ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

М.В. Плеханова[1,2], А.Ф. Исламова[1]

[1]ФГБОУ ВПО Челябинский государственный университет, 454001, Челябинск, Россия
[2]ФГБОУ ВПО Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, Россия

Постановка задачи. Рассмотрим задачу смешанного управления для системы уравнений Соболева

$$v(x,0) = q(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v_n(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{3} v_i(x,t) n_i(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$v_t(x,t) = [v(x,t), \bar{\omega}] - r(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{4}$$

$$\|q\|^2_{\mathbb{L}_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathbb{L}_2(\Omega))} \le R^2, \tag{5}$$

$$J(v,r,q,u) = \frac{1}{2}\|v - \tilde{v}\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma)} + \frac{1}{2}\|r - \tilde{r}\|^2_{H^1(0,T;\mathbb{H}_\pi)} \to \inf, \tag{6}$$

описывающей динамику малых внутренних движений стратифицированной жидкости в равновесном состоянии [1]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней нормали к ее границе, $v = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости движения частиц жидкости, r – градиент нестационарного давления, $[\cdot, \bar{\omega}]$ – векторное произведение на вектор $\bar{\omega} = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, где ω – удвоенная угловая скорость вращения,

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Пара (q,u) задает управление, $(\tilde{v}, \tilde{r}) \in H^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma) \times H^1(0,T;\mathbb{H}_\pi)$ – заданные вектор-функции, где $\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$ – пространства соленоидальных и потенциальных функций, которые подробно будут описаны ниже. Задача состоит в нахождении наборов (v,r,q,u), которые с помощью выбора управлений (q,u) «максимально приближают» решение (v,r) к желаемому состоянию $(\tilde{v}, \tilde{r})$. Поскольку управляющее воздействие входит в начальное условие и уравнение, а функционал качества не учитывает затраты на управление, следуя принятой терминологии, такую задачу назовем задачей жесткого смешанного управления. Цель исследования – установить условия разрешимости задачи смешанного управления. Ранее в работах авторов методами теории полугрупп операторов были получены результаты о разрешимости задачи оптимального управления для абстрактного операторного уравнения [2, 3, 4]. Достаточно редуцировать к операторному виду задачу (1) – (6) и проверить условия для абстрактной задачи, приведенные ниже.

1. Абстрактная задача жесткого смешанного управления. Результаты данного параграфа можно найти в [2]. Пусть $\mathcal{U},\mathcal{X},\mathcal{Y}$ – гильбертовы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \ker L \neq \{0\}$ (т.е. линейный и непрерывный, действует из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен, замкнут, плотно определен в $\mathcal{X}$, действует в $\mathcal{Y}$). Введем в рассмотрение пространство $\mathfrak{U} = L_2(0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{X}$. Рассмотрим задачу жесткого смешанного управления с обобщенным условием Шоуолтера–Сидорова

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \qquad Px(0) = Pv, \tag{7}$$

$$(u,v) \in \mathfrak{U}_\partial, \tag{8}$$

$$J(x) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2_{H^1(0,T;\mathcal{X})} \to \inf, \tag{9}$$

где непустое выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ пространства $\mathfrak{U}$ – *множество допустимых управлений*, пара $(u,v) \in \mathfrak{U}$ задает управление, $\tilde{x} \in H^1(0,T;\mathcal{X})$ – заданная функция. P – проектор, являющийся единицей разрешающей полугруппы (группы) операторов.

Через D_M обозначим область определения оператора M, снабженную его нормой графика. Согласно [5, с.89] оператор M будем называть (L,σ)-ограниченным, если множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}: (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$ ограничено в $\mathbb{C}$. При условии (L,σ)-ограниченного оператора M обозначим $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| = r > a\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$,

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \qquad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Операторы P и Q являются проекторами, обозначим $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Пусть $L_k(M_k)$ – сужение оператора L (M) на $\mathcal{X}^k(D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k), k = 0,1$.

Теорема 1. [5, с. 90, 91]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $\mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1, \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1}L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Из вида уравнения (7) следует, что естественно будет искать его решение в гильбертовом пространстве $\mathcal{Z}_0 = \{z \in H^1(0,T;\mathcal{X}) : L\dot{z} - Mz \in L_2(0,T;\mathcal{Y})\}$, наделенном нормой $\|z\|^2_{\mathcal{Z}_0} = \|z\|^2_{H^1(0,T;\mathcal{X})} + \|L\dot{z} - Mz\|^2_{L_2(0,T;\mathcal{Y})}$.

Множество $\mathfrak{W}$ троек $(x,u,v) \in \mathcal{Z}_0 \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям (7), (8) назовем *множеством допустимых троек* задачи (7)–(9). Решение задачи (7)–(9) состоит в нахождении троек $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал качества $J(x,u,v)$:

$$J(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) = \inf_{(x,u,v)\in\mathfrak{W}} J(x,u,v).$$

Теорема 2. [3] *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$ *– инъективный оператор,* $\mathfrak{U}_\partial$ *– замкнутое, выпуклое и ограниченное в пространстве* $\mathfrak{U}$ *множество,* $\mathfrak{U}_\partial \cap (H^1(0,T;\mathcal{U}) \times \mathcal{X}) \neq 0$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{Z}_0 \times \mathfrak{U}_\partial$ *задачи* (7)–(9).

2. Разрешимость задачи управления. Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} = \left\{v \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^3 : \nabla \cdot v = 0\right\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Существует представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор.

Следуя подходу С.Л. Соболева [1], используем обобщенную постановку задачи (1) – (4), заменив уравнение несжимаемости (4) и граничное условие (2) на уравнение

$$\Pi v(\cdot,t) = 0, t \in (0,T). \tag{10}$$

Очевидно, что оператор $D : v \to [v,\bar{\omega}]$, $\bar{\omega} = (0,0,\omega)$, осуществляет линейное непрерывное отображение из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, при этом $\|D\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$. Имеет место действие оператора $D : \mathbb{H}_\pi \to \mathbb{H}_\sigma$ [6, лемма 2].

Положим $\Sigma = \mathrm{I} - \Pi$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $D_\sigma = D|_{\mathbb{H}_\sigma}$, $\mathfrak{U} = L_2(0,T;(\mathbb{L}_2(\Omega))^4)$, тогда задачу (1), (3), (10) можно задать в виде (7) с начальным условием $x(0) = v$ с помощью операторов (подробнее см. в [6])

$$L = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma D_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi D_\sigma & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}), \quad B = \mathbb{I}. \tag{11}$$

При этом $\mathcal{Z}_0 = \{(v,r) \in H^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma) \times H^1(0,T;\mathbb{H}_\pi) : .$

$$v_t - \Sigma D_\sigma v \in H^1(0,T;\mathbb{H}_\sigma), \qquad -\Pi D_\sigma v + r \in H^1(0,T;\mathbb{H}_\pi)\}$$

Теорема 3. Пусть существует хотя бы одна пара $(q,u) \in H^1(0,T;(\mathbb{L}_2(\Omega))^2)$, удовлетворяющая условию (5). Тогда существует единственное решение $(\hat{v},\hat{r},\hat{q},\hat{u}) \in \mathcal{Z}_0 \times \mathfrak{U}$ задачи (1)–(6).

Доказательство. Задача (1)–(6) с учетом условия (1) сводится к абстрактному уравнению (7) с операторами L и M, которые указаны в (11). Как показано в работе [7] оператор M является $(L,0)$-ограниченным.

В данном случае множество допустимых управлений $\mathfrak{U}_\partial$ задается условием (5), которое очевидно является непустым выпуклым и замкнутым подмножеством пространства управлений $\mathfrak{U} = L_2(0,T;(\mathbb{L}_2(\Omega))^2)$.

Поскольку начальное условие (1) задано лишь для функции v и с учетом вида проектора P, полученного в [7], данная задача является задачей с начальным условием Шоуолтера–Сидорова. Таким образом, с учетом выписанного множества $\mathcal{Z}_0$ и инъективности оператора $B = \mathbb{I}$ мы имеем единственное решение задачи жесткого смешанного управления по теореме 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–31125–мол_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соболев С.Л.** Об одной новой задаче математической физики / С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, №1. С. 3–50.
2. **Плеханова М.В., Федоров В.Е.** Оптимальное управление вырожденными распределенными системами: монография. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. 2013. 174 с.
3. **Плеханова М.В., Исламова А.Ф.** Задачи с жестким смешанным управлением для линеаризованного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, №4. С. 565–576.
4. **Плеханова М.В., Исламова А.Ф.** О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами // Изв. вузов. Математика. 2011. №7. С. 37–47.
5. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003. 216+vii p.
6. **Уразаева А.В., Федоров В.Е.** Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, №8. С. 1111–1119.
7. **Гордиевских Д.М., Федоров В.Е.** Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». 2015. Т. 12. С. 12–22.