(x) C^{L-1} + \psi^{L-1}(x) D^{L-1} = \varphi^L(x) P^L C^{L-1} + \varphi^L(x) Q^L D^{L-1}.$$

Следовательно, коэффициенты  $C^L$  кубического сплайна на сетке  $\Delta^L$  могут быть получены из коэффициентов  $C^{L-1}$  и  $D^{L-1}$  вейвлет-разложения на сетке  $\Delta^{L-1}$  как  $C^L = P^L C^{L-1} + Q^L D^{L-1}$  или, с использованием обозначения для блочных матриц (см. [2, с. 114]),

$$C^L = [P^L \mid Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Ниже представлен пример матрицы  $[P^L \mid Q^L]$ , соответствующий  $L = 3$ :

$$[P^3 | Q^3] = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} p_{1,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{1,2} & p_{2,0} & 0 & q_{1,2} & q_{2,0} & 0 & 0 \\ p_{1,3} & p_{2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{1,4} & p_{2,2} & p_{3,0} & 0 & q_{2,2} & q_{3,0} & 0 \\ 0 & p_{2,3} & p_{3,1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_{2,4} & p_{3,2} & 0 & 0 & q_{3,2} & q_{4,0} \\ 0 & 0 & p_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (9)$$

Обратный процесс разбиения коэффициентов  $C^L$  на более грубую версию  $C^{L-1}$  и уточняющие коэффициенты  $D^{L-1}$  состоит в решении системы линейных уравнений (8). Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть значения сплайн-коэффициентов  $C_i^{L-1}$  на прореженной сетке  $\Delta^{L-1}$  вычислены из решения трехдиагональной системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} N_1^{L-1}(x_2)C_1^{L-1} + N_2^{L-1}(x_2)C_2^{L-1} &= f_1, \\ N_{i-1}^{L-1}(x_{2i})C_{i-1}^{L-1} + N_i^{L-1}(x_{2i})C_i^{L-1} + N_{i+1}^{L-1}(x_{2i})C_{i+1}^{L-1} &= f_i, \quad i = 2, \dots, 2^{L-1} - 2, \\ N_{2^{L-1}-2}^{L-1}(x_{2^{L-1}})C_{2^{L-1}-2}^{L-1} + N_{2^{L-1}-1}^{L-1}(x_{2^{L-1}})C_{2^{L-1}-1}^{L-1} &= f_{2^{L-1}-1}, \\ f_i &= S^L(x_{2i}), \quad i = 1, \dots, 2^{L-1} - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда значения вейвлет-коэффициентов равны

$$D_1^{L-1} = C_1^L - p_{1,1}C_1^{L-1}, \quad D_{2^{L-1}}^{L-1} = C_{2^{L-1}}^L - p_{2^{L-1}-1,3}C_{2^{L-1}-1}^{L-1}, \quad (11)$$

$$D_i^{L-1} = C_{2i-1}^L - p_{i-1,3}C_{i-1}^{L-1} - p_{i,1}C_i^{L-1}, \quad i = 2, 3, \dots, 2^{L-1} - 1. \quad (12)$$

Разрешимость системы (10) следует из единственности соответствующего интерполяционного сплайна (см. [12, с. 141]).

Обозначим

$$\rho = \max(h_i/h_j, |i - j| = 1),$$

где  $h_i = x_{2i+2} - x_{2i}$ .

Известно (см. [12, с. 143]), что если  $\rho < (1 + \sqrt{13})/2$ , то система (10) будет со строгим диагональным преобладанием, и для решения системы рекомендуется применять метод прогонки. Если же это условие не выполняется, то следует прибегнуть к методу немонотонной прогонки, который корректен для всякой хорошо обусловленной матрицы. К сожалению, для  $\rho \geq (3 + \sqrt{5})/2$  хорошую обусловленность матрицы нельзя гарантировать.

Поэтому в общем случае предлагается решать интерполяционную систему относительно величин  $(S^{L-1})''(x_{2i}) = M_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^{L-1}$ , вида (см. [12, с. 100])

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= \frac{6f_1}{h_0^2}, \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i, \quad i = 1, \dots, 2^{L-1} - 1, \\ M_i + 2M_{i+1} &= \frac{6f_i}{h_i^2}, \quad i = 2^{L-1} - 1, \end{aligned} \quad (13)$$

причем

$$\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i), \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad (14)$$

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right). \quad (15)$$

Матрица полученной системы (13) есть матрица с диагональным преобладанием (см. [16, с. 78]). Такие матрицы не вырождены, и поэтому система уравнений относительно сплайн-коэффициентов  $M_i$  на прореженной сетке  $\Delta^{L-1}$  имеет и притом единственное решение, которое находится методом прогонки. После определения  $M_i$  вычисление коэффициентов сплайна  $C_i^{L-1}$  проводится по формуле (см. [17]; [11, с. 96]), выражающей коэффициенты локально-аппроксимационного сплайна через значения аппроксимируемой функции в узлах сетки  $\Delta^{L-1}$ :

$$C_i^{L-1} = f_i + \frac{1}{3}(h_i - h_{i-1})m_i - \frac{1}{6}h_i h_{i-1} M_i, \quad (16)$$

где

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1} + 2M_i). \quad (17)$$

## Заключение

Представленная в статье схема построения сплайн-вейвлетов, полуортогональных относительно скалярного произведения с производными, и получения для них алгоритма вейвлет-преобразования в виде решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений предоставляет новые возможности для создания вычислительно-эффективных алгоритмов построения и использования сплайн-вейвлетов на неравномерных сетках. В докладе в режиме "ручного счета" продемонстрировано применение построенного алгоритма к задаче численного дифференцирования. Полученные результаты используются при решении задачи прогнозирования. Результаты численных экспериментов позволяют обосновать существование наилучших прогнозных значений построенных сплайн-вейвлетов.

## Список литературы

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2001.
- [2] Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике / Пер. с англ. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2002.
- [3] Lyche T., Mørken K., Pelosi F. Stable, linear spline wavelets on nonuniform knots with vanishing moments // Computer Aided Geometric Design. 2009. V. 26. P. 203–216.
- [4] Wang J. Interpolating cubic spline wavelet packet on arbitrary partitions // Journal of Computational Analysis and Applications. 2003. V. 5. № 1. P. 179–193.
- [5] Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2010. № 4. С. 45–55.
- [6] Černá D., Finěk V. Cubic spline wavelets with short support for fourth-order problems // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 243. P. 44–56.
- [7] Оселедец И.В. Применение разделенных разностей и  $B$ -сплайнов для построения быстрых дискретных преобразований вейвлетовского типа на неравномерных сетках // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 7. С. 743–752.
- [8] Макаров А.А. Один вариант сплайн-вейвлетного разложения пространств  $B$ -сплайнов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 59–71.
- [9] Зимин А. В. Вэйвлетная схема, основанная на аппроксимации кубическими  $B$ -сплайнами на неравномерной сетке // Сб. Методы вычислений. 2008. Т. 23. С. 56–73.
- [10] Демьянович Ю.К. Калибровочное соотношение для  $B$ -сплайнов на неравномерной сетке // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 9. С. 98–100.
- [11] Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь. 1985.
- [12] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [13] Volkov Y.S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via  $B$ -spline basis // Central European Journal of Mathematics. 2012. V. 10. № 1. P. 352–356.

- [14] Lyche T., Mørken K., Quak E. Theory and algorithms for non-uniform spline wavelets, in “Multivariate Approximation and Applications”, N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, and A. Pinkus, (eds), Cambridge University Press, Cambridge, 2001, P. 152–187.
- [15] Wang J. Cubic spline wavelet bases of sobolev spaces and multilevel interpolation // Applied and Computational Harmonic Analysis. 1996. V. 3. № 2. P. 154–163.
- [16] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [17] de Boor C., Fix G. Spline approximation by quasi-interpolants // J. Approx. Theory. 1973. V. 8. P. 19–45.

*Борис Михайлович Шумилов — д.ф.-м.н., проф. Томского  
государственного архитектурно-строительного университета;  
e-mail: sbm05@yandex.ru.*

*Дата поступления — 30 апреля 2017 г.*