

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ, В ДИНАМИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ПО НЕЛОКАЛЬНЫМ ДАННЫМ

С. И. Кабанихин^{1,2,3}, М. А. Шишленин^{1,2,3}

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск*

² *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск*

³ *Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

УДК 519.63

В данной работе предложены алгоритмы решения обратных задач определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации интегрального типа. Для приближенного решения нелинейных обратных задач построен градиентный метод минимизации целевого функционала. Получены формулы градиента функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, гиперболическое уравнение, параболическое уравнение, нелокальные данные.

Введение

В настоящее время опубликовано много работ, посвященных задаче нахождения коэффициентов параболического уравнения [26], в том числе, для случая, когда коэффициент зависит только от времени [21–23]. Дополнительной относительно решения прямой задачи информацией может быть значение решения задачи в какой-либо точке или на границе области [9]. В некоторых случаях, дополнительное условие задается в виде интеграла по области (нелокальное условие). Обратные задачи с нелокальными условиями возникают в теплопереносе, термоэластичности, управлении, химической кинетике, медицине и т.д. [1–4, 6, 10, 18].

В данной работе предложены алгоритмы решения обратных задач определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации интегрального типа. Для приближенного решения нелинейных обратных задач построен градиентный метод минимизации целевого функционала. Получены формулы градиента функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач.

1 Обратная задача для параболического уравнения

Одним из перспективных направлений в медицине является лечение с помощью полимерных пленок, содержащих лекарственные вещества (ЛВ). Такие пленки должны продолжительное время поддерживать требуемый уровень лекарственного вещества в крови или тканях пациента [13, 14, 23]. Если пренебречь процессами растворения или разрушения полимера, то основным механизмом высвобождения ЛВ из пленки будет диффузия. Одной из важнейших характеристик, влияющей на выход ЛВ из полимерной пленки, является коэффициент диффузии пленки, который меняется со временем и в общем случае неизвестен.

Пусть относительно решения $u(x, t)$ прямой задачи $(\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0, q(t) \geq q_0 > 0)$

$$q(t)u_t = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u), \quad x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

задана нелокальная дополнительная информация

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = f(t), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

В обратной задаче (1)–(4) требуется определить коэффициент диффузии $q(t)$.

Решение коэффициентной обратной задачи будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \int_0^T \left[\int_{\Omega} u(x, t; q) dx - f(t) \right] dt$$

методом простой итерации

$$q^{(k+1)}(t) = q^{(k)}(t) - \alpha J' \left(q^{(k)} \right) (t).$$

Здесь $\alpha > 0$ параметр спуска, а градиент функционала определяется по формуле [17, 19, 25]

$$J'(q)(t) = \int_{\Omega} u_t(x, t) \psi(x, t) dx,$$

в которой $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \left(q(t) \psi \right)_t &= -\operatorname{div} (\sigma(x) \nabla \psi) - 2 \left[\int_{\Omega} u(x, t) dx - f(t) \right], \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ \psi(x, T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Отметим, что предложенный оптимизационный алгоритм можно применить в случае, когда дополнительная информация (4) задается только в отдельные моменты времени t_j , $j = 1, 2, \dots, K$:

$$\int_{\Omega} u(x, t_j) dx = f(t_j), \quad t = t_j, \quad j = 1, 2, \dots, K.$$

Изменится только постановка сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \left(q(t) \psi \right)_t &= -\operatorname{div} (\sigma(x) \nabla \psi), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad t \neq t_j, \quad j = 1, \dots, K, \\ \left[q(t) \psi \right]_{t=t_j} &= -2 \left[\int_{\Omega} u(x, t_j) dx - f(t_j) \right], \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, K, \\ \psi(x, T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь $\left[q(t) \psi \right]_{t=t_j}$ означает скачок функции $q(t) \psi(x, t)$ в точке $t = t_j$.

2 Обратная задача для гиперболического уравнения

Приложения сейсмологии, электродинамики, акустической томографии приводят к проблемам определения коэффициентов, зависящих от времени, по некоторым нелокальным данным. В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и является важным разделом уравнений в частных производных

[7, 11, 16, 20, 24]. В данном разделе мы построим оптимизационный метод восстановления коэффициента, зависящего от времени для гиперболического уравнения.

Пусть относительно решения $u(x, t)$ прямой задачи $(\rho(x) \geq \rho_0 > 0, q(t) \geq q_0 > 0)$

$$q(t)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \nabla u, \quad x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

задана нелокальная дополнительная информация

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = f(t), \quad t \in (0, T). \quad (8)$$

В обратной задаче (5)–(8) требуется определить скорость распространения волн $q(t)$.

Приближенное решение коэффициентной обратной задачи будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \int_0^T \left[\int_{\Omega} u(x, t; q) dx - f(t) \right] dt \rightarrow \min_q$$

градиентным методом.

Градиент функционала определяется по формуле [5, 15]

$$J'(q^{(k)})(t) = - \int_{\Omega} u_t^{(k)}(x, t) \psi_t^{(k)}(x, t) dx.$$

Отметим, что предложенный оптимизационный алгоритм можно применить в случае, когда дополнительная информация (8) задается только в отдельные моменты времени $t_j, j = 1, 2, \dots, K$:

$$\int_{\Omega} u(x, t_j) dx = f(t_j), \quad t = t_j, j = 1, 2, \dots, K.$$

Изменится только постановка сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \left(q^{(k)}(t) \psi^{(k)} \right)_{tt} &= \Delta \psi^{(k)} - \nabla \ln \rho(x) \nabla \psi^{(k)}, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} (q(t) \psi) \right]_{t=t_j} &= -2 \left[\int_{\Omega} u(x, t_j) dx - f(t_j) \right], \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, K, \\ \psi^{(k)}(x, T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь $\left[\frac{\partial}{\partial t} (q(t) \psi) \right]_{t=t_j}$ означает скачок производной по переменной t функции $q(t) \psi(x, t)$ в точке $t = t_j$.

Алгоритм решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения состоит из следующих этапов:

1. Задаем начальное приближение $q^{(0)}(t)$.
2. Предположим, что приближенное решение $q^{(k)}(t)$ известно и покажем, как определить $q^{(k+1)}(t)$.
3. Решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} q^{(k)}(t)u_{tt}^{(k)} &= \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x) \nabla u^{(k)}, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ u^{(k)}(x, 0) &= u_0(x); \\ u^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

4. Решаем сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} \left(q^{(k)}(t) \psi^{(k)} \right)_{tt} &= \Delta \psi^{(k)} - \nabla \ln \rho(x) \nabla \psi^{(k)} - 2 \left[\int_{\Omega} u^{(k)}(x, t) dx - f(t) \right], & x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ \psi^{(k)}(x, T) &= 0, & x \in \Omega, \\ \psi^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0, & t \in (0, T). \end{aligned}$$

5. Определяем градиент функционала

$$J'(q^{(k)})(t) = - \int_{\Omega} u_t^{(k)}(x, t) \psi_t^{(k)}(x, t) dx.$$

6. Находим $q^{(k+1)}(t)$ по формуле

$$q^{(k+1)}(t) = q^{(k)}(t) - \alpha J'q^{(k)}(t).$$

Здесь $\alpha > 0$ параметр спуска.

Отметим, что можно существенно уменьшить число итераций, учитывая априорную информацию об искомом решении [8, 12].

3 Заключение

В данной работе предложены алгоритмы решения обратных задач определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации интегрального типа. Для приближенного решения нелинейных обратных задач построен градиентный метод минимизации целевого функционала. Получены формулы градиента функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач.

Список литературы

- [1] Cannon, J.R., Yin, H.-M. Numerical Solutions of Some Parabolic Inverse Problems // Numer. Methods Partial Differential Equations. 1990. V. 6. P. 177–191.
- [2] Cannon J.R., Rundell W. Recovering a Time Dependent Coefficient in a Parabolic Differential Equation // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. P. 572–582.
- [3] Bouziani A. Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1996. V. 9. P. 323–330.
- [4] Ivanchov N.I. On the Determination of the Time-Dependent Leading Coefficient in a Parabolic Equation // Siberian Mathematical Journal. 1998. V. 39, iss. 3. P. 465–475.
- [5] Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shishlenin M.A. Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, iss. 1. P. 87–109.
- [6] Dehghan M. Identification of a Time-Dependent Coefficient in a Partial Differential Equation Subject to an Extra Measurement // Numer. Methods Partial Differential Equations. 2005. V. 21. P. 611–622.
- [7] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. On solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for many-dimensional hyperbolic equations // Difference Equations. 2006. V. 42, iss. 9. P. 1166–1179.
- [8] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Quasi-solution in inverse coefficient problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, iss. 7. P. 705–713.

- [9] Kabanikhin S.I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16, iss. 4. P. 317–357.
- [10] Liao W., Dehghan M., Mohebbi A. Direct Numerical Method for an Inverse Problem of a Parabolic Partial Differential Equation // Journal of Computational Applied Mathematics. (2009). V. 232. P. 351–360.
- [11] Denisov A.M. Inverse Problem for a Hyperbolic Equation with Nonlocal Boundary Condition Containing a Delay Argument // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2011. V. 280, iss. 1. P. S80–S87.
- [12] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 147–164.
- [13] Vilar G., Tulla-Puche J., Albericio F. Polymers and drug delivery systems // Current Drug Delivery. 2012. V. 9, iss. 4. P. 367–394.
- [14] Shaik M. R., Korsapati M., Panati D. Polymers in controlled drug delivery systems // Int.J.Pharm.Sci. 2012. V. 2, iss. 4. P. 112–116.
- [15] Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B. Inverse problems for the ground penetrating radar // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. V. 21, iss. 6. P. 885–892.
- [16] Kirichenko S.V. On a boundary value problem with dime nonlocal conditions for one-dimensional hyperbolic equation // Vestn. Samar. Gos. Univ. Ser. of Natural Sciences. 2013. V. 6, iss. 107. P. 31–39.
- [17] Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S. Regularization of the continuation problem for elliptic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2013. V. 21, iss. 6. P. 871–884.
- [18] Onyejekwe O.N. Determination of two-time dependent coefficients in a parabolic partial differential equation by homotopy analysis method // International Journal of Applied Mathematical Research. 2014. V. 3, iss. 2. P. 161–167.
- [19] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic equations from border part // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2014. V. 2, iss. 2. P. 81–91.
- [20] Isgandarova G.N. On an inverse boundary value problem with time nonlocal conditions for one-dimensional hyperbolic equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics. 2015. V. 35, iss. 4. P. 95–101.
- [21] Hussein M., Lesnic D., Ismailov M.I. An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. V. 39, iss. 5. P. 963–980.
- [22] Вабишевич П.Н., Клибанов М.В. Вычислительная идентификация старшего коэффициента параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 7. С. 896–903.
- [23] Губайдуллин И.М., Жалнин Р.В., Масыгин В.Ф., Тишкин В.Ф., Шуршина А.С. Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 2. С. 94–105.
- [24] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о колебаниях стержня с неизвестным условием его закрепления на части границы // Вестник самарского университета. Естественная серия. 2017. Т. 23, № 2. С. 7–14.
- [25] Belonosov A., Shishlenin M. Regularization methods of the continuation problem for the parabolic equation // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2017. 10187 LNCS. P. 220–226.
- [26] Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. V. 54. P. 1339–1351.

*Сергей Игоревич Кабанихин — д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН,
директор Института вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН;
з.н.с. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
e-mail: kabanikhin@sscc.ru;*

*Максим Александрович Шишленин — д.ф.-м.н.,
с.н.с. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
с.н.с. Института вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
e-mail: mshishlenin@ngs.ru.*

Дата поступления — 31 мая 2017 г.