

ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

С. В. Тиховская, А. И. Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, 644099, Омск

УДК 519.65

Решению сингулярно возмущенных задач с возмущающим параметром ε соответствуют функции с большими градиентами. При интерполяции функций широко применяется интерполяция на основе многочленов Лагранжа на равномерной сетке. Тем не менее, известно, что для функций с большими градиентами использование такого типа интерполяции приводит к неравномерным по ε оценкам и погрешностям порядка $O(1)$. Добиться равномерных по ε оценок можно либо используя полиномиальную интерполяцию на кусочно-равномерной сетке Шишкина, либо построить на равномерной сетке интерполяционную формулу, точную на погранслойной составляющей. В данной работе на основе разработанных ранее формул интерполяции исследованы формулы численного дифференцирования, точные на погранслойной составляющей, для функций с большими градиентами, и получены равномерные по ε оценки погрешности. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические результаты.

Ключевые слова: функция одной переменной, погранслойная составляющая, формулы численного дифференцирования, ε -равномерные оценки погрешности.

Введение

Известно, что решение сингулярно возмущенных краевых задач имеют большие градиенты в области пограничного слоя [1, 2]. Применение классических разностных схем для численного решения сингулярно возмущенных задач может приводить к существенным погрешностям [3–8]. Разработано два основных подхода к построению разностных схем, сходящихся равномерно по малому параметру ε : применение схем экспоненциальной подгонки [3] и сгущение сетки в пограничном слое [4, 5].

Если функция имеет большие градиенты в области пограничного слоя, то применение к ней классических интерполяционных формул и формул численного дифференцирования так же может приводить к существенным погрешностям [9–13]. В [9] исследованы вопросы интерполяции и численного дифференцирования функции одной переменной с погранслойной составляющей, соответствующей экспоненциальному пограничному слою. Построена формула для вычисления первой производной функции по значениям этой функции в двух соседних узлах. Формула построена так, чтобы она была точной на погранслойной составляющей экспоненциального вида. Доказано, что относительная погрешность построенной формулы порядка $O(h)$, где h — шаг сетки. В то же время доказано и численно подтверждено, что погрешность классической формулы при $\varepsilon = h$ порядка $O(1)$. В [10] построенная формула для производной обобщена на случай, когда функция имеет вид:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где функция $u(x)$ является достаточно гладкой, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна, является достаточно гладкой, ее производные не являются равномерно ограниченными, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе с производными до некоторого порядка, постоянная γ не задана.

Представление (1) справедливо для решения сингулярно-возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \quad (2)$$

где $a_1(x) \geq \alpha > 0$, $a_2(x) \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, функции a_1 , a_2 , f — достаточно гладкие, α отделено от нуля. Согласно [1], при малых значениях параметра ε решение задачи (2) имеет экспоненциальный пограничный слой у границы интервала $x = 0$ и для функции $u(x)$ справедливо представление (1). Если задать

$$\Phi(x) = e^{-a_0 x/\varepsilon}, \quad a_0 = a_1(0), \quad \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0,$$

то выполняются оценки $|p'(x)| \leq C_0$, $|\gamma| \leq C_0$. Производные составляющей $\Phi(x)$ неограниченно растут с уменьшением ε .

В [11] построена формула численного дифференцирования с произвольно заданным числом узлов k , точная на погранслоевой составляющей $\Phi(x)$, когда функция имеет вид (1). Но в [11] нет оценок погрешности построенной формулы, равномерной по погранслоевым изменениям дифференцируемой функции.

Целью данной работы является обоснование разностных формул для вычисления первой и второй производных функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Исследуемые формулы соответствуют [11] и являются точными на погранслоевой составляющей.

Обозначения. Под C будем подразумевать положительную постоянную, не зависящую от параметра ε и шага сетки. Обозначим $\|f\| = \max_x |f(x)|$.

1 Постановка задачи

Пусть Ω^h — равномерная сетка исходного интервала:

$$\Omega^h = \{x_n : x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ вида (1) задана в узлах сетки, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$.

В [11] построена формула численного дифференцирования функции вида (1) с погранслоевой составляющей, точная на $\Phi(x)$. Формула для вычисления j -ой производной функции $u(x)$ на интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ по значениям функции в k узлах $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}$ имеет вид:

$$L_{\Phi,k}^{(j)}(u, x) = L_{k-1}^{(j)}(u, x) + \frac{[x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}]\Phi} \left(\Phi^{(j)}(x) - L_{k-1}^{(j)}(\Phi, x) \right), \quad j \geq 0, \quad (3)$$

где $L_{k-1}(u, x) = L_{k-1}(u, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-2}, x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа по значениям функции $u(x)$ в $(k-1)$ узлах $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-2}$ и $[x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}]u$ — разделенная разность функции $u(x)$.

Оценим погрешность формулы (3) в случае экспоненциального пограничного слоя [1], когда $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$.

Отметим, что когда дифференцируемая функция $u(x)$ имеет равномерно ограниченные производные, классическая формула $L_k^{(j)}(u, x)$ для вычисления производных [14] и предложенная формула (3) имеют погрешность одного порядка.

2 Разностные формулы для первой производной

Рассмотрим классическую формулу для вычисления первой производной по трем узлам:

$$u'(x) \approx L'_3(u, x) = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}(x - x_n), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \quad (4)$$

Можно показать, что при $\varepsilon = h$ относительная погрешность формулы (4) может быть порядка $O(1)$.

Выпишем формулу (3) при $k = 3$, $j = 1$

$$L'_{\Phi,3}(u, x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} + \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}} \left(\Phi'(x) - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h} \right), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \quad (5)$$

Предполагаем, что $\Phi''(x) \neq 0$, $x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]$, тогда формула (5) определена корректно.

Теорема 1. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда для некоторой постоянной C

$$\varepsilon |L'_{\Phi,3}(u, x) - u'(x)| \leq Ch \min\{h, \varepsilon\} (\|p''\| + \varepsilon \|p'''\|), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}].$$

3 Разностные формулы для второй производной

3.1 Разностная формула с тремя узлами для второй производной

Рассмотрим классическую формулу для вычисления второй производной по трем узлам:

$$u''(x) \approx L_3''(u, x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \quad (6)$$

Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда в случае $\varepsilon = h$ справедливо:

$$\varepsilon^2 |(u_0 - 2u_1 + u_2)/h^2 - u''(0)| = |(1 - 2e^{-1} + e^{-2}) - 1| \approx 0.6.$$

Получаем, что при малых значениях ε относительная погрешность формулы (6) может быть значительной и не зависит от h .

Выпишем формулу (3) при $k = 3, j = 2$

$$L_{\Phi,3}''(u, x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}} \Phi''(x), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]. \quad (7)$$

Предполагаем, что $\Phi''(x) \neq 0, x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]$, тогда формула (7) определена корректно.

Теорема 2. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда для некоторой постоянной C

$$\varepsilon^2 |L_{\Phi,3}''(u, x) - u''(x)| \leq Ch (\varepsilon^2 \|p'''\| + (h + \varepsilon) \|p''\|), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}],$$

$$\varepsilon^2 |L_{\Phi,3}''(u, x_{n-1}) - u''(x_{n-1})| \leq 3Ch \max\{h, \varepsilon\} (\varepsilon \|p'''\| + \|p''\|),$$

$$\varepsilon^2 |L_{\Phi,3}''(u, x_n) - u''(x_n)| \leq C \min\{h^2, \varepsilon^2\} \|p'''\|,$$

$$\varepsilon^2 |L_{\Phi,3}''(u, x_{n+1}) - u''(x_{n+1})| \leq C\varepsilon \min\{h, \varepsilon\} (\varepsilon \|p'''\| + \|p''\|).$$

3.2 Разностная формула с четырьмя узлами для второй производной

Рассмотрим классическую формулу для вычисления второй производной по четырем узлам:

$$u''(x) \approx L_4''(u, x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1} + 3u_n - u_{n-1}}{h^3}(x - x_n), \quad [x_{n-1}, x_{n+2}]. \quad (8)$$

Можно показать, что при $\varepsilon = h$ относительная погрешность формулы (8) может быть порядка $O(1)$.

Выпишем формулу (3) при $k = 4, j = 2$ на интервале $[x_{n-1}, x_{n+2}]$:

$$L_{\Phi,4}''(u, x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1} + 3u_n - u_{n-1}}{\Phi_{n+2} - 3\Phi_{n+1} + 3\Phi_n - \Phi_{n-1}} \left(\Phi''(x) - \frac{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}}{h^2} \right). \quad (9)$$

Предполагаем, что $\Phi'''(x) \neq 0, x \in [x_{n-1}, x_{n+2}]$, тогда формула (9) определена корректно.

Теорема 3. Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда для некоторой постоянной C

$$\varepsilon^2 |L_{\Phi,4}''(u, x) - u''(x)| \leq Ch^2 (\varepsilon^2 \|p^{(4)}\| + (h + \varepsilon) \|p^{(3)}\|), \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+2}].$$

4 Численные эксперименты

Рассмотрим функцию:

$$u(x) = \cos(\pi x/2) + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0, 1].$$

Определим норму погрешности в узле x_{n-1} следующей формулой:

$$\Delta_{N,k,n-1}^{(j)} = \max_{i=0, k-1, \dots, N-k+1} |L_{\Phi,k}^{(j)}(u, x_i) - u(x_i)|.$$

Аналогично определим норму погрешности в узлах x_{n+1}, x_{n+2} .

Определим норму погрешности в точке $x \in [x_{n-1}, x_{n+k-2}]$ следующей формулой:

$$\Delta_{N,k}^{(j)} = \max_{\substack{l=i+j/4, \dots, i+k-5/4 \\ j=1, \dots, 4(k-1)-1, j \neq 4,8 \\ i=0, k-1, \dots, N-k+1}} |L_{\Phi,k}^{(j)}(u, x_l) - u(x_l)|,$$

где $x_{l+1/2} = (x_l + x_{l+1})/2$, $x_{l+1/4} = (x_l + x_{l+1/2})/2$, $x_{l+3/4} = (x_{l+1/2} + x_{l+1})/2$.

4.1 Разностная формула с тремя узлами для первой производной

В табл. 1 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3,n-1}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n-1} .

Таблица 1: Норма погрешности $\Delta_{N,3,n-1}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	1.13e-3	2.85e-4	7.13e-5	4.46e-6	2.79e-7
2 ⁻⁵	1.68e-1	5.82e-2	1.73e-2	1.24e-3	8.04e-5
2 ⁻⁶	3.81e-1	1.68e-1	5.82e-2	4.75e-3	3.18e-4
2 ⁻⁷	6.34e-1	3.81e-1	1.68e-1	1.73e-2	1.24e-3
2 ⁻⁹	9.06e-1	8.13e-1	6.34e-1	1.68e-1	1.73e-2
2 ⁻¹¹	9.77e-1	9.53e-1	9.06e-1	6.34e-1	1.68e-1
2 ⁻¹³	9.94e-1	9.88e-1	9.77e-1	9.06e-1	6.34e-1
2 ⁻¹⁵	9.99e-1	9.97e-1	9.94e-1	9.77e-1	9.06e-1

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	1.22e-3	3.10e-4	7.82e-5	4.92e-6	3.08e-7
2 ⁻⁵	1.01e-3	2.26e-4	5.34e-5	3.19e-6	1.97e-7
2 ⁻⁶	1.22e-3	2.53e-4	5.66e-5	3.24e-6	1.98e-7
2 ⁻⁷	1.58e-3	3.07e-4	6.33e-5	3.34e-6	1.99e-7
2 ⁻⁹	2.18e-3	4.90e-4	9.91e-5	3.96e-6	2.09e-7
2 ⁻¹¹	2.35e-3	5.74e-4	1.36e-4	6.19e-6	2.48e-7
2 ⁻¹³	2.39e-3	5.95e-4	1.47e-4	8.53e-6	3.87e-7
2 ⁻¹⁵	2.40e-3	6.00e-4	1.50e-4	9.19e-6	5.33e-7

В табл. 2 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3,n+1}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n+1} .

Таблица 2: Норма погрешности $\Delta_{N,3,n+1}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	1.14e-3	2.85e-4	7.13e-5	4.46e-6	2.79e-7
2 ⁻⁵	1.03e-1	4.54e-2	9.28e-3	6.45e-4	4.01e-5
2 ⁻⁶	1.47e-1	1.03e-1	4.54e-2	2.70e-3	1.68e-4
2 ⁻⁷	1.16e-1	1.47e-1	1.03e-1	9.28e-3	6.45e-4
2 ⁻⁹	3.12e-2	6.24e-2	1.16e-1	1.03e-1	9.28e-3
2 ⁻¹¹	7.81e-3	1.56e-2	3.12e-2	1.16e-1	1.03e-1
2 ⁻¹³	1.95e-3	3.91e-3	7.81e-3	3.12e-2	1.16e-1
2 ⁻¹⁵	4.88e-4	9.77e-4	1.95e-3	7.81e-3	3.12e-2

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	1.22e-3	3.10e-4	7.82e-5	4.92e-6	3.08e-7
2 ⁻⁵	6.15e-4	1.76e-4	4.71e-5	3.09e-6	1.95e-7
2 ⁻⁶	4.71e-4	1.54e-4	4.41e-5	3.04e-6	1.95e-7
2 ⁻⁷	2.90e-4	1.18e-4	3.86e-5	2.94e-6	1.93e-7
2 ⁻⁹	7.50e-5	3.76e-5	1.82e-5	2.42e-6	1.84e-7
2 ⁻¹¹	1.88e-5	9.40e-6	4.71e-6	1.14e-6	2.47e-7
2 ⁻¹³	4.69e-6	2.35e-6	1.18e-6	2.94e-7	7.28e-8
2 ⁻¹⁵	1.17e-6	5.88e-7	2.94e-7	7.35e-8	1.84e-8

В табл. 3 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа).

Таблица 3: Норма погрешности $\Delta_{N,3}^{(1)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	4.62e-4	1.16e-4	2.90e-5	1.81e-6	1.13e-7
2 ⁻⁵	5.99e-2	2.22e-2	6.84e-3	5.01e-4	3.26e-5
2 ⁻⁶	1.16e-1	5.99e-2	2.22e-2	1.90e-3	1.29e-4
2 ⁻⁷	1.35e-1	1.16e-1	5.99e-2	6.84e-3	5.01e-4
2 ⁻⁹	6.22e-2	1.07e-1	1.35e-1	5.99e-2	6.84e-3
2 ⁻¹¹	1.95e-2	3.87e-2	6.22e-2	1.35e-1	5.99e-2
2 ⁻¹³	4.88e-3	9.77e-3	1.95e-2	6.22e-2	1.35e-1
2 ⁻¹⁵	1.22e-3	2.44e-3	4.88e-3	1.95e-2	6.22e-2

ε	N				
	32	64	128	512	2048
1	4.96e-4	1.26e-4	3.18e-5	2.00e-6	1.25e-7
2 ⁻⁵	3.60e-4	8.64e-5	2.10e-5	1.29e-6	7.98e-8
2 ⁻⁶	3.72e-4	9.02e-5	2.16e-5	1.30e-6	8.00e-8
2 ⁻⁷	3.38e-4	9.32e-5	2.26e-5	1.32e-6	8.03e-8
2 ⁻⁹	1.50e-4	6.43e-5	2.12e-5	1.41e-6	8.22e-8
2 ⁻¹¹	4.70e-5	2.33e-5	9.36e-6	2.47e-6	4.95e-7
2 ⁻¹³	1.18e-5	5.88e-6	2.94e-6	5.85e-7	1.82e-7
2 ⁻¹⁵	2.94e-6	1.47e-6	7.35e-7	1.84e-7	3.66e-8

Из таблиц 1–3 следует, что полученные в теореме 1 оценки подтверждаются.

4.2 Разностная формула с тремя узлами для второй производной

В табл. 4 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3,n-1}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n-1} .

Таблица 4: Норма погрешности $\Delta_{N,3,n-1}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	1.09e-1	5.46e-2	2.74e-2	6.85e-3	1.71e-3	1	1.17e-1	5.96e-2	3.00e-2	7.56e-3	1.89e-3
2 ⁻⁵	6.00e-1	3.81e-1	2.17e-1	6.03e-2	1.55e-2	2 ⁻⁵	3.61e-3	1.48e-3	6.68e-4	1.55e-4	3.79e-5
2 ⁻⁶	8.13e-1	6.00e-1	3.81e-1	1.16e-1	3.07e-2	2 ⁻⁶	2.62e-3	9.05e-4	3.70e-4	7.93e-5	1.91e-5
2 ⁻⁷	9.40e-1	8.13e-1	6.00e-1	2.17e-1	6.03e-2	2 ⁻⁷	2.35e-3	6.55e-4	2.26e-4	4.18e-5	9.66e-6
2 ⁻⁹	9.96e-1	9.84e-1	9.40e-1	6.00e-1	2.17e-1	2 ⁻⁹	2.40e-3	5.93e-4	1.47e-4	1.41e-5	2.61e-6
2 ⁻¹¹	1.00e+0	9.99e-1	9.96e-1	9.40e-1	6.00e-1	2 ⁻¹¹	2.41e-3	6.02e-4	1.50e-4	9.18e-6	8.84e-7
2 ⁻¹³	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	9.96e-1	9.40e-1	2 ⁻¹³	2.41e-3	6.02e-4	1.51e-4	9.38e-6	5.74e-7
2 ⁻¹⁵	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	9.96e-1	2 ⁻¹⁵	2.41e-3	6.02e-4	1.51e-4	9.41e-6	5.86e-7

В табл. 5 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3,n+1}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n+1} .

Таблица 5: Норма погрешности $\Delta_{N,3,n+1}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	1.09e-1	5.47e-2	2.74e-2	6.85e-3	1.71e-3	1	1.17e-1	5.96e-2	3.00e-2	7.56e-3	1.89e-3
2 ⁻⁵	2.64e-1	2.51e-1	1.76e-1	5.72e-2	1.53e-2	2 ⁻⁵	1.58e-3	9.76e-4	5.42e-4	1.47e-4	3.74e-5
2 ⁻⁶	1.69e-1	2.64e-1	2.51e-1	1.05e-1	2.99e-2	2 ⁻⁶	5.41e-4	3.98e-4	2.44e-4	7.15e-5	1.86e-5
2 ⁻⁷	5.99e-2	1.69e-1	2.64e-1	1.76e-1	5.72e-2	2 ⁻⁷	1.49e-4	1.36e-4	9.96e-5	3.39e-5	9.17e-6
2 ⁻⁹	3.91e-3	1.56e-2	5.99e-2	2.64e-1	1.76e-1	2 ⁻⁹	9.37e-6	9.40e-6	9.36e-6	6.22e-6	2.12e-6
2 ⁻¹¹	2.44e-4	9.77e-4	3.91e-3	5.99e-2	2.64e-1	2 ⁻¹¹	5.85e-7	5.88e-7	5.88e-7	5.85e-7	4.95e-7
2 ⁻¹³	1.53e-5	6.10e-5	2.44e-4	3.91e-3	5.99e-2	2 ⁻¹³	3.66e-8	3.67e-8	3.68e-8	3.68e-8	3.66e-8
2 ⁻¹⁵	9.54e-7	3.81e-6	1.53e-5	2.44e-4	3.91e-3	2 ⁻¹⁵	2.29e-9	2.30e-9	2.30e-9	2.30e-9	2.30e-9

В табл. 6 при различных ε и N приведены нормы погрешностей $\Delta_{N,3}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа).

Таблица 6: Норма погрешности $\Delta_{N,3}^{(2)}$ классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	8.19e-2	4.10e-2	2.05e-2	5.14e-3	1.28e-3	1	8.80e-2	4.47e-2	2.25e-2	5.67e-3	1.42e-3
2 ⁻⁵	1.21e+1	8.42e+0	5.01e+0	1.43e+0	3.71e-1	2 ⁻⁵	7.30e-2	3.27e-2	1.54e-2	3.67e-3	9.07e-4
2 ⁻⁶	2.69e+1	2.43e+1	1.68e+1	5.48e+0	1.47e+0	2 ⁻⁶	8.64e-2	3.66e-2	1.64e-2	3.73e-3	9.11e-4
2 ⁻⁷	3.94e+1	5.37e+1	4.85e+1	2.00e+1	5.73e+0	2 ⁻⁷	9.83e-2	4.33e-2	1.83e-2	3.85e-3	9.19e-4
2 ⁻⁹	7.38e+0	6.13e+1	1.58e+2	1.94e+2	8.02e+1	2 ⁻⁹	1.77e-2	3.69e-2	2.46e-2	4.57e-3	9.64e-4
2 ⁻¹¹	5.00e-1	2.00e+0	2.95e+1	6.30e+2	7.77e+2	2 ⁻¹¹	1.20e-3	1.20e-3	4.44e-3	6.15e-3	1.14e-3
2 ⁻¹³	1.25e-1	5.00e-1	1.18e+2	1.18e+2	2.52e+3	2 ⁻¹³	3.01e-4	3.01e-4	3.01e-4	1.11e-3	1.54e-3
2 ⁻¹⁵	3.13e-2	1.25e-1	5.00e-1	8.00e+0	4.72e+2	2 ⁻¹⁵	7.53e-5	7.53e-5	7.53e-5	7.53e-5	2.78e-4

Из таблиц 4–6 следует, что полученные в теореме 2 оценки подтверждаются.

4.3 Разностная формула с четырьмя узлами для второй производной

В табл. 7 при различных ε и N приведены нормы погрешностей классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n-1} .

Таблица 7: Норма погрешности классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	6.31e-3	1.58e-3	3.96e-4	2.48e-5	1.55e-6	1	6.53e-3	1.62e-3	4.05e-4	2.53e-5	1.58e-6
2 ⁻⁵	3.48e-1	1.37e-1	4.40e-2	3.35e-3	2.20e-4	2 ⁻⁵	1.63e-4	3.33e-5	7.52e-6	4.35e-7	2.67e-8
2 ⁻⁶	6.51e-1	3.48e-1	1.37e-1	1.25e-2	8.65e-4	2 ⁻⁶	1.19e-4	2.04e-5	4.16e-6	2.23e-7	1.34e-8
2 ⁻⁷	8.81e-1	6.51e-1	3.48e-1	4.40e-2	3.35e-3	2 ⁻⁷	1.10e-4	1.49e-5	2.55e-6	1.17e-7	6.79e-9
2 ⁻⁹	9.92e-1	9.69e-1	8.81e-1	3.48e-1	4.40e-2	2 ⁻⁹	1.17e-4	1.43e-5	1.72e-6	3.98e-8	1.83e-9
2 ⁻¹¹	1.00e+0	9.98e-1	9.92e-1	8.81e-1	3.48e-1	2 ⁻¹¹	5.83e-5	7.74e-6	9.91e-7	1.44e-8	3.38e-10
2 ⁻¹³	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	9.92e-1	8.81e-1	2 ⁻¹³	8.70e-6	1.63e-6	2.37e-7	4.07e-9	5.93e-11
2 ⁻¹⁵	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	1.00e+0	9.92e-1	2 ⁻¹⁵	8.70e-6	5.44e-7	3.40e-8	9.30e-10	1.60e-11

В табл. 8 при различных ε и N приведены нормы погрешностей классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа) в узле x_{n+2} .

Таблица 8: Норма погрешности классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	6.27e-3	1.58e-3	3.96e-4	2.48e-5	1.55e-6	1	6.37e-3	1.60e-3	4.02e-4	2.52e-5	1.59e-6
2 ⁻⁵	1.55e-1	9.12e-2	3.58e-2	3.18e-3	2.17e-4	2 ⁻⁵	7.27e-5	2.22e-5	6.13e-6	4.13e-7	2.63e-8
2 ⁻⁶	1.39e-1	1.55e-1	9.12e-2	1.13e-2	8.43e-4	2 ⁻⁶	2.54e-5	9.09e-6	2.77e-6	2.01e-7	1.31e-8
2 ⁻⁷	5.80e-2	1.39e-1	1.55e-1	3.58e-2	3.18e-3	2 ⁻⁷	7.25e-6	3.17e-6	1.14e-6	9.56e-8	6.45e-9
2 ⁻⁹	3.91e-3	1.56e-2	5.80e-2	1.55e-1	3.58e-2	2 ⁻⁹	4.62e-7	2.31e-7	1.13e-7	1.78e-8	1.49e-9
2 ⁻¹¹	2.44e-4	9.77e-4	3.91e-3	5.80e-2	1.55e-1	2 ⁻¹¹	1.53e-8	7.85e-9	3.97e-9	9.86e-10	2.44e-10
2 ⁻¹³	1.53e-5	6.10e-5	2.44e-4	3.91e-3	5.80e-2	2 ⁻¹³	2.14e-10	1.20e-10	6.30e-11	1.64e-11	4.06e-12
2 ⁻¹⁵	9.54e-7	3.81e-6	1.53e-5	2.44e-4	3.91e-3	2 ⁻¹⁵	1.33e-11	3.34e-12	8.36e-13	2.47e-13	6.41e-14

В табл. 9 при различных ε и N приведены нормы погрешностей классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа).

Таблица 9: Норма погрешности классической формулы интерполяции (слева) и предложенной формулы (справа)

ε	N					ε	N				
	32	64	128	512	2048		32	64	128	512	2048
1	3.94e-3	9.88e-4	2.48e-4	1.55e-5	9.71e-7	1	4.07e-3	1.01e-3	2.53e-4	1.58e-5	9.96e-7
2 ⁻⁵	6.07e+0	2.58e+0	8.53e-1	6.64e-2	4.39e-3	2 ⁻⁵	2.85e-3	6.26e-4	1.46e-4	8.64e-6	5.33e-7
2 ⁻⁶	1.91e+1	1.21e+1	5.15e+0	4.94e-1	3.45e-2	2 ⁻⁶	3.49e-3	7.11e-4	1.56e-4	8.79e-6	5.35e-7
2 ⁻⁷	3.37e+1	3.82e+1	2.43e+1	3.41e+0	2.66e-1	2 ⁻⁷	4.21e-3	8.73e-4	1.78e-4	9.11e-6	5.39e-7
2 ⁻⁹	5.88e+0	5.53e+1	1.35e+2	9.72e+1	1.37e+1	2 ⁻⁹	6.95e-4	8.18e-4	2.63e-4	1.11e-5	5.69e-7
2 ⁻¹¹	8.75e-1	3.00e+0	2.35e+1	5.39e+2	3.89e+2	2 ⁻¹¹	4.95e-5	2.31e-5	2.36e-5	8.83e-6	7.50e-7
2 ⁻¹³	2.19e-1	8.75e-1	3.50e+0	9.40e+1	2.16e+3	2 ⁻¹³	1.49e-6	1.32e-6	8.05e-7	3.88e-7	1.45e-7
2 ⁻¹⁵	5.47e-2	2.19e-1	8.75e-1	1.40e+1	3.76e+2	2 ⁻¹⁵	3.72e-7	9.31e-8	2.33e-8	1.26e-8	6.08e-9

Из таблиц 7–9 следует, что полученные в теореме 3 оценки подтверждаются.

Заключение

Исследованы разностные формулы для первой производной по трем узлам и для второй производной по трем и четырем узлам. Получены равномерные по ε оценки, которые подтверждаются численными экспериментами.

Список литературы

- [1] Miller J. J. H., O’Riordan E., and Shishkin G. I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition). Singapore: World Scientific, 2012.
- [2] Shishkin G. I., Shishkina L. P.: Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2009.
- [3] Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.
- [4] Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.
- [5] Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
- [6] Задорин А. И., Тиховская С. В. Разностная схема на равномерной сетке для сингулярно возмущенной задачи Коши // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 3. С. 114–122.
- [7] Задорин А. И., Тиховская С. В. Анализ разностной схемы для сингулярно возмущенной задачи Коши на сгущающейся сетке // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 47–57.
- [8] Tikhovskaya S. V., Zadorin A. I. A two-grid method with Richardson extrapolation for a semilinear convection-diffusion problem // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1684. P. 090007-1-090007-8.
- [9] Задорин А. И. Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики. Новосибирск, 2007. Т. 10, № 3. С. 267–275.
- [10] Задорин А. И., Задорин Н. А. Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслоевой составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 2. С. 221–233.
- [11] Zadorin A. I., Zadorin N. A. Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2012. V. 9. P. 445–455.
- [12] Zadorin A. I. Interpolation Formulas for Functions with Large Gradients in the Boundary Layer and their Application // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 377–384.
- [13] Tikhovskaya S. V., Zadorin A. I. Analysis of polynomial interpolation of the function of two variables with large gradients in the parabolic boundary layers // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1773. P. 100008-1-100008-9.
- [14] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва: Наука, 1975.

Светлана Валерьевна Тиховская — к.ф.-м.н., науч. сотр. Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН;

e-mail: s.tikhovskaya@yandex.ru;

Александр Иванович Задорин — д.ф.-м.н., зав. лабораторией Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН;

e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru.

Дата поступления — 31 мая 2017 г.