ОДНОРОДНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

В.Е. Федоров, Н.В. Филин

Челябинский государственный университет
454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, Россия

Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1^2)}{\partial x}=-m_1\frac{\partial P_1}{\partial x}-\frac{m_1\rho_2(u_1-u_2)}{\tau},\\
&\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x}=-m_2\frac{\partial P_2}{\partial x}-(P_2-P_1)\frac{\partial m_2}{\partial x}+\frac{m_1\rho_2(u_1-u_2)}{\tau},\\
&\frac{\partial m_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial m_2}{\partial x}=\frac{m_1 m_2(P_1-P_2)}{\tau_2},\\
&m_1=1-m_2,\\
&P_1=\frac{\rho_1}{m_1}-1,\\
&P_2=a^2\left(\frac{\rho_2}{m_2}-r\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

описывающую в безразмерных переменных динамику двухфазной смеси (см., например, [1, 2]). Здесь $\rho_i, \rho_{ii}, u_i, P_i, m_i$ – средняя плотность, истинная плотность, скорость, давление и объемная концентрация i-го компонента смеси, $\rho_i = m_i\rho_{ii}$, $a_i, \rho_{ii,0}$ – скорость звука и истинная плотность материала i-го компонента, τ – время стоксовой релаксации скоростей, τ_2 – время релаксации давлений компонентов смеси, $a = a_2 / a_1$, $r = \rho_{22,0} / \rho_{11,0}$.

После подстановки выражений для функций P_1, P_2, замены m_1 на m и очевидных преобразований перепишем систему уравнений (1) в виде

$$
\begin{aligned}
&\rho_{1t}+\rho_{1x}u_1+\rho_1 u_{1x}=0,\\
&\rho_{2t}+\rho_{2x}u_2+\rho_2 u_{2x}=0,\\
&\rho_1 u_{1t}+\rho_1 u_1 u_{1x}+\rho_{1x}-\frac{\rho_1}{m}m_x+\frac{m\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}=0,\\
&\rho_2 u_{2t}+\rho_2 u_2 u_{2x}+a^2\rho_{2x}+\left(\frac{\rho_1}{m}+a^2 r-1\right)m_x-\frac{m\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}=0,\\
&m_t+u_2 m_x=-\frac{\rho_1(1-m)-a^2\rho_2 m+(a^2 r-1)m(1-m)}{\tau_2}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Вычислим ее главную алгебру Ли [3] – она трехмерна и имеет базис

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Ее оптимальные системы одномерных и двумерных подалгебр найдены в [4]

$$\Theta_1 = \left\{ \langle X_2 \rangle, \langle X_3 \rangle, \langle X_1 + cX_3 \rangle, c \in R \right\}, \quad \Theta_2 = \left\{ \langle X_2, X_3 \rangle, \langle X_2, X_1 + cX_3 \rangle, c \in R \right\}.$$

Найдем инвариантное решение системы для оператора X_2. Из вида инвариантов оператора следует, что искать решение можно в виде $\rho_1 = \rho_1(t)$, $\rho_2 = \rho_2(t)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $m = m(t)$, то есть речь идет об однородном в пространстве решении. Подставив функции, зависящие только от t, в систему уравнений, получим инвариантную подмодель: ρ_1, ρ_2 – константы,

$$\begin{aligned}
&\rho_1 u_1'(t) + \frac{m(t)\rho_2(u_1(t) - u_2(\mathrm{t}))}{\tau} = 0, \\
&\rho_2 u_2' - \frac{m(t)\rho_2(u_1(t) - u_2(\mathrm{t}))}{\tau} = 0, \\
&m'(t) = -\frac{\rho_1(1 - m(t)) - a^2\rho_2 m(t) + (a^2 r - 1)m(t)(1 - m(t))}{\tau_2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

В правой части последнего уравнения получилось квадратичное выражение относительно $m(t)$. Если опустить множитель $-\tau_2^{-1}$, то дискриминант этого выражения имеет вид $D \equiv (a^2 r - 1 + \rho_1 - a^2\rho_2)^2 + 4a^2\rho_1\rho_2 > 0$, тогда проинтегрируем последнее из уравнений (3) и получим

$$m(t) = \frac{2\sqrt{D}}{1 - C_1 \exp\left(\dfrac{2(a^2 r - 1)\sqrt{D}}{\tau_2} t \right)} + \frac{\rho_1 + a^2\rho_2 + 1 - a^2 r + \sqrt{D}}{2(1 - a^2 r)},$$

Из суммы первых двух уравнений выразим $u_2(t) = \dfrac{C_2 - \rho_1 u_1(t)}{\rho_2}$, после чего, проинтегрировав первое из уравнений (3), получим

$$u_1(t) = \left| C_1 - \exp\left(\frac{2(1 - a^2 r)\sqrt{D}}{\tau_2} t \right) \right|^{\frac{\tau_2(\rho_1 + \rho_2)}{\tau(a^2 r - 1)\rho_1}} \exp\left(\frac{(\rho_1 + a^2\rho_2 + 1 - a^2 r + \sqrt{D})(\rho_1 + \rho_2)}{2(a^2 r - 1)\tau\rho_1} t \right) \times$$

$$\times \int \frac{C_2 m(t)}{\tau\rho_1} \left| C_1 - \exp\left(\frac{2(1 - a^2 r)\sqrt{D}}{\tau_2} t \right) \right|^{-\frac{\tau_2(\rho_1 + \rho_2)}{\tau(a^2 r - 1)\rho_1}} \exp\left(-\frac{(\rho_1 + a^2\rho_2 + 1 - a^2 r + \sqrt{D})(\rho_1 + \rho_2)}{2(a^2 r - 1)\tau\rho_1} t \right) dt.$$

Заметим, что полученное решение после добавления константы к переменной t, а также в случае добавления одинаковой константы к функциям u_1 и u_2 переходит в новое решение, поскольку эти операции соответствуют действию на решение допускаемых групп, порождаемых операторами X_1 и X_3 соответственно.

Таким образом, найдено аналитическое выражение (с поправкой на то, что в нем участвует неопределенный интеграл) для однородного в пространстве решения исследуемой системы уравнений динамики смеси двух газов, которое может быть использовано при исследовании ее качественных свойств, решении краевых задач для этой системы, их численном исследовании, построении линеаризованной модели и т. д.

Аналогичным образом можно построить инвариантные подмодели и осуществить поиск инвариантных решений для остальных операторов из оптимальных систем подалгебр Θ_1 и Θ_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жилин А.А., Федоров А.В.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // Прикл. механика и тех. физика. 1999. Т. 40, № 1. С. 57–63.
2. **Жилин А.А., Федоров А.В**. Отражение ударной волны от жесткой стенки в смеси жидкого металла и твердых частиц // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 97–107.
3. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.
4. **Панов А.В.** Групповая классификация системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. ун-та. № 28 (241). Математика. Механика. Информатика. Вып. 13. С. 38–48.