\documentclass[10pt]{article}

% Подключение пакетов.

\usepackage{amsmath}

\usepackage{amsfonts,amssymb}

\usepackage{amsthm}

\usepackage[active]{srcltx}

\usepackage[cp1251]{inputenc}

\usepackage[russian]{babel} % Пакет поддержки русского языка

\usepackage[final]{graphicx}

% Оформление списка литературы

\newenvironment{ltrtr}{

\vspace{0.5\baselineskip} \noindent {\footnotesize{СПИСОК \

ЛИТЕРАТУРЫ}} \vspace{-0.5\baselineskip}

\begin{enumerate}

\partopsep=0pt\topsep=0pt\itemsep=1pt\parsep=0pt\parskip=0pt}{\end{enumerate}}

% Установка размеров страницы

\textwidth 13cm

\textheight 18cm

\topmargin 0mm

\oddsidemargin 5mm

\begin{document}

% Инициализация счетчиков автоматической нумерации

\setcounter{figure}{0} \setcounter{equation}{0}

\setcounter{table}{0} \setcounter{footnote}{0}

\begin{center}

\title{}{\bf О РОЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТОЖДЕСТВА В ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ}

\author{}{Титаренко С.А.}

{\it Санкт-Петербургская Торгово-Промышленная Палата, Санкт-Петербург}

{\it titarenko.sa@gmail.com}

\end{center}

Для спектральной задачи

$

-\Delta W\_n =E\_n W\_n, \ W\_n \mid \_{\partial \Omega}=0

$

рассматривается обратная постановка: найти неизвестную область $\Omega$ по ее заданному спектру $Spec(\Omega) = \{0<E\_1 < E\_2\leq \ldots \}$. Распространено мнение, что эта задача, известная как задача Каца о барабане, не имеет решения: за последние 30 лет построено немало неизометричных, но изоспектральных областей (их спектры совпадают как счетные множества) – см. на рис.А-С пары охватывающих многоугольников (взяты из указанных статей, прочие построения наши). Разработанный нами общий метод изоспектрии дает необходимое условие неединственности: если области изоспектральны и неизометричны, то они $m$-клеточны и связаны многозначной изометрией ($\mathbf T$ на рис.В). Клетка – это подобласть $\Phi \subset \Omega: Spec(\Phi) \subset Spec(\Omega)$. Собственные функции клетки есть сужения некоторых $W\_{n\_k} \mid \_{\Phi}$ для клеточной области $\Omega$, которая строится отражениями клетки $\Phi$ относительно отрезков на границе $\partial \Phi$ (например, 7-клеточные многоугольники на рис.А-В).

Основа метода изоспектрии – формулировка спектральной задачи в соболевском пространстве $H(\Omega) (= \stackrel{\circ }{W\_2^1}(\Omega ))$ как соболевского вариационного тождества:

$

(W\_n,f)\_{H(\Omega )}=(1+E\_n)(W\_n,f)\_{L\_2(\Omega )}, \ \forall f\in H(\Omega ), \ W\_n \in H(\Omega ) \subset L\_2(\Omega ),

$

где скалярное произведение

$

(g,f )\_{H(\Omega )}=(g,f )\_{L\_2(\Omega )}+\int\limits\_\Omega

(\nabla g,\nabla f ) d\Omega.

$

Подстановка ортонормированного в $L\_2$ базиса

$

\{W\_n\}\_{n=1}^\infty

$

дает его ортогональность и в $H$ с нормировкой

$

(W\_n,W\_n)\_{H(\Omega )}=1+E\_n.

$

Тогда для изоспектральных областей $\Omega$ и $\widetilde{\Omega}$ их лебегов изоморфизм $T$: $\widetilde{W}\_n = T W\_n$ является также изоморфизмом соболевских пространств, сохраняя ортонормированные соболевские базисы:

$

\widetilde{W}\_n/\sqrt{1+\widetilde{E\_n}}=T W\_n/\sqrt{1+E\_n} \Rightarrow \sqrt{1+\widetilde{E\_n}}=\sqrt{1+E\_n} \Rightarrow \widetilde{E\_n}=E\_n, \forall n.

$

Изучение дважды унитарного оператора $T$ и индуцированного им спектрального отражения $\mathbf T$ дает условие неединственности и позволяет доказать, что множества $\omega: Spec(\omega)=Spec(\mathbf T \omega)$ образуют алгебру – изоспектральность сохраняется для пересечений, дополнений и объединений. Например, на рис.А и С изоспектральны как несвязные подобласти из 7 черных кругов в $\widetilde{\Omega}$ и 1 черного и 6 белых кругов в $\Omega$, так и их дополнения – связные многоугольники с 7 дырками. Эта алгебра множеств оказывается изоморфной полной булевой алгебре, позволяя трактовать множества $\omega$ как представления высказываний, а ${\mathbf T}^{-1} {\mathbf T} \omega$ как их двойное отрицание и обобщая закон двойного отрицания

$

\omega \subseteq {\mathbf T}^{-1} {\mathbf T} \omega,

$

где равенство соответствует случаю исключенного третьего. Обобщение не случайно: наша спектральная задача может трактоваться как квантовый биллиард ($W\_n$=волновые функции, $E\_n$=энергетические уровни локализованной частицы), а в основе квантовой теории лежит диалектический корпускулярно-волновой дуализм.

\begin{figure}[ht]

\centering

\includegraphics{Fig1&2.png}

\caption{}

\label{}

\end{figure}

\end{document}