

Реконструкция векторных полей в $\mathbb{R}^3$ по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона.

Светов И.Е., Полякова А.П.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
svetovie@math.nsc.ru, apolyakova@math.nsc.ru

Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $(\xi \cdot x) - s = 0$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — единичный нормальный вектор плоскости, а s — расстояние (со знаком) от начала координат до плоскости. Пусть $\mathbf{e}^1 = (e_1^1, e_2^1, e_3^1)$, $\mathbf{e}^2 = (e_1^2, e_2^2, e_3^2)$ — единичные взаимно ортогональные векторы, компланарные плоскости $P_{s,\xi}$. Для вектора ξ также будет использоваться обозначение $\mathbf{e}^0$. Будем рассматривать обобщенные преобразования Радона $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ и $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, действующие на векторное поле $\mathbf{v}(x)$. Эти операторы задаются формулами

$$\mathcal{R}^k \mathbf{v}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}(x)) dx, \quad \mathcal{W}_l^k \mathbf{v}(s, \xi) = \int_{P_{s,\xi}} (x \cdot \mathbf{e}^l) (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}(x)) dx.$$

Оператор $\mathcal{R}^0$ называется *нормальным преобразованием Радона*, а $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2$ — *продольные преобразования Радона*. В отличие от $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ в определении операторов $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ в подынтегральном выражении присутствует вес $(x \cdot \mathbf{e}^l)$, поэтому они называются *весовыми преобразованиями Радона*.

В работе [1] предложен подход к восстановлению трёхмерного векторного поля, использующий в качестве исходной информации совместные измерения электромагнитных и акустических сигналов (магнитно-акусто-электрическая томография). Математической моделью таких измерений служат продольные и весовые преобразования Радона. Для решения задачи необходимы значения всех продольных и одного весового преобразования Радона. Алгоритм, предложенный в [2], направлен на полное восстановление векторного поля в $\mathbb{R}^n$. Для восстановления его потенциальной части необходимо опираться на результат предварительного восстановления соленоидальной части рассматриваемого векторного поля. В статье [3] предложен другой подход, позволяющий восстанавливать независимо каждую из частей векторного поля. Именно, с использованием полученного детального разложения векторных полей установлены связи безвесовых $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$ и весовых преобразований Радона $\mathcal{W}_l^k$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, действующих на векторные поля, и преобразования Радона $\mathcal{R}$, действующего на функции. В частности, описаны ядра томографических интегральных операторов, действующих на векторные поля. Дополнительно показано, что векторное поле $\mathbf{v}$ может быть восстановлено по следующим наборам данных:

$$\{\mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}\}.$$

В докладе показано, что для полного восстановления векторного поля $\mathbf{v}$ можно рассматривать и другие варианты наборов исходных данных:

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^1 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \\ &\{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^2 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}, \quad \{\mathcal{R}^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_2^0 \mathbf{v}, \mathcal{W}_1^1 \mathbf{v}\}. \end{aligned}$$

Предложены и численно реализованы алгоритмы по восстановлению векторного поля для всех перечисленных постановок задач векторной томографии. Вычислительные эксперименты показали хорошие результаты восстановления векторных полей.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Список литературы

1. Kunyansky L. A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography // Inverse Probl. 2012. V. 28, No. 3. 035002.
2. Kunyansky L., McDugald E., Shearer B. Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // Inverse Probl. 2023. V. 39, No. 6. 065014.
3. Светов И. Е., Полякова А. П. Восстановление трехмерных векторных полей по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 4. С. 125–142.