АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФОКУСИРОВКЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В.Ф. Куропатенко[1,2], Ф.Г. Магазов[2], Е.С. Шестаковская[2]

[1] Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина
456770, Снежинск, Россия
[2] Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),
454080, Челябинск, Россия

В лагранжевых координатах построено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в сосуде с непроницаемой стенкой, описывающее случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Рассматривается сосуд с непроницаемой стенкой, в котором находится газ массой M_0 и начальными при $t = t_0$ параметрами газа ρ_0=const, U_0=0, P_0=0, E_0=0, где ρ – плотность, U – скорость, P – давление, E – удельная внутренняя энергия. Лагранжевой координатой является масса M. Второй независимой переменной является время t. В точке t_0, M_0 задана скорость $U_1 < 0$. Т. о. в этой точке задан сильный разрыв, который при $t > t_0$ распространяется к центру симметрии и в момент t_f фокусируется в точку $M = 0$. Граница сосуда при $t > t_0$ движется в переменных r, t, но в переменных M, t её траектория является вертикальной линией. Параметры газа между ударной волной и границей определяются системой законов сохранения Эйлера-Гельмгольца. Уравнение состояния используются в двух формах

$$P = (\gamma-1)\rho E, \quad P = F(s)\rho^{\gamma},$$

где $F(s)$ – функция от энтропии.

Лагранжева координата M_w ударной волны в одномерном случае связана с её эйлеровой координатой r_w уравнением

$$M_w = \frac{s_\mu}{\mu}\rho_0 r_w^{\mu}, \tag{1}$$

где $\mu = \begin{cases} 1, \text{ плоская симметрия} \\ 2, \text{ цилиндрическая симметрия} \\ 3, \text{ сферическая симметрия} \end{cases}$, $\quad s_\mu = \begin{cases} 1, \text{при } \mu = 1 \\ 2\pi, \text{при } \mu = 2 \\ 4\pi, \text{при } \mu = 3 \end{cases}$.

По аналогии с [1, 2] зададим траекторию ударной волны в виде

$$M_w = M_0\,\varphi(t)^n, \tag{2}$$

где $\varphi = (t_f - t)/(t_f - t_0)$.

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями траектории, сохранения массы и движения [3]

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M - U = 0\,, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + s_\mu \rho^2 \frac{\partial\left(r^{\mu-1}U\right)}{\partial M} = 0\,, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M + s_\mu r^{\mu-1} \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} = 0\,. \tag{5}$$

Эти уравнения содержат три искомых функции r, ρ и U. Величина F определяется на ударной волне и зависит только от M.

Перейдём в (3)–(5) к новым искомым функциям

$$R = r^\mu, \quad C = r^{\mu-1}U. \tag{6}$$

После перехода уравнения (3)–(5) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_M - \mu C = 0\,, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + s_\mu \rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0\,, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_M + s_\mu R^{2(\mu-1)/\mu} \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} - 2C^2R^{-1} = 0\,. \tag{9}$$

Уравнения (7)–(9) являются основными для отыскания R, C и ρ в области интегрирования $M_w \le M \le M_0$, $t_0 \le t \le t_f$.

Перейдём от переменных t, M к переменным $t, \xi(t, M)$. Зависимость $\xi(t, M)$ зададим так, чтобы на ударной волне было $\xi = 1$. Из (2) следует, что проще всего взять такую зависимость в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0}\varphi^{-n}\,.$$

Для разделения переменных представим R, ρ и C в виде произведений функций от времени на функции от ξ

$$R = \alpha_R(t)T(\xi) \qquad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \qquad C = \alpha_C(t)Z(\xi)\,. \tag{10}$$

Определим значения этих функций на ударной волне при $\xi = 1$

$$\begin{gathered} T_w(1) = T_1,\ \delta_w(1) = \delta_1,\ Z_w(1) = Z_1, \\ \alpha_R(t) = R_0\,\varphi^n\,T_1^{-1}, \alpha_\rho = \rho_0\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\delta_1^{-1},\ \alpha_C(t) = C_0\,\varphi^{n-1}\,Z_1^{-1}\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставив (10),(11) в (7)–(9), получим три уравнения для T, δ и Z

$$\xi T' = A_1 , \tag{12}$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0 , \tag{13}$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2 , \tag{14}$$

где

$$A_1 = T - \frac{2 Z T_1}{(\gamma+1) Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1}\, T^{2(\mu-1)/\mu}\, \xi^{-((\mu-2)n+2\mu)/\mu n}}{\delta_1^{\gamma-1}\, T_1^{2(\mu-1)/\mu}},$$

$$C_2 = \frac{2(\mu-1) Z^2 T_1}{\mu(\gamma+1) Z_1^2 T} - \frac{(n-1) Z}{n Z_1} - C_1 \frac{2(n-\mu)\delta}{\mu n \, \delta_1}.$$

Уравнения (12)-(14) образуют относительно T', δ', Z' систему линейных неоднородных уравнений. Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2 \neq 0 .$$

Тогда решение системы (12)–(14) существует и имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta} . \tag{15}$$

Расчёты показывают, что существует особое значении n_*, при котором определитель системы и числитель C_2 одновременно обращаются в ноль, следовательно, решение системы (15) в этой точке тоже существует, а каждому значению γ соответствует одно значение n_*. Функции $T(\xi), \delta(\xi), Z(\xi)$ находятся интегрированием системы (15) при $n = n_*$, и затем размерные величины с помощью соотношений (6) и (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., Якимова М.Н.** Динамическое сжатие холодного газового шара // Доклады академии наук. 2015. Т.461, № 5, С. 530-532.
2. **KuropatenkoV. F., Shestakovskaya E. S.,** Analytical solution of the problem of a shock wave in the collapsing gas in Lagrangian coordinates // AIP Conf. Proc. 1770, 030069 (2016); doi:10.1063/1.4964011
3. **Куропатенко В.Ф.** Модели механики сплошных сред, Челябинск: ЧелГУ, 2007.