

# О СВОЙСТВАХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ С ДИСПЕРСИЕЙ

З. И. Федотова, О. И. Гусев, Н. Ю. Шокина, Г. С. Хакимзянов

*Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск*

УДК 532.59:519.63

Для трех популярных конечно-разностных схем, аппроксимирующих линеаризованную систему нелинейно-дисперсионных уравнений, получены уточненные условия устойчивости, а также описано поведение фазовых ошибок.

**Ключевые слова:** нелинейно-дисперсионные уравнения, конечно-разностные методы, устойчивость, фазовая ошибка, дисперсия.

## Введение

Численное моделирование на основе уравнений мелкой воды является эффективным инструментом решения задач волновой гидродинамики, имеющих практические приложения. В последние полвека существенным дополнением к классическим моделям мелкой воды стали нелинейно-дисперсионные модели, применение которых позволило перейти от изучения очень длинных волн к умеренным и тем самым расширило диапазон описания волновых режимов, включив как процессы в прибрежной зоне, так и учет влияния дисперсии на формирование волн в масштабах океана [1].

До недавнего времени проблемным местом моделирования на основе нелинейно-дисперсионных уравнений оставались пробелы в исследовании свойств конечно-разностных схем [2]. В расчетах обычно выбирались «схемные» параметры по аналогии с известными для бездисперсионного случая. Проведенное нами исследование показало, что разностные схемы для уравнений, включающих дисперсию, обладают рядом специфических свойств. В частности, в условие устойчивости входит новый параметр – отношение «среднего» шага по пространству к толщине слоя жидкости. Полученные формулы позволяют ослабить ограничение на шаг по времени и корректировать его в процессе измельчения пространственной сетки.

Задача, которую решали многие исследователи – обеспечить преобладание физической дисперсии над «схемной». В настоящей работе показано, что влияние «схемной» дисперсии в ряде случаев можно регулировать выбором шагов разностной схемы. Обнаружена специфика двумерного случая, состоящая в «неоднородности» направления изменения фазы волны в отличие от дифференциальных постановок.

## 1 НЛД-модели и их линеаризованные варианты

Рассмотрим систему уравнений длинноволновой гидродинамики, описывающую течение идеальной несжимаемой жидкости с учетом частотной дисперсии. Предполагается, что слой воды ограничен снизу подвижным дном  $z = -h(x, y, t)$ , а сверху – свободной границей  $z = \eta(x, y, t)$ . Искомые переменными являются полная глубина  $H = h + \eta$  и  $\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{u}(x, y, t)$  – средняя по толщине слоя воды скорость трехмерного течения. Запишем соответствующие уравнения следующим образом [1]:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla p}{H} = \frac{p_0}{H} \nabla h, \quad (2)$$

где  $p$  — проинтегрированное по толщине слоя негидростатическое “давление” в НЛД-модели,  $p_0$  — значение “давления” на дне,

$$p = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = gH - \psi, \quad \varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2, \quad (3)$$

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2h, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (4)$$

К такому виду удается привести известные НЛД-модели Грина — Нагди [3], Железняк — Пелиновского [4], Федотовой — Хахимзянова [5, 6] и другие. Из (1), (2) можно получить целый ряд более простых моделей. Например, упрощая выражение для “давления” путем отбрасывания в  $p/H$ ,  $p_0/H$  членов, имеющих порядок  $O(\alpha\mu^2)$ , где  $\alpha = a_0/h_0$  и  $\mu = h_0/L$  — параметры нелинейности и дисперсии ( $a_0$ ,  $h_0$ ,  $L$  — характерные амплитуда и размеры по глубине и горизонтали, соответственно), приходим к уравнениям типа уравнений Буссинеска [6], которые имеют тот же вид, что и уравнения (1)–(4), но с измененными формулами для вычисления величин  $\varphi$  и  $\psi$  — негидростатических добавок к “давлению”. Последние, в случае слабонелинейной модели из [6], имеют следующий вид:

$$\varphi = H \left( \frac{h}{3} D(h\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{h}{2} D^2h \right), \quad \psi = H \left( \frac{1}{2} D(h\nabla \cdot \mathbf{u}) + D^2h \right). \quad (5)$$

Первые конечно-разностные схемы для расчета 2D-течений с дисперсией были основаны на аппроксимации слабонелинейной модели Перегринна, выведенной в работе [7] для случая стационарного дна ( $h_t \equiv 0$ ). Уравнение неразрывности этой модели имеет тот же вид (1), что и у полной НЛД-модели, а уравнение движения получается из уравнения (2) при отбрасывании в нем всех нелинейных слагаемых, входящих в дисперсионные члены  $(\nabla\varphi)/H$ ,  $\psi/H$ . С учетом формул (5) получаем

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = \left[ \frac{h}{2} \nabla(\nabla \cdot (h\mathbf{u})) - \frac{h^2}{6} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]_t. \quad (6)$$

Из модели Перегринна (1), (6) можно получить уравнение второго порядка, описывающее распространение квазиодномерных слабонелинейных длинных волн над слабо изменяющимся дном:

$$\eta_{tt} - g\nabla \cdot (h\nabla\eta) = \frac{1}{3} \nabla \cdot [h\nabla(h\eta_{tt})] + \frac{3}{2} g\nabla \cdot \nabla(\eta^2). \quad (7)$$

Для изучения свойств разностных схем, аппроксимирующих НЛД-уравнения, необходимо привлекать их упрощенные формулировки. Если рассмотреть случай ровного дна  $h \equiv h_0$ , то самой простой 2D-моделью с дисперсией является скалярное линейное уравнение

$$\eta_{tt} - c_0^2 \Delta\eta = \frac{h_0^2}{3} \Delta\eta_{tt}, \quad (8)$$

где  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ,  $\Delta = \nabla^2$  — оператор Лапласа. Следующей по простоте моделью является система линейных уравнений Перегринна

$$\eta_t + h_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}_t + g\nabla\eta = \frac{h_0^2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})_t, \quad (9)$$

к которой в случае ровного дна при линеаризации в окрестности нулевой скорости приводятся все упомянутые выше системы НЛД-уравнений.

Для исследования свойств выписанных уравнений, а также свойств аппроксимирующих их разностных схем, будем анализировать поведение гармоник

$$\eta(x, y, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})}, \quad u(x, y, t) = U_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})}, \quad v(x, y, t) = V_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})}, \quad (10)$$

где  $E_0$ ,  $U_0$ ,  $V_0$  — амплитуды гармоник,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$  — волновой вектор,  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\omega$  — частота. Подставляя гармоники в систему (9), получаем следующие выражения для частот:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \pm c_0 |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{h_0^2 |\mathbf{k}|^2 / 3}{1 + h_0^2 |\mathbf{k}|^2 / 3}}. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что уравнение (8) имеет две моды, и они совпадают с  $\omega_{2,3}$  из (11).

## 2 О разностных методах для двумерных НЛД-уравнений

Прежде всего отметим, что развитие длинноволновых 2D-моделей с дисперсией было инициировано потребностями инженерной практики в связи с успехами численного моделирования применительно к обустройству морских побережий. Решение задач, связанных с расчетами воздействия волн на защитные сооружения в береговой зоне, на плавучие и полупогруженные тела, моделирование волновых режимов в гаванях и бухтах, и ряд других, связанных с освоением шельфа и прилегающей суши — все это требовало двумерных постановок и учета реального рельефа дна. Область применения длинноволновых моделей нуждалась в расширении, и таким шагом стала работа [7], в которой были получены НЛД-уравнения (1), (6). Разработанные для модифицированных уравнений (1), (6) численные алгоритмы были включены в известные компьютерные системы, предназначенные для решения инженерных задач в прибрежных водах (см., например, [8] и др.). Что касается применяемых конечно-разностных схем, то в статьях излагались только основные идеи вычислительного метода. За рамками оставалось также исследование свойств разностных схем.

Впервые одна из разностных 2D-схем и алгоритм ее реализации описаны в [9]. В этой работе также приведено (без доказательства) условие устойчивости. Похожая разностная схема рассмотрена также в [10]. Построению схем в процитированных работах предшествовала модификация уравнений (1), (6), использующая предположение о потенциальности исходного 3D-течения, из которого вытекает, что  $v_x - u_y = O(\mu^2)$ . В этом случае для горизонтального дна  $h \equiv h_0$  и течения с нулевой фоновой скоростью модель (9) можно записать в следующем виде:

$$\eta_t + h_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{U} + g \nabla \eta = \frac{h_0^2}{3} \Delta \mathbf{U}, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{U}, \quad (12)$$

при этом выражение для частот сохраняет вид (11).

Показанный прием расщепления исходных НЛД-уравнений, а также ряд аналогичных, состоящих в выделении системы обыкновенных уравнений для вектора  $\mathbf{U}$  [11], были использованы многими авторами. При подходящем способе организации вычислений такой подход позволяет применять широкий спектр методов решения различного порядка точности, в том числе и многошаговые методы, являющиеся модификациями хорошо известных методов Рунге — Кутты, Адамса — Башфорта, Адамса — Мултона (см., например, [12]).

Другой способ решения системы НЛД-уравнений состоит в расщеплении ее на гиперболическую систему уравнений, отличающуюся от уравнений классической модели мелкой воды лишь наличием в правой части уравнений движения дополнительных слагаемых, связанных с дисперсионными добавками, и уравнение эллиптического типа для дисперсионной составляющей  $\varphi$  “давления”  $p$  вида (3). На примере линеаризованных НЛД-уравнений это расщепление выглядит следующим образом:

$$\eta_t + h_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}_t + g \nabla \eta = \frac{1}{h_0} \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi - \frac{\varphi}{\nu} = c_0^2 \Delta \eta, \quad (13)$$

где  $\nu = h_0^2/3$ . Алгоритм решения можно реализовать в виде явной двухшаговой схемы предиктор-корректор, на каждом шаге которой поочередно решаются задачи, полученные в результате расщепления [13, 14, 15].

## 3 Исследование базовых свойств разностных схем

Приведем разностную схему из [9, 10] для системы уравнений (12) и исследуем её свойства. Используется прямоугольная равномерная сетка с шагами  $\tau$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , такая, что функция  $\eta$  определена в узлах  $(x_{j_1}, y_{j_2})$ , а компоненты скорости — в центрах сторон ячеек:  $u$  — в центрах  $(x_{j_1+1/2}, y_{j_2})$  горизонтальных сторон ячеек,  $v$  — в центрах  $(x_{j_1}, y_{j_2+1/2})$  вертикальных сторон. Компоненты вектора  $\mathbf{U}$  определены в тех же точках, что и компоненты вектора скорости. Сеточные функции разнесены также по времени: значения  $\eta$  определены на временных слоях  $t = n\tau$ , тогда как  $u$ ,  $v$ ,  $U$ ,  $V$  — на слоях  $t = (n+1/2)\tau$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Для сокращения записи сеточных функций будем использовать мультииндекс  $j = (j_1, j_2)$ :  $\eta_j^n \equiv \eta_{j_1, j_2}^n$ , а также  $u_{j_1+1/2}^{n+1/2} \equiv u_{j_1+1/2, j_2}^{n+1/2}$ ,  $v_{j_2+1/2}^{n+1/2} \equiv v_{j_1, j_2+1/2}^{n+1/2}$ . Для системы уравнений (12) выпишем схему второго порядка аппроксимации:

$$\eta_{t,j}^n + h_0 \left( u_{x,j}^{n+1/2} + v_{y,j}^{n+1/2} \right) = 0, \quad (14)$$

$$U_{j_1+1/2}^{n+1/2} + g \eta_{x,j_1+1/2}^{n+1} = \frac{h_0^2}{3} (U_{xx} + U_{yy})_{j_1+1/2}^{n+1/2}, \quad V_{j_2+1/2}^{n+1/2} + g \eta_{y,j_2+1/2}^{n+1} = \frac{h_0^2}{3} (V_{xx} + V_{yy})_{j_2+1/2}^{n+1/2}, \quad (15)$$

$$u_{t,j_1+1/2}^{n+1/2} = U_{j_1+1/2}^{n+1/2}, \quad v_{t,j_2+1/2}^{n+1/2} = V_{j_2+1/2}^{n+1/2}, \quad (16)$$

используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \eta_{t,j}^n &= \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau}, \quad u_{t,j_1+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j_1+1/2}^{n+3/2} - u_{j_1+1/2}^{n+1/2}}{\tau}, \quad v_{t,j_2+1/2}^{n+1/2} = \frac{v_{j_2+1/2}^{n+3/2} - v_{j_2+1/2}^{n+1/2}}{\tau}, \\ u_{x,j}^{n+1/2} &= \frac{u_{j_1+1/2}^{n+1/2} - u_{j_1-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}, \quad v_{y,j}^{n+1/2} = \frac{v_{j_2+1/2}^{n+1/2} - v_{j_2-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}, \\ \eta_{x,j_1+1/2}^{n+1} &= \frac{\eta_{j_1+1,j_2}^{n+1} - \eta_j^{n+1}}{\Delta x}, \quad \eta_{y,j_2+1/2}^{n+1} = \frac{\eta_{j_1,j_2+1}^{n+1} - \eta_j^{n+1}}{\Delta y}, \\ U_{\bar{x}x,j_1+1/2}^{n+1/2} &= \frac{U_{x,j_1+1,j_2}^{n+1/2} - U_{x,j}^{n+1/2}}{\Delta x}, \quad U_{\bar{y}y,j_1+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j_1+1/2,j_2+1}^{n+1/2} - 2U_{j_1+1/2,j_2}^{n+1/2} + U_{j_1+1/2,j_2-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2}, \\ V_{\bar{x}x,j_2+1/2}^{n+1/2} &= \frac{V_{j_1+1,j_2+1/2}^{n+1/2} - 2V_{j_1,j_2+1/2}^{n+1/2} + V_{j_1-1,j_2+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x^2}, \quad V_{\bar{y}y,j_2+1/2}^{n+1/2} = \frac{V_{y,j_1,j_2+1}^{n+1/2} - V_{y,j}^{n+1/2}}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости схемы (14)–(16) подставим в разностные уравнения гармоника

$$\begin{aligned} \eta_j^n &= E_0 \rho^n e^{i(j_1 \xi + j_2 \zeta)}, \quad u_{j_1+1/2}^{n+1/2} = U_0 \rho^{n+1/2} e^{i((j_1+1/2)\xi + j_2 \zeta)}, \quad v_{j_2+1/2}^{n+1/2} = V_0 \rho^{n+1/2} e^{i(j_1 \xi + (j_2+1/2)\zeta)}, \\ U_{j_1+1/2}^{n+1/2} &= U_0^* \rho^{n+1/2} e^{i((j_1+1/2)\xi + j_2 \zeta)}, \quad V_{j_2+1/2}^{n+1/2} = V_0^* \rho^{n+1/2} e^{i(j_1 \xi + (j_2+1/2)\zeta)}, \end{aligned}$$

где  $\xi = k_1 \Delta x$ ,  $\zeta = k_2 \Delta y$ . Из уравнений (15) получаем, что величины  $U_0^*$ ,  $V_0^*$  выражаются через  $E_0$ :

$$U_0^* = -\frac{g\sqrt{\rho}}{1+b_1+b_2} \frac{2i \sin(\xi/2)}{\Delta x} E_0, \quad V_0^* = -\frac{g\sqrt{\rho}}{1+b_1+b_2} \frac{2i \sin(\zeta/2)}{\Delta y} E_0,$$

где использованы обозначения

$$b_1 = \frac{4}{3} \delta_1^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}, \quad b_2 = \frac{4}{3} \delta_2^2 \sin^2 \frac{\zeta}{2}, \quad \delta_1 = \frac{h_0}{\Delta x}, \quad \delta_2 = \frac{h_0}{\Delta y}.$$

Тогда из уравнений (14), (16) получается однородная линейная система алгебраических уравнений относительно амплитуд  $E_0$ ,  $U_0$  и  $V_0$ . Для существования нетривиального решения определитель этой системы должен обращаться в нуль, что дает кубическое уравнение для множителя перехода  $\rho$ . Один из корней этого уравнения равен единице, а два других  $\rho_{1,2}$  являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$\rho^2 - 2\rho(1-R) + 1 = 0, \quad (17)$$

где

$$R = \frac{2c_0^2}{1+b_1+b_2} \left( \varkappa_1^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + \varkappa_2^2 \sin^2 \frac{\zeta}{2} \right), \quad \varkappa_1 = \frac{\tau}{\Delta x}, \quad \varkappa_2 = \frac{\tau}{\Delta y}. \quad (18)$$

Необходимое условие устойчивости  $|\rho_{1,2}| \leq 1$  рассматриваемой схемы эквивалентно условию  $R \leq 2$  неположительности дискриминанта уравнения (17), а это эквивалентно выполнению неравенства

$$c_0 \varkappa \leq \sqrt{1 + \frac{4}{3} \delta^2}, \quad (19)$$

где

$$\delta = \frac{h_0}{\Delta_0}, \quad \varkappa = \frac{\tau}{\Delta_0}, \quad \Delta_0 = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}. \quad (20)$$

При этом имеем

$$|\rho_{1,2}| \equiv 1. \quad (21)$$

Вид полученного условия устойчивости (19) двумерной схемы аналогичен, с учетом обозначений (20), одномерному случаю [2].

Информацию о дисперсионных свойствах схемы дает поведение ее фазовой ошибки  $\Delta\phi = \Phi - \phi$ . Здесь  $\Phi = \omega\tau$ ,  $\omega$  — дисперсионное соотношение математической модели,  $\phi = \arg \rho$ . Изменение фаз будем рассматривать в виде функций от переменных  $\xi, \zeta \in [0, \pi]$ .

Согласно (11), за один шаг по времени изменение фазы в решении линеаризованной НЛД-модели (12) определяется по формуле

$$\Phi_{\text{NLD}} = \tau\omega_{\text{NLD}} = \frac{c_0|\mathbf{k}|\tau}{\sqrt{1+h_0^2|\mathbf{k}|^2/3}} = \frac{c_0\mathfrak{x}\zeta}{\sqrt{1+\delta^2\zeta^2/3}}, \quad \zeta = |\mathbf{k}|\Delta_0. \quad (22)$$

Из формулы (11) следует, что для модели (12) изменение фазы решения можно записать в виде функции от одной переменной  $\zeta \in [0, \pi]$ . Кроме того, изменение фазы не зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Взяв множитель перехода схемы (14)–(16) со знаком “+”, т. е.  $\rho = 1 - R + i\sqrt{R(2-R)}$ , с учетом (21), получаем формулу изменения фазы  $\phi_{\text{sch}} = \arg \rho$  в решении разностной схемы:  $\phi_{\text{sch}} = 2 \arcsin \sqrt{R/2}$ . Рассматривая малые значения  $\xi, \zeta$ , соответствующие длинным волнам, получаем

$$\phi_{\text{sch}} = c_0\mathfrak{x}\zeta \left( 1 - \frac{\delta^2\zeta^2}{6} - \frac{\mathfrak{x}_1^2\xi^4 + \mathfrak{x}_2^2\zeta^4}{24\mathfrak{x}^2\zeta^2} \right) + \frac{c_0^3\mathfrak{x}^3\zeta^3}{24} + O(\zeta^4). \quad (23)$$

Из формул (22) и (23) вытекает, что фазовая ошибка определяется выражением

$$\Delta\phi = \frac{c_0}{24} \left( \frac{\mathfrak{x}_1^2\xi^4 + \mathfrak{x}_2^2\zeta^4}{\mathfrak{x}\zeta} - c_0^2\mathfrak{x}^3\zeta^3 \right) + O(\zeta^4). \quad (24)$$

Таким образом, дополнительная дисперсия, вносимая разностной схемой, имеет тот же порядок  $\zeta^3$ , что и второй член разложения по  $\zeta$  “физической” дисперсии (дисперсии модели)

$$\Phi_{\text{NLD}} = c_0\mathfrak{x}\zeta - \frac{c_0\mathfrak{x}\delta^2}{6}\zeta^3 + O(\zeta^4). \quad (25)$$

При конечных шагах разностной сетки это может привести к искажению дисперсионной картины течения, описываемого НЛД-моделью.

В [2] показано, что в 1D-случае в области устойчивости некоторых схем имеются значения числа Куранта, для которых влияние схемной дисперсии минимально. Для 2D-схем это свойство нарушается. Например, для произвольного волнового вектора  $\mathbf{k}$  фазовая ошибка (24) имеет порядок  $O(\zeta^3)$ , независимо от числа Куранта  $c_0\mathfrak{x}$ . Исключение составляют волновые векторы  $\mathbf{k} = (k_1, 0)$  и  $\mathbf{k} = (0, k_2)$ , для которых фазовая ошибка имеет порядок  $O(\zeta^4)$  при  $c_0\mathfrak{x}_1 = 1$  и  $c_0\mathfrak{x}_2 = 1$ , соответственно. Порядок  $O(\zeta^4)$  достигается также для вектора  $\mathbf{k}$ , компоненты которого согласованы с шагами сетки согласно формуле  $k_1\Delta x = k_2\Delta y$ . Для того чтобы влияние схемной дисперсии было минимальным, необходимо задать  $c_0\mathfrak{x} = 1$ .

Разностный метод для решения уравнения (7) основан на расщеплении, приводящем к волновому с “правой частью” и эллиптическому уравнениям. Разностная схема для волнового уравнения является явной трехслойной и использует 5-точечный шаблон для аппроксимации вторых производных по пространственным переменным. Для линеаризованного варианта 2D-модели (7) она принимает вид

$$\eta_{tt}^n - c_0^2(\eta_{\bar{x}x} + \eta_{\bar{y}y})^n = \frac{h_0^2}{3}(\eta_{\bar{x}x} + \eta_{\bar{y}y})_{tt}^n. \quad (26)$$

Нетрудно показать, что ее множитель перехода удовлетворяет квадратному уравнению (17). Следовательно, все свойства, полученные выше для разностной схемы (14)–(16), выполняются и для разностной схемы (26).

Наконец, выпишем разностную схему и ее условие устойчивости для расширенной системы уравнений (13). Предполагается, что на  $n$ -м слое по времени величины  $\mathbf{u}^n$  и  $\eta^n$  известны и определены в целочисленных узлах  $\mathbf{x}_j$ , где  $j = (j_1, j_2)$  — мультииндекс. Численный алгоритм решения системы (13) основывается на схеме предиктор-корректор. Вначале решается уравнение для  $\varphi$ :

$$\varphi_{\bar{x}x,j}^n + \varphi_{\bar{y}y,j}^n - \frac{\varphi_j^n}{\nu} = c_0^2(\eta_{\bar{x}x,j}^n + \eta_{\bar{y}y,j}^n). \quad (27)$$

Здесь  $\eta_{\bar{x}x,j}^n, \eta_{\bar{y}y,j}^n$  — вторые разностные производные на трехточечном шаблоне. Полученные значения  $\varphi^n$  используются для вычисления предикторных величин  $\eta^*, \mathbf{u}^*$ , определенных в центрах ячеек:

$$\frac{\eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^n}{\tau^*} + h_0 \left( u_{x,j+1/2}^n + v_{y,j+1/2}^n \right) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau^*} + g \overset{\circ}{\nabla} \eta_{j+1/2}^n = \frac{1}{h_0} \overset{\circ}{\nabla} \varphi_{j+1/2}^n, \quad (29)$$

где для сокращения записи использован мультииндекс  $j + 1/2 = (j_1 + 1/2, j_2 + 1/2)$  и обозначения

$$\begin{aligned} g_{j+1/2}^n &= \frac{1}{4} (g_{j_1, j_2}^n + g_{j_1+1, j_2}^n + g_{j_1, j_2+1}^n + g_{j_1+1, j_2+1}^n), \quad g = \eta, u, v, \\ u_{x, j+1/2}^n &= \frac{1}{2\Delta x} (u_{j_1+1, j_2+1}^n + u_{j_1+1, j_2}^n - u_{j_1, j_2+1}^n - u_{j_1, j_2}^n), \\ v_{y, j+1/2}^n &= \frac{1}{2\Delta y} (v_{j_1+1, j_2+1}^n + v_{j_1, j_2+1}^n - v_{j_1+1, j_2}^n - v_{j_1, j_2}^n), \\ \overset{\circ}{\nabla} \eta_{j+1/2}^n &= \left( \eta_{x, j+1/2}^n, \eta_{y, j+1/2}^n \right), \quad \overset{\circ}{\nabla} \varphi_{j+1/2}^n = \left( \varphi_{x, j+1/2}^n, \varphi_{y, j+1/2}^n \right). \end{aligned}$$

В уравнениях (28), (29)  $\tau^* = \tau(1 + \theta_{j+1/2}^n)/2$ ,  $\theta_{j+1/2}^n$  — схемный параметр, надлежащий выбор которого гарантирует выполнение TVD-свойства для численного решения модельных скалярных уравнений. При теоретическом исследовании рассматриваемой схемы предполагается, что  $\theta = \text{const} \geq 0$ .

Кроме уравнений (28), (29) на шаге предиктор решается и уравнение относительно сеточной функции  $\varphi_{j+1/2}^*$ , определенной в центрах ячеек, при этом используются вычисленные ранее значения  $\eta_{j+1/2}^*$ :

$$\varphi_{xx, j+1/2}^* + \varphi_{yy, j+1/2}^* - \frac{\varphi_{j+1/2}^*}{\nu} = c_0^2 (\eta_{xx, j+1/2}^* + \eta_{yy, j+1/2}^*). \quad (30)$$

Полученные значения  $\eta^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ,  $\varphi^*$  используются на шаге корректор:

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau} + h_0 (u_{x, j}^* + v_{y, j}^*) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + g \overset{\circ}{\nabla} \eta_j^* = \frac{1}{h_0} \overset{\circ}{\nabla} \varphi_j^*, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} u_{x, j}^* &= \frac{1}{2\Delta x} (u_{j_1+1/2, j_2+1/2}^* - u_{j_1-1/2, j_2+1/2}^* + u_{j_1+1/2, j_2-1/2}^* - u_{j_1-1/2, j_2-1/2}^*), \\ v_{y, j}^* &= \frac{1}{2\Delta y} (v_{j_1+1/2, j_2+1/2}^* - v_{j_1+1/2, j_2-1/2}^* + v_{j_1-1/2, j_2+1/2}^* - v_{j_1-1/2, j_2-1/2}^*), \\ \overset{\circ}{\nabla} \eta_j^* &= \left( \eta_{x, j}^*, \eta_{y, j}^* \right), \quad \overset{\circ}{\nabla} \varphi_j^* = \left( \varphi_{x, j}^*, \varphi_{y, j}^* \right). \end{aligned}$$

Путем довольно громоздких выкладок удалось показать, что необходимое условие устойчивости схемы (27)—(32) можно записать при малых значениях параметра  $\theta$  в виде ограничения на число Куранта

$$c_0 \mathfrak{A} \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta y) / \Delta_0 + 2\delta \sqrt{\theta/3}}{1 + \theta}, \quad (33)$$

где использованы обозначения (20). Условие (33) является менее ограничительным по сравнению с условием устойчивости

$$c_0 \mathfrak{A} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \theta}}, \quad (34)$$

аналогичной схемы предиктор-корректор для бездисперсионных уравнений мелкой воды, получающейся из схемы (28), (29), (31), (32) при нулевых правых частях в уравнениях движения (29), (32).

## Заключение

Обзор численных методов решения двумерных НЛД-уравнений показал, что в литературе практически отсутствуют работы по теоретическому исследованию конечно-разностных схем. В нашей работе выполнено исследование устойчивости и дисперсионных свойств трех разностных схем. Один из главных выводов исследования состоит в том, что условия устойчивости разностных схем для 2D-уравнений с дисперсией являются более слабыми по сравнению с аналогичными условиями для схем, аппроксимирующих бездисперсионные уравнения мелкой воды. Отмечены специфические свойства фазовых ошибок двумерных разностных схем.

## Список литературы

- [1] Федотова З. И., Хакимзянов Г. С., Гусев О. И., Шокина Н. Ю. Нелинейно-дисперсионные модели волновой гидродинамики: уравнения и численные алгоритмы. Новосибирск: Наука, 2017.
- [2] Федотова З. И., Хакимзянов Г. С., Гусев О. И. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. I. Одномерные модели // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 120–156.
- [3] Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // Journal of Fluid Mechanics. 1986. V. 169. P. 275–292.
- [4] Железняк М. И., Пелиновский Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. науч. тр. / Горький: ИПФ АН СССР, 1985. С. 8–33.
- [5] Федотова З. И., Хакимзянов Г. С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.
- [6] Fedotova Z. I., Khakimzyanov G. S., Dutykh D. On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. V. 29, No. 3. P. 167–178.
- [7] Peregrine D. H. Long waves on a beach // Journal of Fluid Mechanics. 1967. V. 27, pt 4. P. 815–827.
- [8] Abbott M., Petersen H., Skovgaard O. Computations of short waves in shallow water // Coastal Engineering Proceedings. 1978. V. 16. P. 414–433.
- [9] Rygg O. B. Nonlinear refraction-diffraction of surface waves in intermediate and shallow water // Coastal Engineering Journal. 1988. V. 12, No. 3. P. 191–211.
- [10] Chubarov L. B., Fedotova Z. I., Shkurovskii D. A. Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1998. V. 13, No. 4. P. 289–306.
- [11] Компаниец Л. А. О численных алгоритмах для нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды в двумерном случае // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 3. С. 44–56.
- [12] Wei G., Kirby J. T., Grilli S. T., Subramanya R. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 294. P. 71–92.
- [13] Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И., Барахнин В. Б., Шокина Н. Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [14] Гусев О. И., Шокина Н. Ю., Кутергин В. А., Хакимзянов Г. С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74–90.
- [15] Гусев О. И. Алгоритм расчета поверхностных волн над подвижным дном в рамках плановой нелинейно-дисперсионной модели // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 6. С. 19–40.

*Зинаида Ивановна Федотова — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института  
вычислительных технологий СО РАН;  
e-mail: zf@ict.nsc.ru;*

*Олег Игоревич Гусев — мл. науч. сотр. Института  
вычислительных технологий СО РАН;  
e-mail: gusev\_oleg\_igor@mail.ru;*

*Нина Юрьевна Шокина — к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. Института  
вычислительных технологий СО РАН;  
e-mail: nina.shokina@gmail.com;*

*Гаяз Салимович Хакимзянов — д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института  
вычислительных технологий СО РАН;  
e-mail: khak@ict.nsc.ru.*

*Дата поступления — 31 мая 2017*