

Международная научная конференция
**«Современные проблемы
обратных задач»**
посвященная 100-летию со дня рождения
академика Г.И. Марчука

ТЕЗИСЫ

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Математический центр в Академгородке

Новосибирск, Академгородок,
2 – 4 октября 2025 года
Формат смешанный

Программный комитет:

Сопредседатели Программного комитета:

С.И. Кабанихин – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИМ СО РАН

М.А. Шишленин – профессор РАН, д.ф.-м.н., ИМ СО РАН

О.И. Криворотько – д.ф.-м.н., НТУ «Сириус»

Организационный комитет:

Председатель

М.А. Шишленин – профессор РАН, д.ф.-м.н., ИМ СО РАН

Зам. председателя

О.И. Криворотько – д.ф.-м.н., НТУ «Сириус»

Н.С. Новиков – к.ф.-м.н., ИМ СО РАН

Секретарь оргкомитета

П.С. Сурнин, ИМ СО РАН

Члены оргкомитета

Н.Ю. Зятков,

А.И. Глухов,

А.В. Губер,

М.Р. Дударь,

И.А. Радько

Почта оргкомитета: msip-oc@yandex.ru

Конференция «Современные проблемы обратных задач» посвящена обсуждению актуальных вопросов в области теории обратных и некорректных задач, математического моделирования и вычислительной математики. Мероприятие призвано стать площадкой для объединения ведущих специалистов, молодых ученых и представителей научных школ для обмена опытом и укрепления международного и междисциплинарного сотрудничества.

В рамках конференции будут затронуты как фундаментальные аспекты, связанные с развитием теории регуляризации, оценками устойчивости и методами решения некорректно поставленных проблем, так и прикладные вопросы, возникающие в различных областях науки и технологий.

Основные тематические направления

- Теория обратных и некорректных задач.
- Методы регуляризации А.Н. Тихонова и их развитие.
- Численные методы и алгоритмы решения обратных задач.
- Математическое моделирование сложных систем и процессов.
- Обратные задачи для дифференциальных уравнений.
- Приложения в геофизике, медицине, томографии, астрофизике и дистанционном зондировании.
- Обратные задачи в машинном обучении и искусственном интеллекте.
- Программное обеспечение для решения обратных задач.

Оглавление

Обобщённая разрешимость существенно нелокальной по времени параболической обратной задачи с граничным условием Неймана (<u>Абдукаримов Ф. А.</u> , <u>Старовойтов В. Н.</u> , <u>Титова А. А.</u>)	1
Обратные задачи определения источника в псевдопараболическом уравнении с дробными по времени производными (<u>Аблабеков Б.С.</u> , <u>Аблабекова А.Б.</u>)	2
Влияние исследований Г.И. Марчука на обратные задачи для уравнения переноса (<u>Аниконов Д.С.</u>)	3
Разработка алгоритма решения трехмерной обратной задачи акустики (<u>Кабанихин С.И.</u> , <u>Баканов Г.Б.</u> , <u>Шилинин М.А.</u>)	4
Обучение со слабой разметкой на основе регуляризации (<u>Бериков В.Б.</u>)	5
Восстановление стационарного коэффициента младшей производной параболического уравнения (<u>Васильев В.И.</u> , <u>Кардашевский А.М.</u>)	6
Итерационные методы при анализе некорректных задач выпуклого программирования (<u>Васин В.В.</u> , <u>Гайнова И.А.</u>)	7
Прямая и обратная задача для многомерного интегрального уравнения типа свертки (<u>Воронин А. Ф.</u>)	8
Устойчивое решение приближенной задачи линейного программирования с поэлементным заданием погрешностей в исходных данных (<u>Ерохин В.И.</u> , <u>Тамасян Г.Ш.</u>)	9
Применение георадарного комплекса «ОКО» для экспериментального исследования конструктивных слоёв дорожной одежды (<u>Искаков К.Т.</u> , <u>Жансеитова А.М.</u> , <u>Сагиндыков К.М.</u> , <u>Калменов К.Б.</u> , <u>Жусупов Т.А.</u>)	10
Последствия замены вероятностей частотами (<u>Зоркальцев В.И.</u> , <u>Князев А.С.</u>)	12
К вопросу идентификации термодинамических параметров вещества (<u>Зубов В.И.</u>)	13

Современные вычислительные технологии для анализа георадарных данных и интерпретации подповерхностных структур (<u>Искаков К.Т.</u> , <u>Турарова М.К.</u> , <u>Кусаинова А.Т.</u> , <u>Оралбекова Ж.О.</u> , <u>Татин А.А.</u>)	14
Применение базисных векторных полей в шаре при решении классических краевых задач для grad, rot, div (<u>Казанцев С.Г.</u> , <u>Кардаков В.Б.</u>)	15
Линейные обратные задачи временного типа для дифференциальных уравнений (<u>Кожанов А.И.</u>)	16
Обратные задачи для процесса колебаний системы струн (<u>Коновалова Д.С.</u>)	16
Вероятностное прогнозирование динамики туберкулеза в регионах Российской Федерации (<u>Криворотько О.И.</u> , <u>Неверов А.В.</u> , <u>Каминский Г.Д.</u> , <u>Шварц Я.Ш.</u>)	17
Коэффициентные обратные задачи для псевогиперболического уравнения с нелокальными условиями (<u>Курманбаева А.К.</u>)	18
Обратные задачи определения ядра в псевдопараболическом уравнении (<u>Аблабеков Б.С.</u> , <u>Матанова К.Б.</u>)	19
Модель рационально-оптимистичной популяции в период вспышки эпидемии (<u>Неверов А.В.</u> , <u>Криворотько О.И.</u>)	20
Идеи Г.И. Марчука и алгоритмы усвоения данных на основе ансамблей решений сопряжённых уравнений (<u>Пененко А.В.</u>)	21
Обратные и некорректные задачи многолетней мерзлоты при потеплении климата (<u>Пермяков П.П.</u> , <u>Малышев А.В.</u> , <u>Аммосов Г.С.</u> , <u>Иванов Д.С.</u> , <u>Винокурова Т.А.</u> , <u>Попов Г.Г.</u>)	22
Обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики (<u>Романов В.Г.</u>)	23
Реконструкция векторных полей в $\mathbb{R}^3$ по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона. (<u>Светов И.Е.</u> , <u>Полякова А.П.</u>)	24
Решение обратной коэффициентной задачи для уравнений Сен-Венана с использованием физически-информированной нейронной сети (<u>Стрижак С.В.</u> , <u>Кошелев К.Б.</u>)	25
Разрешимость в пространствах Гёльдера обратной задачи о хаотичной динамике полимерной молекулы (<u>Фоменко А.С.</u> , <u>Старовойтов В.Н.</u>)	26
Решение одной обратной задачи химического равновесия (<u>Хамисов О.В.</u> , <u>Донской И.Г.</u>)	27

Об определении тензора модулей упругости в некоэрцитивных краевых задачах (<i>Хлуднев А.М.</i>)	28
Решение обратной задачи геоэлектрики на основе физически информированных нейронных сетей (<i>Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.</i>)	29
О решении обратных задач динамики при помощи нейродифференциальных уравнений (<i>Шорохов С.Г.</i>)	30
One-dimensional inverse problem for wave equation (<i>Romanov V.G., Bugueva T.V.</i>)	31
Solving Nonlinear Schrödinger Equations Using Improved Physics-Informed Neural Networks (<i>Liu Shuang</i>)	32
Application of asymptotic solutions in full-wave inversion (<i>Protasov M.I., Neklyudov D.A., Shtein A.D., Dmitrachkov D.K.</i>)	33
Inverse kinematic problem using Chebyshev polynomials (<i>Protasov M.I., Neklyudov D.A.</i>)	34
The group behaviour analysis of the high-frequency traders based on Mean Field Games approach (<i>Egorov L.V., Trusov N.V.</i>)	35

Список авторов	37
-----------------------	-----------

Обобщённая разрешимость существенно нелокальной по времени параболической обратной задачи с граничным условием Неймана

Абдукаримов Ф. А.¹, Старовойтов В. Н.², Титова А. А.²

¹ ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

² ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, Россия
abdukarimovfarhod8@gmail.com

В докладе рассматривается обратная задача для существенно нелокального по времени параболического уравнения с граничным условием Неймана. Существенная нелокальность означает, что в уравнении присутствует интеграл от решения по всему интервалу времени, на котором решается задача. Такие уравнения встречаются при описании хаотичной динамики полимерной молекулы в жидкости [1] и при моделировании динамики популяций [2]. В первом случае роль времени в уравнении играет параметр длины дуги вдоль полимерной цепочки, во втором — возраст индивидуума.

Существенная нелокальность по времени вносит в исследуемую задачу несколько особенностей. Во-первых, присутствие в уравнении интеграла от решения по всему интервалу времени означает, что нужно знать «будущее» для определения коэффициента в уравнении. Это не согласуется с принципом причинности, который характерен для параболических задач. Во-вторых, при исследовании разрешимости нелинейное параболическое уравнение часто сначала решается на малом промежутке времени, а затем полученное решение продолжается на весь интервал. В данной ситуации такой подход невозможно применить.

Предложенная в [1] задача о хаотичной динамике полимерной цепочки сводится к коэффициентной обратной задаче для определения плотности вероятности того, что звено цепи находится в точке пространства. При этом ставится естественное условие переопределения, заключающееся в том, что интеграл от плотности вероятности по пространству равен единице. Доказана обобщённая разрешимость описанной выше обратной задачи. Доказательство проведено с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке, с применением принципа сжимающих отображений.

Список литературы

1. *Starovoitov V. N., Starovoitova B. N.* Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 894, Article 012088.
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012088>
2. *Webb G. F.* Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position. In “Structured population models in biology and epidemiology”, pp. 1-49. Berlin: Springer, 2008.

Обратные задачи определения источника в псевдопараболическом уравнении с дробными по времени производными

Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б.

Кыргызский национальный университет имени Ж.Баласагына, Бишкек
ablabekov_63@mail.ru

В области Ω_T рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^\alpha u - D_t^\alpha u_{xx} - u_{xx} = f(t)h(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

где $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, $\varphi(x)$, $f(x, t)$ - заданные функции. Здесь D_t^α - дробная производная Капуто порядка α ($0 < \alpha \leq 1$).

Найти пару функций $\{u(x, t), q(t)\} \in C(\bar{\Omega}_T) \cap C^{(2, \alpha)}(\Omega_T) \times C[0, T]$, если относительно решения прямой задачи (1) - (3) известна дополнительная информация

$$u(x_0, t) = \psi(t), \quad 0 < x_0 < \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\psi(t)$ - заданная функция. Обозначим через $C^{(k, \alpha)}(\Omega_T)$ класс функций, k раз непрерывно дифференцируемые по x в области Ω_T , для которых существует непрерывная производная D_t^α .

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi(x) \in C^4[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$;
- 2) $h(x, t) \in C^{(1, 0)}(\bar{\Omega}_T)$, $|h(x_0, t)| \geq h_0 > 0$, $h(0, t) = h(l, t) = 0$, $h_0 = const$;
- 3) $\psi(t) \in C^1[0, T]$, $\psi(0) = \varphi(x_0)$.

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1) - (4) в области Ω_{T^*} .

Влияние исследований Г.И. Марчука на обратные задачи для уравнения переноса

Аниконов Д.С.
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
anik@math.nsc.ru

В работах [1, 2] впервые в мире была поставлена и частично изучена обратная задача об определении коэффициента ослабления для уравнения переноса. Эти работы послужили стимулом для дальнейшего развития намеченного направления. Далее теоретическое исследование темы проводилось в ИМ СО РАН аспирантом Аниконовым Д.С. по рекомендации его научного руководителя А.И. Прилепко. В 1974 году была опубликована первая работа [3], содержащая строго доказанную теорему единственности одной обратной задачи. Сейчас имеется большое количество публикаций этого направления, из которых здесь отмечаются лишь некоторые, посвященные проблеме определения поверхностей разрывов коэффициентов уравнения. Так, в работе [4] был определен индикатор неоднородности, использующий плотность излучения на границе зондируемой среды в качестве исходных данных. Доказано, что этот индикатор является неограниченной функцией только вблизи искомой поверхности, что позволяет указать ее местоположение. В работе [5] изучался вопрос о видимых и невидимых средах при их фотонном зондировании. Доказано в [6], что для определяемого контраста составной среды коэффициент поглощения является более существенной характеристикой чем коэффициент рассеяния. Эти и многие другие результаты содержатся в монографиях [7-9]. Кроме теоретических исследований решались и практические проблемы. Так, в 2005 году группой авторов был получен российский патент на способ маскировки изделий при их рентгеновском зондировании [10]. Также публиковалась серия работ, для обоснования возможности создания фотонного локатора при сигнальном излучении на уровне погрешности измерений.

Список литературы

1. Марчук Г. И. О постановке некоторых обратных задач ДАН СССР, 156, № 3, 1964.
2. Марчук Г. И. Космические исследования, т. II, вып. 3, 1964, стр. 462—477.
3. Аниконов Д.С. Об обратных задачах для уравнения переноса. Дифференциальные уравнения, 1974, № 1.с. 7-17.
4. Аниконов Д.С. Построение индикатора неоднородности при радиационном обследовании среды. ДАН, 1997, т.557, №3, с.324-327.
5. Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В. Видимые и невидимые среды в томографии, ДАН, 1997, т.357, №.5, с.559-603.
6. Аниконов Д.С., Прохоров И.В. Значение коэффициента поглощения в диагностике рассеивающих и поглощающих сред. ДАН, 1999, т.368, №1.
7. Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. Использование уравнения переноса в томографии. Федеральная целевая программа «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997-2000 годы, Москва, 2000, изд. Логос, с.3-223.

8. *D.S. Anikonov, A.E. Kovtanyuk and I.V.Prokhorov* Transport equation and Tomography. Utrecht-Boston: VSP, 2002, viii+208 p. (monograph).
 9. *D.S. Anikonov, V.G. Nazarov and I.V.Prokhorov* Poorly Visible Media in X-ray Tomography. Utrecht-Boston: VSP, 2002. viii+294 p. (monograph).
 10. *Аниконов Д.С., Прохоров И.В., Назаров В.Г., Солнышко Н.В.* . Способ маскировки изделий. //Патент Российской Федерации № 2264424. Бюллетень № 32, 20.11.2005, заявка № 2003124026 от 30.07.2003 г.
-

Разработка алгоритма решения трехмерной обратной задачи акустики

Кабанихин С.И., Баканов Г.Б., Шишленин М.А.

Международный казахско-турецкий университет, Туркестан, Казахстан
galitdin.bakanov@ayu.edu.kz

Исследуется трехмерная обратная задача акустики об определении плотности и скорости в цилиндре по измерениям акустического давления на поверхности. Различные группы обратных задач, зависящие от типа задаваемой дополнительной информации рассмотрены в монографии [1].

Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем по некоторой дополнительной информации об их решениях имеют большое практическое значение [2]-[3]. Как правило, искомые коэффициенты являются важными характеристиками рассматриваемых сред. Разработан алгоритм решения трехмерной обратной задачи акустики. Алгоритм решения обратной задачи для гиперболических уравнений представляет большой интерес, так как на основе таких алгоритмов возможно создание комплексов обработки сейсмических наблюдений.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № АР 19678469).

Список литературы

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шихатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
 2. *Kabanikhin S. I. and Bakanov G. B.* Discrete analogy of the Gel'fand - Levitan equation // Journal of Inverse and Ill - Posed Problems. - VSP, Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, 1996. - Vol. 4, No. 5. - p. 409-435.
 3. *Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A.* Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. - 2011. - Vol. 18, no. 9. - p. 979-996.
-

Обучение со слабой разметкой на основе регуляризации

Бериков В.Б.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

berikov@math.nsc.ru

В задачах обучения со слабой разметкой (weakly supervised learning [1]) аннотация данных может быть неполной, неточной или неоднозначной (например, из-за высокой стоимости, ошибок маркировки, привлечения группы разных разметчиков, большого числа наблюдений).

Для решения рассматриваемых задач разработаны различные подходы, основанные на адаптации моделей машинного обучения, в том числе вероятностные или ансамблевые методы, а также методы, основанные на предположениях о кластерной структуре данных и о регуляризации многообразия. Для построения векторных представлений объектов используется глубокое обучение.

Актуальной проблемой остается совершенствование указанных подходов: разработка методов, позволяющих за приемлемое время получать точные и надежные решения в условиях разнородности данных (различных форм их представления и источников получения) и недостатке обучающей информации; создание эффективных алгоритмов анализа данных большого объема. Существующие алгоритмы часто требуют трудоемких вычислений и большого объема памяти. В данной работе будем рассматривать следующие способы задания слабой разметки и соответствующей постановки задачи.

а) Выборка имеет вид таблицы наблюдений за признаками объектов. Для каждого объекта a_i значение целевой переменной Y_i подчиняется некоторому известному распределению. Рассмотрим случай нормального распределения: $Y_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i)$, параметры которого (либо их оценки) известны, например, оценены по данным краудсорсинга. Часть выборки неразмечена и используется как источник дополнительной информации. Требуется для каждого неразмеченного наблюдения построить решение в виде статистического распределения $F(x)$, т.е. на языке слабой разметки.

б) Рассматривается задача семантической сегментации изображений. Требуется выделить области двух классов, например патологические и здоровые участки на томографическом снимке. При этом обучающая разметка задается в виде масок, включающих области изображения интересующего класса. Неточность разметки проистекает из возможного низкого качества снимков, недостаточного опыта разметчиков, большого числа изображений, наличия шума в оборудовании и т.д.

В предлагаемом докладе рассматривается новый подход к решению задач обучения со слабой разметкой, основанный на различных вариантах регуляризации [2, 1, 4]. При этом для повышения эффективности решений используются такие методы, как латентное представление данных с помощью глубокого автоэнкодера; низкоранговые операции с матрицей сходства; сглаживание границ изображений. Приведены результаты применения разработанных алгоритмов и сравнения с рядом известных методов.

Работа проведена при поддержке РНФ, проект 24-21-00195.

Список литературы

1. Zhou Z-H. A brief introduction to weakly supervised learning // National science review, 2018. V. 5(1). P. 44–53.
2. Kalmutskiy K. , Berikov V. Enhancing Stability of the Weakly Supervised Regression Algorithm Using Manifold Regularization and Fuzzy Clustering // Pattern Recognition and Image Analysis, 2025. V.35. No1. P.16–18.
3. Kalmutskiy K. , Berikov V. Clustering-Based Graph Neural Network in a Weakly Supervised Regression Problem // Lecture Notes in Computer Science, 2025. V.15681. P.335–347.
4. Mikhailapov D. , Tulupov A., Berikov V. Mask Correction in 3-D Tomography Brain Images for Weakly Supervised Segmentation of Acute Ischemic Stroke // 2024 International Russian Smart Industry Conference (SmartIndustryCon), Sochi, Russian Federation, 2024. IEEE. P. 796–801.

Восстановление стационарного коэффициента младшей производной параболического уравнения

Васильев В.И., Кардашевский А.М.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова, Якутск

Задачи об определении неизвестных коэффициентов в начально-краевых задачах для дифференциальных уравнений с частными производными относятся к обратным задачам. Они возникают в самых различных разделах науки и техники. Исследованиям теоретических вопросов условной корректности и методам численного решения обратных задач для уравнений математической физики посвящены монографии основателей данного раздела математики А.Н. Тихонова (Московская школа), В.К. Иванова (Свердловская школа) и М.М. Лаврентьева (Новосибирская школа).

В докладе предлагается итерационный метод численного решения обратной задачи определения стационарного коэффициента при первой производной по пространственной переменной параболического уравнения, представляющего собой функцию, зависящую от пространственных переменных. В качестве условия переопределения для каждого задано значение искомой функции по области определения пространственной переменной. Представлены результаты численной реализации предложенного вычислительного алгоритма на тестовых задачах с точными и квазирешениями.

Итерационные методы при анализе некорректных задач выпуклого программирования

Васин В.В., Гайнова И.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
vasin@imm.uran.ru

Рассматривается задача минимизации:

$$\inf \{ f_0(u) : u \in Q \}, \quad (1)$$

где $f_0 : U \rightarrow R^1$ — дважды дифференцируемый выпуклый функционал, Q — выпуклое множество гильбертового пространства U , в частности,

$$Q = \{ u \in D \subseteq U, f_i(u) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \}, \quad (2)$$

где f_i — выпуклые непрерывно дифференцируемые функционалы. Для решения задачи (1), (2) предлагается итерационный метод

$$u^{k+1} = \gamma_{k+1} [P_Q (u^k - \lambda \nabla f_0(u^k))] + (1 - \gamma_{k+1})v_0, \quad (3)$$

где P_Q — оператор метрического проектирования, γ_k — семейство корректирующих множителей [1]. При реализации процесса (3) $P_Q(v)$ вычисляются устойчивым методом на основе модифицированного процесса [2] (Ch. 3, Sec. 3):

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\lambda}{\varkappa^0} \sum_{i=1}^m f_i^+(u^k) \nabla f_i(u^k).$$

Численная эффективность процессов иллюстрируется на серии модельных примеров.

Список литературы

1. Vasin V.V. Stable iterative methods in problem of constrained convex minimizations // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2024. Vol. 12, No 4. P. 150–157.
2. Vasin V.V., Eremin I.I. Operators and iterative processes of Fejèr type. Theory and applications. Berlin|New York: Walter de Gruyter, 2009.

Прямая и обратная задача для многомерного интегрального уравнения типа свертки

Воронин А.Ф.
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
voronin@math.nsc.ru

Для $m \geq 1$ положим

$$R_{\pm}^m := \{t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m : \pm t_j > 0, j = \overline{1, m}\}.$$

Пусть M^+ – ограниченное множество в R_+^m , $M^- := -M^+$:

$$M^{\pm} \subset \{t \in R_{\pm}^m : 0 < \pm t_j < \pm T_j, \text{ где } 2\delta_j > T_j > \delta_j > 0, j = \overline{1, m}\} := P_{\delta}^{\pm}.$$

$P_{\delta}^{\pm}$ – m -мерные прямоугольники в $R_{\pm}^m$ соответственно.

Сформулируем сначала прямую задачу. В прямой задаче требуется найти решение $u \in L_1(M^+)$ следующего уравнения типа свертки второго рода:

$$u(t) - k * u(t) = f(t), \quad t \in M^+, \quad (1)$$

где

$$k \in L_1(M^- \cup M^+), \quad f \in L_1(M^+), \quad k * u(t) = \int_{M^+} k(t-s)u(s) ds. \quad (2)$$

Будем предполагать, что $k(t) = 0$ в заданной окрестности точки $t = 0$. Эта окрестность содержит некоторый m -мерный прямоугольник:

$$k(t) = 0, \quad t \in O_{\delta} \subset M^+ \cup M^-. \quad (3)$$

В прямой задаче функции f и k считаются известными.

В обратной задаче необходимо найти правую часть уравнения (1) – функцию f на некотором m -мерном прямоугольнике $N \subset M^+$ по решению прямой задачи, известному на N . Другими словами, известно решения $u \in L_1(N)$. Функции f и k считаются неизвестными. Заданы лишь условия (2)–(3). Отметим, что m -мерный прямоугольник N не является произвольным подмножеством множества M^+ , а определяется соответствующей формулой.

Найдены решения в явном виде прямой и обратной задач. Отметим, что доклад является развитием работы автора [1].

Список литературы

1. Voronin A.F. About the supports in the Fredholm convolution // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2024. V.33. № 1. P.543-550. DOI: 10.1515/jiip-2024-0015

Устойчивое решение приближенной задачи линейного программирования с поэлементным заданием погрешностей в исходных данных

Ерохин В.И.¹, Тамасян Г.Ш.^{1,2}

¹ Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

² ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия

vka@mail.ru

Рассматривается задача линейного программирования с интервальными ограничениями:

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad c^\top x \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\underline{A} \leq A \leq \bar{A}, \quad \underline{b} \leq b \leq \bar{b}, \quad (2)$$

где $\underline{A} = (\underline{a}_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ – известные объекты; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ – объекты, подлежащие определению. Предполагается, что задача (1), (2) разрешима, т.е., существуют гипотетические (неизвестные) вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, матрица $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и вектор $b_0 \in \mathbb{R}^m$ такие что 1) A_0, b_0 удовлетворяют условиям (2); 2) соответствующая задача (1) является собственной; 3) x_0 является ее нормальным решением.

Проблему построения *устойчивого решения* задачи (1), (2) сформулируем как задачу определения матрицы A^* и векторов b^*, x^* таких, что x^* является нормальным решением соответствующей задачи (1) и справедливы условия $\bar{A} - \underline{A} \rightarrow 0$, $\bar{b} - \underline{b} \rightarrow 0 \Rightarrow A^* \rightarrow A_0$, $b^* \rightarrow b_0$, $x^* \rightarrow x_0$.

Опираясь на результаты работ [3]–[3], можно показать, что справедлива

Теорема. Пусть система линейных неравенств $\bar{A}^\top p - \underline{A}^\top q \leq c$, $p, q \leq 0$, где $p, q \in \mathbb{R}^m$, совместна. Тогда 1) разрешима задача квадратичного программирования

$$x^\top x \rightarrow \min, \quad \bar{A}^\top p - \underline{A}^\top q \leq c, \quad \underline{A}x \leq \bar{b}, \quad -\bar{A}x \leq -\underline{b}, \quad c^\top x = b^\top(p-q), \quad p, q, x \geq 0; \quad (3)$$

2) относительно вектора $a = (a_j) \in \mathbb{R}^{mn}$ разрешима система линейных неравенств

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \quad \underline{b} \leq Xa \leq \bar{b}, \quad Ua \leq c,$$

где матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times mn}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times mn}$ и векторы $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}^{mn}$ построены по правилам

$$X = \begin{pmatrix} x^\top & & & \\ & x^\top & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^\top \end{pmatrix}, \quad U = (u_1 I_n \quad u_2 I_n \quad \dots \quad u_m I_n),$$

$$\underline{a} = (\underline{a}_{1,1}, \dots, \underline{a}_{1,n}, \underline{a}_{2,1}, \dots, \underline{a}_{2,n}, \dots, \underline{a}_{m,1}, \dots, \underline{a}_{m,n}), \quad \bar{a} = (\bar{a}_{1,1}, \dots, \bar{a}_{1,n}, \bar{a}_{2,1}, \dots, \bar{a}_{2,n}, \dots, \bar{a}_{m,1}, \dots, \bar{a}_{m,n}),$$

x, p, q – решение задачи (3), $u = p - q$, I_n – единичная матрица порядка n ;

3) Вектор $x^* = x$, а также матрица $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и вектор $b^* \in \mathbb{R}^m$, построенные по правилам

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)n+1} & a_{(m-1)n+2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b^* = A^* x^*,$$

являются устойчивым решением задачи (1), (2).

Список литературы

1. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю., Морозов В. А. Метод поточечной невязки для некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 7. С. 1140–1152.
2. Иваницкий А. Ю., Урусов А. М. Численный анализ метода поточечной невязки для решения прямой и двойственной неустойчивой задачи линейного программирования с приближенными данными // Вестн. Чувашского университета. 2018. № 1. С. 108–116.
3. Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерман К. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008.

Применение георадарного комплекса «ОКО» для экспериментального исследования конструктивных слоёв дорожной одежды

Искаков К.Т., Жансеитова А.М., Сагиндыков К.М., Калменов К.Б., Жусупов Т.А.

*Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г Астана, Казахстан
kazizat@mail.ru*

В условиях возросшей нагрузки на транспортную инфраструктуру Республики Казахстан актуальной задачей является внедрение современных методов неразрушающего контроля состояния дорожных конструкций. Георадарные комплексы серии «ОКО» позволяют быстро и высокоточно обследовать конструктивные слои дорожной одежды без повреждения покрытия.

Целью исследования является оценка возможностей и эффективности применения георадара серии «ОКО» для диагностики различных типов дорожной одежды с выявлением дефектов, зон переувлажнения, неоднородностей и определением границ слоёв. Экспериментальные работы выполнены на участках автомобильных дорог с асфальтобетонным, гравийным и комбинированным покрытием. Применялись антенные блоки АБ-250, АБ-400 и АБ-700, обеспечивающие глубину зондирования до 6–8 м и разную разрешающую способность.

Результаты показали, что комплекс «ОКО» позволяет определять характерные электрофизические параметры дорожной одежды, выявлять скрытые дефекты и разрабатывать рекомендации по выбору антенн и режимов съёмки. Предложенная методика обеспечивает высокую точность и воспроизводимость данных,

способствует интеграции результатов в цифровые модели инфраструктуры и может быть использована как основа для автоматизированного мониторинга дорог.

Георадарный комплекс «ОКО» продемонстрировал высокую эффективность при обследовании дорожных конструкций. Комплексное применение антенн обеспечивает точное выявление границ и дефектов слоёв. Предложенные методики обработки и интерпретации радарограмм позволяют получить достоверную информацию о структуре дорожной одежды. В перспективе целесообразно развитие автоматизированных алгоритмов интерпретации с использованием технологий машинного обучения и интеграция ГПР-данных в цифровые системы управления инфраструктурой.

Работа поддержана в рамках грантового финансирования МНиВО РК 2023–2025 по проекту АР 19680361 «Разработка вычислительных технологий для диагностики дорожной одежды автомобильных трасс».

Список литературы

1. *bdelsamei A., Al-Qadi I., Cao L.* Influence of temperature and moisture content on GPR response in asphalt pavements // Construction and Building Materials. – 2024. – Vol. 415. – P. 133279. – DOI:10.1016/j.conbuildmat.2024.133279.
2. *Искаков К., Татин А., Глазырина Н., Кусаинова А., Узаққызы Н., Сагиндыков К.* Разработка дискретного алгоритма интерпретации данных георадара в вертикально-неоднородных средах // Applied Sciences. – 2025. – Т. 15, № 13. – Ст. 7036. – DOI 10.3390/app15137036.
3. *Iskakov K., Tokseit D., Boranbaev S., Akhmetov I., Gelbukh I.* Computer Modeling of the Outgoing GPR Signal // Computación y Sistemas. – 2023. – Т. 27, № 1. – С. 5–12. – DOI 10.13053/cys-27-1-4543.
4. *Cao L., Al-Qadi I.L.* Effects of asphalt mixture moisture content on dielectric constant measured by GPR // NDT E International. – 2022. – Vol. 128. – P. 102669. – DOI:10.1016/j.ndteint.2022.102669.
5. *ómez Ortega A., Riveiro B., González-Aguilera D.* Advances in 3D GPR data processing for pavement inspection // Automation in Construction. – 2023. – Vol. 153. – P. 104977. – DOI:10.1016/j.autcon.2023.104977.
6. *Mukanova B.G., Kusainova A.T., Zhunusov K.D.* Primary processing of georadar signals by the Hilbert transform // Bulletin of the L.N. Gumilev ENU. - 2015. - №6.
7. *Zhao X., Liu H., Zhang Y.* Application of machine learning algorithms for automatic detection of pavement defects using ground penetrating radar // Journal of Infrastructure Systems. – 2023. – Vol. 29(4). – P. 04023032. – DOI:10.1061/JISCED.0000812.

Последствия замены вероятностей частотами

Зоркальцев В.И., Князев А.С.
ФГБОУ ВО БГУ, Иркутск, Россия
vizork@mail.ru

В математических расчётах нередко в качестве исходных данных используются вероятности реализации событий. При этом точные значения вероятностей могут быть неизвестны. Пользуются частотами реализации событий в располагаемых наблюдениях. Частоты событий в ограниченных выборках, естественно, могут отличаться от неизвестных истинных значений вероятности.

Доклад посвящен изложению разрабатываемой методики анализа влияния замены вероятностей частотами на результаты расчетов в зависимости от объемов выборки и используемого метода вычислений. В качестве примеров рассматриваются вычисление энтропии и алгоритмы оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения (на примере задачи оценки параметров процесса смертности рыб озера Байкал [1]).

Методика базируется на использовании метода статистических испытаний для формирования большого набора возможных вариантов реализации случайных выборок заданного объема. Для каждого варианта выборки осуществляется реализация рассматриваемой задачи (расчет показателя энтропии, параметров динамики смертности). На основе обработки данных расчетов большого набора вариантов определяются статистические показатели, характеризующие последствия от замены вероятностей частотами: математическое ожидание смещения рассчитываемых величин от их истинных значений, дисперсия рассчитываемых величин и др.

На базе расчетов таких показателей можно оценивать влияние объема выборки на качество расчетов, осуществлять сравнительный анализ разных методов расчета интересующих нас показателей. В частности, такие расчеты позволили оценить, сколько требуется выловить и идентифицировать по возрасту рыб для оценки с заданной точностью параметров динамики смертности. Позволили определить наилучшее правило выбора весовых коэффициентов при данных о численности рыб разных возрастов [2, 3]. Выявить методы, которые дают значительно более точную оценку параметров (в 4-5 раз по смещению математического ожидания и дисперсии оценок коэффициента смертности).

Рассматриваются возможности использования излагаемой методики для оценки параметров других законов распределения, для выявления выбросов в отдельные годы численностей рыб, для учета погрешностей в оценках возраста отдельных экземпляров рыб. Обсуждаются проблемы в реализации излагаемой методики.

Список литературы

1. *Стариков Г. В.* Голомянки Байкала. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1977. – 152 с.
2. *Бычков И. В., Зоркальцев В. И., Казазаева А. В.* Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. № 3. с. 275–288.

3. Zorkaltsev V. and Knyazev A. Comparative Analysis of Algorithms for Estimating Fish Population Dynamics // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 2, pp. 361–370.
-

К вопросу идентификации термодинамических параметров вещества

Зубов В.И.

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия

vladimir.zubov@mail.ru

Исследование нелинейных задач, связанных с процессом теплопередачи в веществе, имеет большое практическое значение. Одной из задач, возникающих при исследовании свойств новых материалов, является задача идентификации зависящих от температуры коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости исследуемого вещества по результатам экспериментальных наблюдений за динамикой температурного поля в объекте и на его границе. Рассмотрение этой задачи основано на первой краевой задаче для нестационарного уравнения теплопроводности. Обратная коэффициентная задача сводится к вариационной задаче. В качестве целевого функционала выбрано стандартное отклонение расчетного температурного поля в образце от его экспериментального значения [1] или стандартное отклонение расчетного потока тепла на границе объекта от его экспериментального значения [2]. Получены выражения для расчета градиента целевого функционала. Предложен алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи, в основе которого лежит современная методология быстрого автоматического дифференцирования. Исследована единственность решения сформулированной обратной задачи. Представлены и обсуждаются результаты решения сформулированной обратной задачи.

Список литературы

1. Gorchakov A.Yu., Zubov V.I. On Simultaneous Determination of Thermal Conductivity and Volume Heat Capacity of Substance // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol. 63. No. 8. P. 1408–1423.
 2. Горчаков А.Ю., Зубов В.И. Определение коэффициента теплопроводности и объемной теплоемкости вещества по тепловому потоку // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2024. Т. 64. № 4. С. 658–670.
-

Современные вычислительные технологии для анализа георадарных данных и интерпретации подповерхностных структур

Искаков К.Т., Турарова М.К., Кусаинова А.Т., Оралбекова Ж.О., Татин А.А.
Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г Астана, Казахстан
kazizat@mail.ru

Современное развитие методов неразрушающего контроля и мониторинга транспортной инфраструктуры требует совершенствования вычислительных технологий для интерпретации данных георадарного обследования. Особое значение приобретает построение алгоритмов, способных корректно решать прямую и обратную задачи в условиях кусочно-непрерывной среды, характерной для конструктивных слоёв дорожной одежды. Наличие слоистых структур с резкими изменениями диэлектрических свойств и влажности приводит к сложному распределению электромагнитного поля, что делает стандартные методы интерпретации недостаточно точными. В данной работе рассматривается разработка алгоритма, позволяющего моделировать распространение электромагнитной волны (прямая задача) и восстанавливать параметры подповерхностной среды по зарегистрированным сигналам (обратная задача). Предложенный алгоритм основан на использовании аналитических решений уравнений геоэлектрики в частотной области и метода послойного пересчёта для дискретизированных профилей. Такая постановка позволяет формировать обучающие выборки для последующего применения глубоких нейронных сетей и методов машинного обучения, а также обеспечивает устойчивость решения при наличии шумов. В работе представлен комплексный подход к диагностике подповерхностной структуры автомобильных дорог на основе данных георадарного комплекса «ОКО-2». Разработаны и реализованы алгоритмы обработки радарограмм с использованием полосовой фильтрации, вычитания среднего, выделения слоёв геофизической среды и расчёта диэлектрической проницаемости по слоям. Для первичной обработки сигналов применяется преобразование Гильберта, позволяющее идентифицировать контактные границы и повысить точность определения глубинных неоднородностей. Алгоритм был протестирован на данных георадарного комплекса «ОКО», полученных при обследовании участков автомобильных дорог с различными типами покрытий. Результаты показали высокую воспроизводимость и соответствие априорным инженерным данным. При использовании обученной нейронной сети достигнута возможность автоматизированного определения характеристик среды и локализации дефектов с минимальной погрешностью. Разработанный алгоритм представляет собой комплексный инструмент, объединяющий методы математического моделирования, обработки сигналов и искусственного интеллекта. Его применение позволит улучшить качество диагностики дорожной одежды, повысить эффективность мониторинга состояния инфраструктуры, а также создать базу для интеграции данных георадиолокации в цифровые модели управления транспортными системами. В перспективе метод может быть адаптирован для других областей неразрушающего контроля, включая экологический мониторинг и инженерную геофизику.

Список литературы

1. *Iskakov K., Tatin A., Glazyrina N., Kussainova A., Uzakkyzy N., Sagindykov K.* Development of a Discrete Algorithm for Interpreting Ground-Penetrating Radar Data in Vertically Heterogeneous Media. *Applied Sciences*, 15(13):7036, 2025. DOI: 10.3390/app15137036.
2. *Iskakov K., Tokseit D., Boranbaev S., Akhmetov I., Gelbukh I.* Computer Modeling of the Outgoing GPR Signal. *Computación y Sistemas*, 27(1), 5–12, 2023.
- 3.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Издательство Сибирского отделения РАН. Новосибирск, 2018. 512 с.
5. *Чанули М., Миррахими М.* Идентификация распределенного источника для волновых уравнений: автономный подход, основанный на наблюдении, автоматическое управление, *IEEE Trans.* 57(8) (2012) 2076–2073.
6. *Мартен В. де Хооп, Тимтельфуц Ю.* Обратная задача об источнике для волнового уравнения с переменной скоростью и дискретными во времени источниками, *Обратные задачи*, 31 (7), (2015), 075007.
7. *Mukanova B.G., Kusainova A.T., Zhunusov K.D.* Primary processing of georadar signals by the Hilbert transform // *Bulletin of the L.N. Gumilev ENU.* - 2015. - №6.
8. *Iskakov K.T., Tokseit D.K., Oralbekova Zh.O., Mirgalikyzy T.* Creation and testing of a new mathematical software for processing georadar data, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications.*

Применение базисных векторных полей в шаре при решении классических краевых задач для grad , rot , div

Казанцев С.Г., Кардаков В.Б.

ИМ СО РАН, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия
kazan@math.nsc.ru

В работах [1, 2, 3] были построены базисные векторные поля в пространствах $L_2(\mathbb{B}^3)$ и $H_0^1(\mathbb{B}^3)$. В настоящем докладе рассматриваются некоторые известные краевые задачи для уравнений с операторами grad , rot , div и получены решения в виде рядов по этим базисным векторным полям.

Список литературы

1. *Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster Th.* Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* 2007. V. 15. No 1. P.19–55.
2. *Казанцев С.Г., Кардаков В.Б.* Полоидально-тороидальное разложение соленоидальных векторных полей в шаре // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2019. Т.22. № 3. С. 74–95.

3. *Kazantsev S.G.* Polynomial basis in the space of vector functions H_0^1 and Stokes system in a ball // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2022. V. 10. No 4. P.73–95.
-

Линейные обратные задачи временного типа для дифференциальных уравнений

Кожанов А.И.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

kozhanov@math.nsc.ru

Обратными задачами временного типа называем такие задачи, в которых коэффициент зависит лишь от временной (выделенной) переменной. В качестве условий переопределения в таких задачах в основном используются либо условия точечного переопределения, либо условия интегрального по области переопределения. В случае, когда пространственных переменных больше одной, иногда используются условия интегрального по границе переопределения.

В настоящем докладе предлагаются новые постановки обратных коэффициентных задач временного типа — постановки, в которых интегральные условия переопределения задаются на произвольных гладких многообразиях размерности большей нулевой, лежащих в замыкании области изменения пространственных переменных.

Для предложенных задач в случае параболических уравнений устанавливаются теоремы существования и единственности решений.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Обратные задачи для процесса колебаний системы струн

Коновалова Д.С.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

dsk@math.nsc.ru

В данном сообщении рассматриваются некоторые обратные задачи, возникающие при исследовании процесса поперечных колебаний струнных решеток. Под струнной решеткой мы подразумеваем систему нескольких пересекающихся струн, скрепленных между собой в точках пересечения. Более подробно в докладе будут описаны обратные задачи для систем, состоящих всего из двух струн.

Ранее, в работе [1], была построена математическая модель данного процесса и исследовалась соответствующая прямая задача. В этой работе доказана теорема существования и единственности решения, для решения построены явные

формулы. Результаты, полученные в [1], позволили перейти к рассмотрению ряда обратных задач для системы двух струн. Более конкретно, мы предполагаем, что изначально система находится в покое, либо колеблется под воздействием известных начальных данных. При этом естественно считать, что лишь часть системы доступна для наблюдения. Предполагается, что в некоторый момент времени на эту часть системы воздействует внешний неизвестный источник и задача заключается в определении местоположения этого источника. В докладе будет представлен алгоритм решения данной обратной задачи, а также будут обсуждаться другие обратные задачи такого типа.

Список литературы

1. Коновалова Д.С. Неклассическая задача для процесса поперечных колебаний системы струн // Сибирский журнал индустриальной математики т.28, N1, 2025, с.35-44

Вероятностное прогнозирование динамики туберкулеза в регионах Российской Федерации

Криворотко О.И.^{1,2}, Неверов А.В.¹, Каминский Г.Д.^{2,3}, Шварц Я.Ш.⁴

¹НТУ «Сириус», Сочи, Россия

²ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

³ГУЗ «ТОКЦ по профилактике и борьбе со СПИД и ИЗ», Тула, Россия

⁴ФГБУ «Новосибирский НИИ туберкулеза» Минздрава России, Новосибирск, Россия
krivorotko.oi@talantiuspeh.ru

Несмотря на положительную динамику лечения туберкулеза (ТБ), возникновение устойчивых к лечению форм, а также ко-инфекции с другими социально-значимыми заболеваниями в последнее время растет. Для построения сценариев развития ТБ в регионах РФ требуется учитывать гетерогенность его распространения [1], а также большой процент множественно-лекарственно устойчивых форм ТБ (МЛУ-ТБ) в регионах РФ среди впервые выявленных.

На основе принципов передачи и выявления инфекции, отраженных в моделях Марчука Г.И. [2] и Романюхи А.А. [3] докладе предложена новая модель динамики туберкулеза с учетом МЛУ, учитывающая выявление инфицированных лиц с бактериовыделением (БК+) и без него (БК-). Модель является расширением модели 2018 года [4] и описывается системой девяти нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, объединенных законом действующих масс и контролируемых десятью эпидемиологическими параметрами (Рис. 1). Получены условия устойчивости равновесных состояний системы и проведен анализ идентифицируемости модели на основе чувствительности с использованием метода Соболя. Для получения распределения параметров модели, а также построения вероятностного прогноза с учетом неопределенности используется байесовский подход МСМС (Markov Chain Monte Carlo). Проведена валидация решений на исторических данных и получены сценарии распространения эпидемии ТБ в Новосибирской области и республике Тыва.

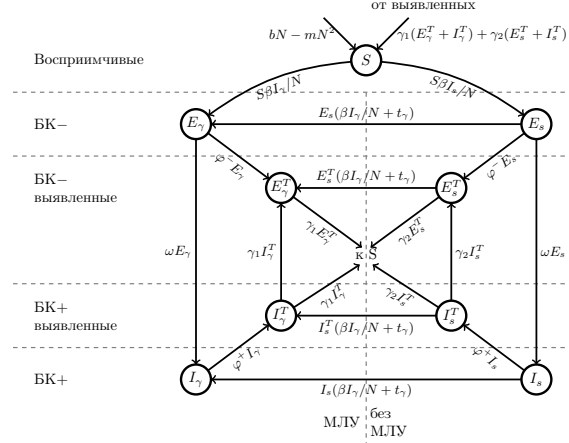


Рис. 1: Схема модели динамики туберкулеза, основанная на законе баланса масс.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002.

Список литературы

1. I. Meshkov, T. Petrenko, O. Keiser et al. Variations in tuberculosis prevalence, Russian Federation: a multivariate approach // Bull. World Health Organ. 2019, **97**(11):737-745.
2. M. Perelman, G. Marchuk, S. Borisov et al. Tuberculosis epidemiology in Russia: the mathematical model and data analysis // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2004, **19**:305-314.
3. K. Avilov, A. Romanukha, E. Belilovsky, S. Borisov. Mathematical modelling of the progression of active tuberculosis: Insights from fluorography data // Infect. Dis. Model. 2022, **7**:374-386.
4. Y. Yu, Y. Shi, W. Yao. Dynamic model of tuberculosis considering multi-drug resistance and their applications // Infect. Dis. Model. 2018, **3**:362-372.

Коэффициентные обратные задачи для псевогиперболического уравнения с нелокальными условиями

Курманбаева А.К.

Кыргызско-Российский Славянский университет им. Ельцина, Бишкек, Кыргызстан
ainura1971@mail.ru

В области $\Omega_T = \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим псевдогиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x, t), \quad (1)$$

с неизвестным коэффициентом $a(t)$, начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2)$$

и нелокальными граничными условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t), \quad u_x(\pi, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и условием переопределением

$$a(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) u(0, t) = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

Требуется определить пару функций $\{u(x, t), a(t)\}$.

Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений изучались многими авторами. Более подробную информацию можно найти в работе [1]. Справедлива

Теорема Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\phi \in C^2[0, \pi], \psi \in C^1[0, \pi], \mu_i(t) \in C^2[0, T], i = 1, 2, f \in C^{(1,0)}(\bar{\Omega}_T)$,
- 2) $\phi(0) = \phi(\pi), \psi(\pi) = \mu'_2(0)$.

Кроме того, пусть функция $\mu_3(t) \in C^2[0, T]$ и удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\mu_1''(t) \frac{\mu_3(t)}{\varphi'(0)} (\psi''(0) + \varphi'(0)) + f(0, 0), \quad \mu_2''(0) \frac{\mu_3(0)}{\varphi'(\pi)} (\psi''(\pi) + \varphi'(\pi)) + f(h, 0),$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)-(4).

Замечание. Аналогичным образом могут быть исследованы другие коэффициентные обратные задачи с другими нелокальными исследованиями.

Список литературы

1. Аблабеков Б.С., Асанов А.Р., Курманбаева А.К. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. // Бишкек, Илим, 2011, 156 с.

Обратные задачи определения ядра в псевдопараболическом уравнении

Аблабеков Б.С., Матанова К.Б

Кыргызский национальный университет имени Ж.Баласагына,

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Бишкек

ablabekov_63@mail.ru,

kalys.matanova@manas.edu.kg

В области $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ требуется найти функции $\{u(x, t), K(t)\}$, удовлетворяющие уравнению

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \int_0^t K(t-s) u_{xx}(x, s) ds + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

начальному, краевым и дополнительному условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$u(x_0, t) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x_0 \in (0, 1), \quad (4)$$

где $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $g(t)$ - заданные функции.

Обратная задача (1)-(4) исследуется методом интегральных уравнений Вольтерра [1, 2, 3]. с использованием функции Грина $G(x, \xi)$ первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения [4].

Список литературы

1. *Аблабеков Б.С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 180с.
2. *Аблабеков Б.С.* Интегральные уравнения Вольтера и их приложение. - Бишкек: ИЦ «Техник», 2009. - 148с.
3. *Асанов А., Матанова К.Б.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара, Иркутск-Северобайкальск, С. 30-35.
4. *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения. - М.: Наука, 1968. - 504 с.

Модель рационально-оптимистичной популяции в период вспышки эпидемии

Неверов А.В., Криворотько О.И.
НТУ «Сургут», Сочи, Россия
neverov.av@talantiuspeh.ru

В работе сформулирована модель эпидемии, основанная на камерном подходе SIR-модели [1] и теоретико-игровом подходе игр среднего поля (ИСП) [2].

В модели предполагается, что все люди (игроки) в популяции одинаково подвержены заболеванию, однако имеют различные начальные представления о мерах предосторожности во время вспышки эпидемии. Их *рациональность* заключается в оптимизации собственной "цены" за самоизоляцию и возможности заразиться. В то же время *оптимистичность* игроков заключается в ожидании, что предпринятых ими мер будет достаточно, следовательно они останутся здоровы вплоть до конца моделирования. Модель характеризуется системой уравнений типа Колмогорова-Фоккера-Планка и Гамильтона-Якоби-Беллмана, описывающие динамику распределения игроков и оптимальную стоимость их "игры", соответственно.

Для построенной модели проведены численные эксперименты для различных постановок функционала стоимости для игроков, приводящих к различному поведению игроков во время эпидемий и сценариям вспышки [3].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-10068).

Список литературы

1. Kermack, W.O., McKendrick, A.G. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics-I. // Proceedings of the Royal Society, 1927. №115A, С. 700-721.
 2. Lasry, JM., Lions, PL. Mean field games // Jpn. J. Math. 2007. №2. С. 229–260.
 3. Neverov A., Krivorotko O. Neural nets for modelling of scenarios and control of epidemics // First Conference of Mathematics of AI, 2025.
-

Идеи Г.И. Марчука и алгоритмы усвоения данных на основе ансамблей решений сопряжённых уравнений

Пененко А.В.

*ИБМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
aleks@ommgp.ssc.ru*

В работе [1] предложен подход к конструированию численных алгоритмов решения обратных задач, состоящий в получении для каждого элемента данных соотношения чувствительности на основе сопряженного уравнения с последующим объединением получившихся соотношений в систему. Функции чувствительности можно агрегировать в оператор чувствительности и решать полученное с его помощью семейство квазилинейных операторных уравнений алгоритмами типа Ньютона-Канторовича. Введение системы функций проектирования данных (извлечения характерных особенностей) позволяет контролировать размерность решаемых уравнений и фильтровать шум.

Мы развиваем подход на основе операторов чувствительности и ансамблей решений сопряжённых уравнений в приложении к многокомпонентным многомерным моделям процессов адвекции-диффузии-реакции. Благодаря ансамблевой структуре, алгоритмы естественным образом распараллеливаются. Это позволяет работать с трехмерными моделями переноса и трансформации примесей в реалистичных «городских» и «региональных» сценариях оценки качества воздуха по данным измерений [2]. При использовании соответствующих сопряженных уравнений можно работать с нелинейными операторами измерений, например, для анализа данных дистанционного зондирования [3]. Разработанные алгоритмы решения обратных задач применяются в качестве основы для решения задач усвоения данных, когда новые данные измерений поступают в ходе моделирования.

Операторы чувствительности позволяют оценивать информативность данных и также разрабатывать гибридные алгоритмы уточнения решений обратных задач, включающие методы машинного обучения. Для этого можно использовать априорную информацию о структуре функции источников и свойства оператора чувствительности обратной задачи, позволяющие оценить артефакты отображения «истинного» решения на результат его восстановления с соответствующей коррекцией [4].

Список литературы

1. *Марчук Г.И.* О постановке некоторых обратных задач // Доклады Академии Наук СССР / Изд. Наука. 1964. Т. 156, № 3. С. 503–5064.

2. *Penenko A. V., Antokhin P. N., Baklanov A. A., Penenko V. V.* Using a System of Models of Various Complexity in Inverse Modeling of the Pollutant Transport and Transformation in the Atmosphere // Russian Meteorology and Hydrology. 2025. vol. 50, № 6. pp. 482–4909 p.
3. *Penenko A. V., Penenko V. V., Tsvetova E. A.* Data Assimilation Algorithms for Atmospheric Chemistry Models // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2025. vol. 61, № 3. pp. 378–39013 p.
4. *Penenko A., Emelyanov M., Rusin E., Tsybenova E., Shablyko V.* Hybrid Deep Learning and Sensitivity Operator-Based Algorithm for Identification of Localized Emission Sources // Mathematics. MDPI AG, 2024. vol. 12, № 1. p. 781 p.

Обратные и некорректные задачи многолетней мерзлоты при потеплении климата

Пермяков П.П., Малышев А.В., Аммосов Г.С., Иванов Д.С., Винокурова Т.А.,
Попов Г.Г.

ИФТПС СО РАН, Якутск, Россия
permyakov2005@mail.ru

В настоящее время, в связи с потеплением климата, в криолитозоне остро стоят вопросы, которые связаны с обратными и некорректными задачами окружающей среды. Сезонное промерзание-протаивание грунтов, устойчивость и сохранность инженерных сооружений создают новые проблемы в этих условиях. Процесс протаивания многолетней мерзлоты, миграция воды и деформация грунта описывается системой уравнений [1], которая замыкается уравнением количества незамерзшей воды $W_{\text{нв}} = W_{\text{нв}}(T, W)$. При численном решении этой системы в криолитозоне столкнулись с неопределенностью теплофизических и массообменных характеристик промерзающих-протаивающих грунтов, а также с проблемой задания граничных условий влажности на фронте фазового перехода [2]. Исходные параметры (теплофизические, массообменные и напряженно-деформационные) зависят от состояния поровой воды грунта, связь осуществляется через функцию количества незамерзшей воды. Функция от температуры описывает реальный процесс промерзания-протаивания грунта, которая определяется параметрами дисперсности, засоленности, загрязнённости и давления грунта. Указанные параметры имеют вид: теплофизические: $\lambda(T, w, \rho) = \lambda_{\text{м}} - (\lambda_{\text{м}} - \lambda_{\text{т}}) \frac{W_{\text{нв}}(T) - w_{\text{пс}}}{w - w_{\text{пс}}}$, $c = c_{\text{эф}} = c_{\text{ск}} + c_{\text{л}}w + (c_{\text{в}} - c_{\text{л}})W_{\text{нв}}(T) + L \frac{\partial W_{\text{нв}}(T)}{\partial T}$; массообменные: $k_{\text{ф}}(T, P, w_{\text{в}}, w_{\text{л}}) = k_{\text{ф,т}}(T, P, W_{\text{в}}(T))e^{b \cdot w_{\text{л}}}$; параметры напряжения: $\mu_1(T) = \frac{E(T)}{2(1+v)}$, $\mu_2(T) = \frac{vE(T)}{(1+v)(1-2v)}$, $E(T) = \frac{E_{\text{л}}(\bar{w} - W_{\text{нв}}(T)) \frac{\rho_{\text{гп}}}{\rho_{\text{л}}} + E_{\text{гп}}}{(\bar{w} - W_{\text{нв}}(T)) \frac{\rho_{\text{гп}}}{\rho_{\text{л}}} + 1}$, где $\mu_1(T), \mu_2(T)$ – параметры Ламе; $E(T)$ – модуль упругости; v – коэффициент Пуассона; $\rho_{\text{гп}}, \rho_{\text{л}}, \rho_{\text{в}}$ – плотность грунта, льда, воды. Восстановление функции количества незамерзшей воды и коэффициента диффузии приведены в работе [1].

При потеплении климата с учетом и без учета инсоляции усиливается процесс протаивания грунта, увеличивается подвижность незамерзшей воды, который

сопровождается пучением и просадкой полотна железной дороги. Рассматриваются два сценария: в первом без изменения среднегодовой температуры воздуха равной минус 10 и втором – при потеплении климата на 4. В первом случае наблюдается процесс пучения полотна, что связано со стабилизацией температурного режима и многогодичной миграцией влаги к фронту промерзания. Во втором случае в первые годы (10 лет) проходит просадка за счет протаивания верхних слоев полотна, а в последующие годы (30 и 50 лет), наоборот, пучение за счет промерзания миграционной воды в нижнем слое. Численным моделированием установлено, что подземный трубопровод дважды в год меняет свое положение в моменты замерзания и оттаивания. Достоверность проверена методом планово-высотного измерения магистрального газопровода на участках со сложными деформациями. При формировании зимнего влажностного поля важную роль играют осенние дожди, которые усиливают подтягивание незамерзшей воды к фронту промерзания и образуют избыточное давление. За счет тепла, которое аккумулировалось в летние месяцы, в нижней части деятельного слоя грунта идет процесс протаивания. Совместное воздействие миграционных и паводковых вод формирует зону повышенной влажности, что на фоне низких температур приводит к термоабразии, размыву и разрушению берегов, негативно воздействуя на ПТС. Верификация параметров модели, используя современные методы решения некорректных задач, расширяет область численного расчета, повышает достоверность и точность моделирования [1, 2, 3].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №23-61-10032.

Список литературы

1. *Пермяков П.П.* Математическое моделирование негативных мерзлотных процессов. Новосибирск: СО РАН, 2023.
2. *Пермяков П.П.* Идентификация параметров математической модели теплогазопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
3. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.

Обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики

Романов В.Г.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
romanov@math.nsc.ru

Изучается обратная задача для уравнений электродинамики, в которых электрическая проводимость среды нелинейно зависит от электрического напряжения. Эта зависимость определяется семью финитными функциями трёх пространственных переменных. Обратная задача заключается в отыскании этих функций. Для этого рассматривается прямая задача о падении распространяющейся из бесконечности плоской волны, бегущей в некотором направлении

и падающей на неоднородность, отвечающую нелинейной проводимости, локализованной в шаре B . В качестве информации для решения обратной задачи, задаётся след решения прямой задачи на границе шара B для различных направлений падающей на B волны и для моментов времени близких к приходу фронта волны на границу B . Показано, что решение обратной задачи сводится к семи отдельным задачам. Одна из них является обычной задачей рентгеновской томографии, методы решения которой хорошо известны, 6 других задач подобны друг другу и являются задачами интегральной геометрии, они заключаются в отыскании функции через интегралы от неё по семействе всевозможных прямых линий с заданной весовой функцией. Последняя задача изучена и найдена оценка устойчивости её решения.

Реконструкция векторных полей в $\mathbb{R}^3$ по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона.

Светов И.Е., Полякова А.П.
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
svetovie@math.nsc.ru, apolyakova@math.nsc.ru

Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $(\xi \cdot x) - s = 0$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — единичный нормальный вектор плоскости, а s — расстояние (со знаком) от начала координат до плоскости. Пусть $\mathbf{e}^1 = (e_1^1, e_2^1, e_3^1)$, $\mathbf{e}^2 = (e_1^2, e_2^2, e_3^2)$ — единичные взаимно ортогональные векторы, компланарные плоскости $P_{s,\xi}$. Для вектора ξ также будет использоваться обозначение $\mathbf{e}^0$. Будем рассматривать обобщенные преобразования Радона $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ и $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, действующие на векторное поле $\mathbf{v}(x)$. Эти операторы задаются формулами

$$\mathcal{R}^k \mathbf{v}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}(x)) dx, \quad \mathcal{W}_l^k \mathbf{v}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} (x \cdot \mathbf{e}^l) (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}(x)) dx.$$

Оператор $\mathcal{R}^0$ называется *нормальным преобразованием Радона*, а $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2$ — *продольные преобразования Радона*. В отличие от $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ в определении операторов $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ в подынтегральном выражении присутствует вес $(x \cdot \mathbf{e}^l)$, поэтому они называются *весовыми преобразованиями Радона*.

В работе [1] предложен подход к восстановлению трёхмерного векторного поля, использующий в качестве исходной информации совместные измерения электромагнитных и акустических сигналов (магнитно-акусто-электрическая томография). Математической моделью таких измерений служат продольные и весовые преобразования Радона. Для решения задачи необходимы значения всех продольных и одного весового преобразования Радона. Алгоритм, предложенный в [2], направлен на полное восстановление векторного поля в $\mathbb{R}^n$. Для восстановления его потенциальной части необходимо опираться на результат предварительного восстановления соленоидальной части рассматриваемого векторного поля. В статье [3] предложен другой подход, позволяющий восстанавливать независимо каждую из частей векторного поля. Именно, с использованием

полученного детального разложения векторных полей установлены связи безвесовых $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ и весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, действующих на векторные поля, и преобразования Радона $\mathcal{R}$, действующего на функции. В частности, описаны ядра томографических интегральных операторов, действующих на векторные поля. Дополнительно показано, что векторное поле $\mathbf{v}$ может быть восстановлено по следующим наборам данных:

$$\{\mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}\}.$$

В докладе показано, что для полного восстановления векторного поля $\mathbf{v}$ можно рассматривать и другие варианты наборов исходных данных:

$$\{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}\}, \\ \{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}\}.$$

Предложены и численно реализованы алгоритмы по восстановлению векторного поля для всех перечисленных постановок задач векторной томографии. Вычислительные эксперименты показали хорошие результаты восстановления векторных полей.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Список литературы

1. *Kunyansky L.* A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography // Inverse Probl. 2012. V. 28, No. 3. 035002.
2. *Kunyansky L., McDugald E., Shearer B.* Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // Inverse Probl. 2023. V. 39, No. 6. 065014.
3. *Светов И. Е., Полякова А. П.* Восстановление трехмерных векторных полей по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 4. С. 125–142.

Решение обратной коэффициентной задачи для уравнений Сен-Венана с использованием физически-информированной нейронной сети

Стрижак С.В., Кошелев К.Б.

ИСП РАН, Москва, Россия

s.strihak@ispras.ru

Изучение процессов в гидроканалах является актуальной задачей в связи с изучением паводков, наводнений на реках и изучением процессов мелиорации плодородных земель. Частью цифровых двойников природно-технических систем могут быть нейронные сети, которые позволяют ускорить процесс вычислений в режиме реального времени. В данной работе рассматривается возможность

использования физически-информированной нейронной сети (PINN) для решения прямой и обратной задачи в области изучения гидрологических процессов в гидроканале с заданной топографией дна. Для гидроканала задается длина, $L = 1000$ метров, ширина, $B = 10$ метров. Поверхность дна задается аналитической формулой в зависимости от двух координат.

В результате формулируется краевая задача о течение воды в двухмерном канале с заданным расходом на входе и уровнем воды на выходе. Процесс движения жидкости описывается с помощью математической модели в основе которой содержится решение уравнений по теории мелкой воды (уравнений Сен-Венана). Исходные уравнения решаются с помощью конечно-разностного метода на заданной сетке. В ходе моделирования для прямой задачи определяются две компоненты скорости и уровень поверхности воды в гидроканале. Полученные исходные данные в расчетном коде Delft3D используются для обучения полносвязной нейронной сети, которая содержит входной слой для задания положения точек коллокации в расчетной области, скрытые слои с заданным количеством нейронов, выходной слой для предсказания двух компонент скорости и уровня поверхности воды. Обратная задача формулируется и решается с целью предсказания значения коэффициента шероховатости дна канала с использованием PINN. Предварительно задается приближенное значения коэффициента шероховатости. На вход нейронной сети подаются, рассчитанные значения скорости и уровня поверхности воды при разных расходах (50, 100, 200 м³/с). Вычисление в коде Delft3D искомых величин занимает около 2 минут. Дополнительно было изучено влияние гиперпараметров PINN на качество предсказания. В ходе исследования варьировалось количество точек коллокации в расчетной области, значение коэффициента для скорости обучения. Обучение модели PINN выполнялось на сервере с Nvidia GPU A100 объемом 40 ГБ. Один типичный процесс обучения для выбранной архитектуры нейронной сети занимает от 2,5 до 3,5 часов, а процесс предсказания исследуемых параметров - 5-10 секунд. По результатам предсказания PINN проведена оценка для абсолютной величины ошибки. Ошибка прогнозирования значения коэффициента шероховатости для обратной задачи не превышала 10%.

Разрешимость в пространствах Гёльдера обратной задачи о хаотичной динамике полимерной молекулы

Фоменко А.С.¹, Старовойтов В.Н.²

¹НГУ, Новосибирск, Россия

²ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, Россия

as.fomenko1@gmail.com

Рассматривается обратная задача для квазилинейного параболического уравнения с частными производными. Уравнение содержит нелокальный по времени член, включающий интеграл от решения по всему временному интервалу, на котором рассматривается задача. Такие уравнения возникают при описании хаотической динамики полимерной молекулы (цепочки) в жидкости [1]. Искомая функция представляет собой плотность вероятности того, что указанное звено

цепочки находится в заданной точке пространства. По этой причине возникает естественное условие переопределение, заключающееся в том, что пространственный интеграл от решения равен единице. Роль времени играет параметр длины дуги вдоль полимерной цепочки. Нелокальность по времени присутствует в аргументе так называемого потенциала взаимодействия. Ее возникновение обусловлено тем, что на движение каждого звена цепи влияют все остальные звенья через окружающую жидкость. Доказана разрешимость задачи в пространствах Гельдера в случае ограниченного потенциала взаимодействия. Более того, установлена разрешимость и в случае неограниченного потенциала с определенными ограничениями на его поведение на некотором конечном интервале.

Список литературы

1. V. N. Starovoitov, B. N. Starovoitova, Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design, Journal of Physics: Conference series, **894** (2017), 012088.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012088>

Решение одной обратной задачи химического равновесия

Хамисов О.В., Донской И.Г.
 ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия
 khamisov@isem.irk.ru

Рассматривается следующая задача параметрической оптимизации, соответствующая нахождению равновесия веществ в газовой среде,

$$f(x, T, P) = \sum_{j=1}^n \left[\mu_j^0(T) + RT \ln \left(\frac{Px_j}{\sigma(x)} \right) \right] x_j \rightarrow \min_x, \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0, \quad (3)$$

T — температура, P — давление, R — универсальная газовая постоянная, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор количеств молей реагирующих веществ, A — $m \times n$ матрица содержания элементов в веществах, $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор количеств молей элементов,

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Элементы матрицы A неотрицательны, матрица A не содержит нулевых столбцов, элементы вектора b положительны. Функции $\mu_j^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ — непрерывно дифференцируемые функции, представимые в виде разности двух выпуклых функций. Параметры T и P варьируются в заданных пределах, $T \in [\underline{T}, \bar{T}]$, $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$. Целевая функция задачи (1)-(3) — строго выпуклая

функция переменной x , поэтому решение $x^*(T, P)$ этой задачи единственно. Задано целевое множество

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_j \leq \bar{x}_j, j \in \bar{J}, x_j \geq \underline{x}_j, j \in \underline{J}\},$$

$\bar{J}, \underline{J} \subset \{1, \dots, n\}$. Требуется определить параметры $\hat{T} \in [\underline{T}, \bar{T}]$, $\hat{P} \in [\underline{P}, \bar{P}]$, при которых $x^*(\hat{T}, \hat{P}) \in D$ или установить, что таких параметров в заданных пределах не существует.

Для решения поставленной обратной задачи используется аппарат нелинейных опорных функций, ранее использованный для решения задач выпуклой параметрической оптимизации [1]. Приводятся результаты численных экспериментов.

Список литературы

1. Хамисов О. В. Оптимизации функции оптимального значения в задачах выпуклого параметрического программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 3. С. 247–260.

Об определении тензора модулей упругости в некоэрцитивных краевых задачах

Хлуднев А.М.

ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, Россия

khlud@hydro.nsc.ru

В докладе анализируются задачи идентификации тензора модулей упругости с инкорпорированными тонкими упругими и жёсткими включениями в некоэрцитивном случае. Предполагается, что включения отслаиваются от окружающего упругого тела, образуя межфазные трещины. На берегах трещин рассматриваются граничные условия типа неравенств, обеспечивающие взаимное непроникание противоположных берегов. Рассматриваемые обратные задачи характеризуются неизвестным полем перемещений и неизвестным тензором модулей упругости. Формулировка задач идентификации включает дополнительную информацию, которая может быть получена путем измерений. Доказано существование решения этих задач [1].

Список литературы

1. Хлуднев А.М., Rodionov A.A. Elasticity tensor identification in elastic body with thin inclusions: non-coercive case // J. Opt. Theory Appl. 2023. v. 197. No. 3, P. 993-1010 .

Решение обратной задачи геоэлектрики на основе физически информированных нейронных сетей

Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А.

¹МГРИ, Москва, Россия, ²НИИЯФ МГУ, Москва, Россия

shimelevich-m@yandex.ru

В настоящее время нейронные сети успешно применяются для решения обратных задач геофизики. НС подход выгодно отличается от классического Тихоновского тем, что «плохая» нелинейная оптимизационная задача построения (обучения) *НС аппроксиматора (являющегося приближённым обратным оператором задачи)* решается один раз в заданном классе сред на основе заранее построенного *множества опорных решений задачи*; обученный НС аппроксиматор позволяет формализовано в режиме реального времени без задания первого приближения находить решение обратной задачи в заданном классе сред за первые десятки секунд на персональном компьютере.

Для реальных нелинейных обратных 2D–3D задач геоэлектрики приходится строить достаточно сложные нейронные сети, которые изначально учитывают свойственную решаемой задаче физику проблемы [1]. При этом применяется принцип декомпозиции и вводится понятие локального НС аппроксиматора. Позднее сети, адаптированные к физике задачи, стали называть физически информированными нейронными сетями – ФИНС (PINN – physics-informed neural network). Термин PINN был введён Raissi в 2017 г. [4], там же были представлены примеры построения ФИНС для решения прямых и обратных задач математической физики.

Современная авторская версия НС метода реализована в архитектуре сверточной ФИНС CNN.INV [2, 3], адаптированной к особенностям электромагнитных полей, применяемых в геоэлектрике.

Развитие концепции ФИНС позволяет создавать НС-архитектуры, которые сочетают высокую вычислительную эффективность, устойчивость к шуму и физическую согласованность решений.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00266,

<https://rscf.ru/project/24-11-00266/>.

Список литературы

1. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. 2009. № 12. С. 22–38.
2. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Нейросетевая 3D инверсия полевых данных геоэлектрики с расчётом апостериорных оценок // Физика Земли. 2022. № 5. С. 3–13.
3. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Применение нейросетей сверточного типа в обратных задачах геоэлектрики // Физика Земли. 2025. № 1. С. 88–102.

4. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Deep learning based on physics (Part I): data-driven solution of nonlinear partial differential equations // arXiv preprint arXiv:1711.10561 [cs.AI]. 2017. 28 November.
-

О решении обратных задач динамики при помощи нейродифференциальных уравнений

Шорохов С.Г.

РУДН им. П. Лумумбы, Москва, Россия

shorokhov-sg@rudn.ru

Под обратными задачами динамики [1] понимают задачи определения правых частей систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), при которых движение с заданными свойствами, например, движение по заданной траектории, является одним из возможных движений рассматриваемой динамической системы. Эффективным инструментом решения обратных задач динамики является метод построения дифференциальных уравнений с заданным интегральным многообразием, предложенный Н.П. Еругиным [2]. В этом методе свойства движения задаются аналитическими формулами, а решения обратных задач (правые части систем ОДУ) также получают в виде точных аналитических выражений, содержащих произвольные функции.

В нейродифференциальных уравнениях [3] также решается задача построения правых частей систем ОДУ по заданной траектории, однако здесь траектория движения определяется не точной формулой, а конечным набором точек траектории для различных моментов времени, и решение обратной задачи строится не в аналитическом виде, а как аппроксимация нейронной сетью какой-либо архитектуры.

В докладе сравниваются подходы к решению обратных задач динамики на основе метода построения систем ОДУ по заданному интегральному многообразию и метода нейродифференциальных уравнений. Приводится алгоритм обучения нейронной сети, входящей в состав системы нейродифференциальных уравнений, по заданному набору точек траектории. Для заданной плоской кривой производится аналитическое построение системы ОДУ, допускающей движение по этой кривой, затем для выведенной системы ОДУ при помощи численных методов строится набор точек для обучения нейронной сети и, наконец, по полученному обучающему набору данных производится обучение системы нейродифференциальных уравнений. Оцениваются показатели качества обученной модели нейродифференциальных уравнений. Обсуждаются возможности совместного применения метода построения систем ОДУ по заданному интегральному многообразию и нейродифференциальных уравнений при решении обратных задач.

Список литературы

1. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 16. № 6. С. 659-670.

3. *Chen R.T.Q., Rubanova Y., Bettencourt J., Duvenaud D.* Neural ordinary differential equations / in: Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'18). Curran Associates Inc., 2018. P. 6572–6583.

One-dimensional inverse problem for wave equation

Romanov V.G., Bugueva T.V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

bugueva@math.nsc.ru

We consider wave equation with inhomogeneity $\sigma(x)u_t^m + q(x)u^p$, $m > 1$, $p > 1$, and study a forward and an one-dimensional inverse problems for this equation.

Let T be a real positive number.

A forward problem. Determine the function $u(x, t)$ satisfying the relations

$$u_{tt} - u_{xx} - \sigma(x)u_t^m - q(x)u^p = 0, \quad x > 0, \quad t \in (0, T]; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad (3)$$

where $\sigma(x)$ and $q(x)$ are continuous functions; $m > 1$ and $p > 1$ are real numbers; $f(t)$ is the twice continuously differentiable function and $f(0) = a > 0$, $f'(0) = b > 0$, a, b are some constants.

An inverse problem. Let $f_k(t)$, $k = 1, 2$, be the given functions and $f_k(0) = a_k > 0$, $f'_k(0) = b_k$, $k = 1, 2$, numbers a_k and b_k satisfy the condition $a_1^p b_2^m - a_2^p b_1^m \neq 0$. The solution of the forward problem (1)–(3) for $f = f_k$, $k = 1, 2$ denote $u^k(x, t)$, $k = 1, 2$. Find the functions $\sigma(x)$ and $q(x)$ from the given information about solutions $u^k(x, t)$:

$$u_x^k|_{x=0} = h_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Conditions for the unique solvability of the forward problem are found. For the inverse problem a local existence and uniqueness theorems are established. Both theorems for forward and inverse problems are new in the theory of inverse problems (see paper [1]).

The work is done within framework of state contract of Sobolev institute of Mathematics (project FWNF-2022-0009).

References

1. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An one-dimensional inverse problem for the wave equation // *Euras. J. Math. Comput. Appl.* 2024. V. 12. No. 3. P. 135–162.

Solving Nonlinear Schrödinger Equations Using Improved Physics-Informed Neural Networks

Liu Shuang

Novosibirsk State University), Novosibirsk, Russia

liushusng1118@mail.ru

This paper proposes an innovative Physics-Informed Neural Network (PINN) architecture that integrates adaptive activation functions and Latin Hypercube Sampling, significantly enhancing the efficiency of solving complex mathematical-physical problems [1]. The improved framework has been successfully applied to solve the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, accurately simulating the propagation dynamics of optical pulses in nonlinear media and capturing their evolution across spatial and temporal scales [2].

The enhanced PINN demonstrates superior convergence and computational efficiency. The stable reduction in loss indicates its effectiveness in learning physical laws and performing data fitting. Key innovations include: physics-constrained layers that ensure compliance with fundamental physical principles; a multi-objective loss function for balancing constraints; and efficient computation for high-dimensional problems. This work provides a powerful tool for modeling optical pulse transmission, studying soliton dynamics, and simulating wave propagation [3].

References

1. *Liu S., Luan Z., Kabanikhin S. I., Strijhak S. V., Zhang Y.* Solving A Type of Nonlinear Schrödinger Equations Using A Physically Informed Neural Network And Tuning The Adaptive Activation Function // TWMS J. Pure Appl. Math. 2024. V. 15, no. 2. P. 203–227.
2. *Agrawal G. P.* Nonlinear fiber optics // Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century. Springer, 2000. P. 195–211.
3. *Song Y., Zhang M., Jiang X., Zhang F., Ju C., Huang S., Lau A. P. T., Wang D.* Srs-net: a universal framework for solving stimulated raman scattering in nonlinear fiber-optic systems by physics-informed deep learning // Commun. Eng. 2024. V. 3, no. 1. P. 109.

Application of asymptotic solutions in full-wave inversion

Protasov M.I., Neklyudov D.A., Shtein A.D., Dmitrachkov D.K.

Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

protasovmi@ipgg.sbras.ru

The computational cost of seismic data modeling for a typical acquisition system can be substantial, estimated at approximately 108 core-hours when performed on central processing units (CPUs). These estimates are for an isotropic elastic medium; as geological models increase in complexity, the demand for computational resources grows significantly. Consequently, developing efficient numerical methods for seismic wavefield modeling and accelerating these algorithms is an urgent task.

Asymptotic methods operate much faster than those based on finite differences or finite elements, which are commonly used in most inversion algorithms. A key advantage of asymptotic solutions is their applicability to acoustic, isotropic and anisotropic, and viscoelastic media. This allows them to account for complex geological features [1] without a corresponding increase in computational cost. It is important to note, however, that solutions obtained through asymptotic methods differ from those derived from classical approaches to solving the wave equation.

This paper investigates the application of an asymptotic solution to the Helmholtz equation for full-waveform inversion (FWI) [2] in a two-dimensional, frequency-domain formulation [3]. The study is conducted using a series of synthetic models and validated on real marine seismic data.

The work is supported by RSF grant 21-71-20002-.

References

1. *Lomax, A.* The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures// *Geophys. J. Int.* 1994. V. 117. P. 313–334.
 2. *Tarantola A.* Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation// *Geophysics* 1984. V. 49. P. 1259–1266.
 3. *Pratt, R.G.* Seismic waveform inversion in the frequency domain, part 1: Theory and verification in a physical scale model// *Geophysics* 1999. V. 64. P. 888–901.
-

Inverse kinematic problem using Chebyshev polynomials

Protasov M.I., Neklyudov D.A.

Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
protasovmi@ipgg.sbras.ru

The tasks of coal seam monitoring and cross-well tomography are inherently three-dimensional. This is because excitation and recording systems are often not confined to a single plane, and detailed geological models (such as those of a coal seam) contain intrinsically three-dimensional contrasting boundaries. Conversely, the velocity variations within these boundaries and the relief of the boundaries themselves can often be accurately described by polynomial functions.

This paper employs a tomographic approach based on representing the velocity model with Chebyshev polynomials [1]. This parameterization significantly reduces the number of unknown parameters compared to standard grid-based representations. This reduction ultimately leads to a more reliable and stable solution to the tomographic problem, which is crucial when working with limited seismic data.

Performing tomography requires two-point ray tracing in three-dimensional models. For 3D problems, the bending method [2] proves to be a much more effective solution for two-point tracing than the shooting method. However, a classical implementation of the bending method does not account for the limited spectrum of the probing signal, which often results in non-physical ray paths and travel times. This paper uses an approach [3] that partially resolves this issue without incurring excessive computational costs.

The tomography method was tested on realistic synthetic data generated from laboratory coal test data. The input information consisted of the recorded first-arrival times of seismic waves measured in a drift along the mined layer. The paper also presents testing results for a realistic cross-well scanning scenario.

The work is supported by RSF grant 21-71-20002-.

References

1. Neklyudov D.A., Protasov M.I. "Wave"ray tracing for three-dimensional cross-well tomography// Seismic exploration technologies 2016. V. 2. P. 32–38. (in Russian)
2. Julian B.R., Gubbins D. Three-dimensional seismic ray tracing// Journal of Geophysical Research 1977. V. 43. P. 95–113.
3. Bube K.P., Washbourne J.K. Wave tracing: ray tracing for the propagation of band-limited signals: Part 1- Theory// Geophysics 2008. V. 73. P. VE377–VE384.

The group behaviour analysis of the high-frequency traders based on Mean Field Games approach

Egorov L.V., Trusov N.V.

*Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of
Sciences, Moscow, 119333 Russia
trunick.10.96@gmail.ru*

The impact of the large amount of HFTs can be modelled via mean field term. A Mean Field Game is a coupled system of PDEs: a Kolmogorov–Fokker–Planck equation, evolving forward in time and describing evolution of the HFTs probability density function spread by the amount of asset shares; and a Hamilton–Jacobi–Bellman equation, evolving backwards in time and defining the strategy of the HFTs. These equations form a boundary value problem. We consider the model of the HFTs' behavior in the stock market with reference to [1]. A coupling condition of this system is $\alpha = \frac{1}{2k} \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} m \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \lambda (x - \tilde{a}(t))^2 = -V(m), \\ m(0, x) = m_0(x), \\ u(T, x) = -\theta(x - a)^2, \end{cases}$$

where $m(t, x)$ is a probability density function of HFTs, $x(t) \in \mathbb{R}$ is the amount of asset shares held by HFT at time $t \in [0, T]$, $\tilde{a}(t) \in \mathbb{R}$ is a turnpike function, $k > 0$, $\lambda > 0$, $\theta > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Let $V(m) = \ln m$, $m_0(x)$ be the Gaussian probability distribution with mean $\mu_0 \in \mathbb{R}$ and dispersion $\delta_0 > 0$, i.e.

$$m_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_0^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_0^2} (x - \mu_0)^2 \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

then the solution of the system of PDEs is

$$u(t, x) = C_0(t) + C_1(t)x + C_2(t)x^2, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

$$m(t, x) = \exp [D_0(t) + D_1(t)x + D_2(t)x^2], \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

where the functions $D_0(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ are defined as Riccati-type ODEs:

$$\begin{cases} \dot{D}_0 = -\frac{1}{2k}C_1D_1 - \frac{1}{k}C_2 + \frac{\sigma^2}{2}D_1^2 + \sigma^2D_2, & D_0(0) = -\frac{\mu_0^2}{2\delta_0^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\delta_0^2), \\ \dot{D}_1 = -\frac{1}{k}C_1D_2 - \frac{1}{k}C_2D_1 + 2\sigma^2D_1D_2, & D_1(0) = \frac{\mu_0}{\delta_0^2}, \\ \dot{D}_2 = -\frac{2}{k}C_2D_2 + 2\sigma^2D_2^2, & D_2(0) = -\frac{1}{2\delta_0^2}, \\ \dot{C}_0 = -\frac{1}{4k}C_1^2 - \sigma^2C_2 - D_0 + \lambda\tilde{a}^2, & C_0(T) = -a^2\theta, \\ \dot{C}_1 = -\frac{1}{k}C_1C_2 - D_1 - 2\lambda\tilde{a}, & C_1(T) = 2a\theta, \\ \dot{C}_2 = -\frac{1}{k}C_2^2 - D_2 + \lambda, & C_2(T) = -\theta. \end{cases} \quad (1)$$

This is an extension of the ODEs presented in [1].

The asset share price is based on the geometric Brownian motion that is used to model stock prices in the Black–Scholes model in mathematical finance. We suppose that the asset price $S(t)$ satisfies the following ODE:

$$\dot{S} = S\eta(M(t) + f(t)), \quad (2)$$

where $\eta > 0$, $M(t) = C_1(t) - C_2(t)\frac{D_1(t)}{D_2(t)}$ is the influence of the HFTs, $f(t)$ is the influence of the professional traders.

Denote by $\tilde{S}(t)$ the statistic asset price. We pose an inverse problem of finding such turnpike function $\tilde{a}(t)$ of the HFTs that would reproduce the statistic asset price:

$$J = \int_0^T \left(\tilde{S}(t) - S(t) \right)^2 dt \rightarrow \min_{\tilde{a}} \quad (3)$$

To do this, we apply the Pontryagin maximum principle to the problem (1)-(3). With it help we construct an optimal control synthesis:

$$\tilde{a}(t) = \frac{1}{2k\eta} \ln \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(0)} - \frac{1}{2k} \int_0^t f(\tau) d\tau + \mu_0 + \frac{1}{2\lambda} \dot{f}(t) - \frac{1}{2\lambda\eta} \frac{d^2 \left(\ln \tilde{S}(t) \right)}{dt^2}.$$

To satisfy the optimal control conditions, the initial and the terminal conditions of Riccati-type ODEs (1), the following expression on the parameters should be true:

$$\mu_0 - a + \frac{1}{2k\eta} \ln \frac{\tilde{S}(T)}{\tilde{S}(0)} + \frac{1}{2\eta\theta} \frac{\dot{\tilde{S}}(T)}{\tilde{S}(T)} - \frac{1}{2\theta} f(T) - \frac{1}{2k} \int_0^T f(\tau) d\tau = 0.$$

We apply the Mean Field Games approach to describe the Chinese stock market crash in 2015. The HFTs wanted to make profit through the transactions. The behavior of the professional traders can be described as the behavior of one rational representative trader. We solve an inverse problem of reproducing the asset price and explain the strategies of the HFTs and the professional traders in the stock market during the Chinese stock market crisis in 2015.

References

1. *Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F.* "A trading execution model based on mean field games and optimal control Appl. Math. 5, 3091-3116 (2014).

Список авторов

- Абдукаримов Фарход
Абдулхакимович, 1
Аблабеков Бактыбай Сапарбекович, 2, 20
Аблабекова Асел Бактыбаевна, 2
Аниконов Дмитрий Сергеевич, 3
Баканов Галитдин Баканович, 4
Бериков Владимир Борисович, 6
Бугуева Татьяна Владимировна, 31
Васильев Василий Иванович, 6
Васин Владимир Васильевич, 7
Воронин Анатолий Федорович, 8
Гайнова Ирина Алексеевна, 7
Донской Игорь Геннадьевич, 28
Егоров Лев Владимирович, 36
Ерохин Владимир Иванович, 10
Зоркальцев Валерий Иванович, 13
Зубов Владимир Иванович, 13
Искаков Казизат Такуадинович, 11, 15
Кабанихин Сергей Игоревич, 4
Казанцев Сергей Гаврилович, 16
Каминский Григорий Дмитриевич, 18
Кардаков Виктор Борисович, 16
Кардашевский Анатолий Михайлович, 6
Князев Александр Сергеевич, 13
Кожанов Александр Иванович, 16
Коновалова Дина Сергеевна, 17
Кошелев Константин Борисович, 26
Криворотько Ольга Игоревна, 18, 21
Курманбаева Айнура Кудайбергеновна, 19
Лю Шуан, 32
Матанова Калыскан Базарбаевна, 20
Неверов Андрей Вячеславович, 18, 21
Оборнев Евгений Александрович, 30
Оборнев Иван Евгеньевич, 30
Пененко Алексей Владимирович, 22
Пермяков Петр Петрович, 23
Полякова Анна Петровна, 25
Протасов Максим Игоревич, 33, 34
Родионов Евгений Анатольевич, 30
Романов Владимир Гаврилович, 24, 31
Светов Иван Евгеньевич, 25
Старовойтов Виктор Николаевич, 1, 27
Стрижак Сергей Владимирович, 26
Тамасян Григорий Шаликович, 10
Титова Анастасия Афанасьевна, 1
Трусов Николай Всеволодович, 36
Фоменко Андрей Сергеевич, 27
Хамисов Олег Валерьевич, 28
Хлуднев Александр Михайлович, 28
Шварц Яков Шмульевич, 18
Шимелевич Михаил Ильич, 30
Шишленин Максим Александрович, 4
Шорохов Сергей Геннадьевич, 31