СВОЙСТВА И ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗНЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ

Зоркальцев В. И., Казазаева А.В.
Байкальский государственный университет, Иркутск
vizork@mail.ru

Представлены исследования свойств и взаимосвязей ближайших к началу координат точек выпуклого полиэдра (множество решений системы линейных неравенств) $Y \subset R^n$ при различных определениях понятия близости. Вид такой геометрической проблемы имеют линейные или линеаризованные задачи поиска ближайшего к заданному вектору решения систем неравенств или моделей оптимизации, поиск псевдорешений несовместных систем, в том числе задачи аппроксимации. В качестве наиболее общей постановки рассматривается поиск векторов полиэдра с парето-минимальными абсолютными значениями компонент. Пусть Q — множество таких векторов. Доказано, что это множество ограниченное, связное, замкнутое, в общем случае не выпуклое.

Пусть *x(f)* — точка минимума штрафной функции f на полиэдре Q . В докладе аксиоматически определяется множество штрафных функций, которые содержательно соответствуют обсуждаемой проблеме. Среди этих функций находятся гельдеровские нормы $\rho^p_{h,d}(x) = (\Sigma^n_1(h_j x_{j+} - d_j x_{j-})^p)^{\frac{1}{p}}$. Символы +, - обозначают положительную и отрицательную срезки. Заданы $p{>}1$ — степенной коэффициент, h, d – векторы весовых коэффициентов из подмножества R^n_+ векторов с положительными коэффициентами. Целесообразность использования в некоторых случаях разных штрафных коэффициентов за отклонения в «положительную» и «отрицательную» стороны выявили доклады на семинаре по интервальной математике С. П. Шарого. Точка $x(\rho^p_{h,d})$ является гельдеровской проекцией начала координат на линейное многообразие. Частным случаем при $p = 2$ имеем евклидову проекцию (метод наименьших квадратов). В предельных случаях при $p = 1$ и $p = \infty$ получаем октаэдральные (метод наименьших модулей) и чебышевские нормы и проекции. Обозначим P, P_1, P_2 множества гельдеровских, октаэдральных и евклидовых проекций начала координат на R при варьировании весовых коэффициентов h, d в R^n_+. Задача поиска октаэдральных проекций может иметь не единственное решение. В приводимой ниже теореме в таких случаях учитываются все решения.

Теорема 1. *Множество P_2 связное, в общем случае не замкнутое, $P_2 = P, clP = Q = P_1$.*

Приводится алгоритм вычисления во всех случаях единственной чебышевской проекции (не нуждающейся в условии Хаара) путем поиска относительно внутренних точек оптимальных решений конечной последовательности задач линейного программирования. Пусть $x(\rho^\infty_{h,d})$ — указанная чебышевская проекция, P_∞ — множество таких чебышевских проекций при варьировании весовых коэффициентов в R^n_+. Доказана

Теорема 2. *$x(^p_{h,d}) \to x(^\infty_{h,d})$ при $p \to \infty$ для любых $h, d \in R^n_+$. $P_\infty = P_2$.*