Численная модель геологических течений в приближении слабосжимаемой жидкости *

Г.Г. Лазарева
ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: lazareva@ssd.sscc.ru

Представлена новая нестационарная модель геодинамических течений в приближении слабосжимаемой жидкости. Модель строилась для нахождения параметров процесса плавления и диапиризма в нижней коре, определении структуры течения всплывающей гранитной магмы и предсказании возможной формы гранитогнейсовых диапировых тел. Исследование эволюции гравитационно-неустойчивых систем в Земле является одной из актуальных задач геодинамики. Решение этой задачи связано с чрезвычайно важной проблемой эндогенной геологии - анализом процессов тепломассопереноса в земной коре. Проблема устойчивости или перераспределения вещества и энергии в недрах Земли в настоящее время изучается в рамках равновесной термодинамики или неизотермической механики сплошной среды. Один из возможных плодотворных подходов состоит в том, что если рассматривать вещество земной коры как сплошную среду, то при изучении процессов деформации в геологическом времени можно с некоторыми ограничениями использовать законы сохранения для вязкого материала. Среди эндогенных механизмов переноса вещества в земной коре и верхней мантии определяющее место занимают движения, причинами которых является гравитационная неустойчивость и тепловые потоки. Эти процессы в земной коре проявляются в разных геологических ситуациях и в разном масштабе.

Традиционно прямое численное моделирование процессов в недрах земли основано на решении уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [1]-[4]. К решению уравнений, записанных в переменных вихрь-функция тока, применяются как конечно-разностный методы, так и метод конечных элементов. В геодинамике приближение Обербека-Буссинеска является достаточно общепринятым и его применение обоснованным [5]-[6] для случая малых изменений плотности. Модели, основанные на приближении Обербека-Буссинеска, используются при решении задач о конвекции в мантии, где рассматривается только изменение плотности вследствие теплового расширения (около 30 кг/м3). В рассматриваемой задаче учитываются скачки плотности из-за фазовых переходов при плавлении, что составляет до 350 кг/м3, т.е. на порядок больше. Поэтому предпринята попытка создания модели в приближении слабосжимаемой жидкости. Модель основана на решении полной системы уравнений Навье-Стокса с учетом переменной вязкости, дополненной нелинейным уравнением состояния. Для улучшения сходимости построенной численной модели при малых числах Маха использован метод предобуславливания.

*Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 2.

1. Численная модель

Рассмотрим систему уравнений, описывающую динамику слабосжимаемой жидкости, замкнутую уравнением состояния:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} grad(-p + \eta \nabla \cdot \mathbf{u}) - g e_y,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T = k \triangle T.$$

Уравнение состояние является прямым следствием выражения для плотности $\rho = \rho_0(1 - \alpha T + \beta(p - p_0))$:

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta}(\frac{\rho}{\rho_0} + \alpha T - 1),$$

где ρ - плотность, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ - вектор скорости, T - температура, p - давление, η - вязкость, g - ускорение свободного падения, k - температуропроводность.

Характерные значения переменных задачи: $L_0 = 10^3$ м, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $T_0 = 550^o$ C, $p_0 = 10^5$ Па, $k = 10^{-6}$ м^2 /сек, $t_0 = L_0/k$, $u_0 = L_0/t_0$, $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ $1/C^o$, $\beta = 10^{-11}$ 1/Па. В модели использована функция зависимости коэффициента вязкости от температуры, основанная на экспериментальных данных, вида: $\eta = A \cdot \exp(\frac{E}{RnT})$ где $A = 1.2 \cdot 10^{17}$, $E = 1.34 \cdot 10^5$, $n = 2.6$ - экспериментальные данные, R - универсальная газовая постоянная. В рассматриваемой постановке задачи значения коэффициента вязкости находятся в диапазоне $\eta = 10^{20} \div 10^{27}$ Па/с, следовательно, в областях активного движения среды $Pr = 10^{23}$, $Ra = 4.5 \cdot 10^{-3}$.

Выбор модели слабосжимаемой жидкости определяется как желанием использовать более полную модель процесса с учетом скачков плотности, вызванных фазовыми переходами при плавлении, так и возможностью создания численной технологии решения с привлечением хорошо апробированных конечно-разностных схем. Известен [7] критерий применимости классической модели Обербека-Буссинеска для описания тепловой гравитационной конвекции. Если параметр $\xi = \frac{gL^2\rho}{\eta k}$ имеет порядок меньший или равный единице, то модель Обербека-Буссинеска не применима. Величина ξ характеризует относительный вклад факторов плавучести и объемного расширения жидкости в формирование поля скоростей. В рассматриваемом случае параметр ξ принимает значения не более, чем 10^{-7}.

При небольших характерных скоростях геодинамических процессов (несколько сантиметров за миллион лет) для такого типа задач характерна высокая скорость звука и малое число Маха:

$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho_0}} = 10^4$ м/с, $M = \frac{v_0}{c} = 10^{-13}$.

Геодинамика рассматривает очень медленные течения, поэтому в теории ранее не использовалось число Маха, в отличие от сейсмологии и других разделов геофизики. Формально вычислив число Маха, можно обратиться к опыту вычислений в области существенно дозвуковых течений.

Известно, что в этом случае численное интегрирование полной системы уравнений Навье-Стокса является весьма сложной и трудоемкой вычислительной задачей, требующей для своего решения разработки специальных конечно-разностных схем и численных алгоритмов. Причем проблема разработки эффективных методов численного моделирования дозвуковых течений вязких газов [8] на основе полной системы уравнений Навье-Стокса связана именно с решением внутренних задач. В связи с этим, широкую популярность приобрело использование приближенных математических моделей. Эти модели не обладают общностью, присущей полной системе уравнений Навье-Стокса, однако в тех случаях, когда допущения, лежащие в их основе, справедливы, использование таких моделей в методическом отношении является более оправданным, чем применение полной системы уравнений Навье-Стокса.

Исторически первой и наиболее простой моделью является классическая модель вязкой несжимаемой жидкости, основанная на системе уравнений Стокса [3]. В дальнейшем, с целью расширения границ применимости этой модели, была сформулирована приближенная система уравнений для описания конвекции жидкостей и газов, получившая название приближения Буссинеска и чрезвычайно широко используемая при численном моделировании конвективных течений . Всесторонний анализ методов численного интегрирования систем уравнений Стокса и Буссинеска содержится в [9]. Для расчета стационарных течений более эффективным оказывается использование методов, основанных на введении искусственной сжимаемости [10]. Примером успешного использования такого подхода для моделирования существенно трехмерных процессов в мантии Земли являются работы [11]. В рамках приближения Буссинеска изменения плотности в потоке учитываются лишь частично. Плотность считается зависящей от температуры только при определении массовой силы. К числу допущений, отказ от которых не затрагивает основ модели вязкой несжимаемой жидкости, следует отнести также допущения о постоянстве теплофизических и переносных свойств газа или о пренебрежительно малой роли процессов диссипации механической энергии потока и работы сил давления. Очевидно, что модификации модели несжимаемой жидкости не могут применяться для описания течений с существенно изменяющейся плотностью из-за использования в них уравнений несжимаемости. В связи с этим, начиная с 80-х годов, развиваются новые приближенные подходы к описанию рассматриваемого класса течений, свободные от недостатков модели несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска. Наибольшее распространение при численном моделировании внутренних течений получили параболизованные модели, в том числе приближение пограничного слоя, приближение узкого канала и дальнейшее развитие модели вязкого ударного слоя, основанная на параболической аппроксимации полных уравнений Навье-Стокса.

К настоящему времени разработан широкий класс моделей, основанный на численном решении полной системы уравнений Навье-Стокса. Известно [12], что при уменьшении характерного числа Маха потока до значений ниже 0.1, происходит замедление сходимости итераций по времени в методе установления и ухудшение точности получаемого решения. Замедление сходимости метода установления объясняется возрастающей при жесткостью уравнений динамики сжимаемого газа, определяемого как отношение максимального и минимального собственных значений матрицы Якоби векторов конвективных потоков. Детальное исследование этого эффекта с учетом используемых разностных схем, сетки и параметров течения проведено в [13]. Для предотвращения проблем со сходимостью был предложен метод предобуславливания (preconditioning) [12]. Идея предобуславливания при состоит в модификации члена с производной по времени в исходных уравнениях движения путем домножения его на матрицу, которая подбирается так, чтобы скорости распространения возмущений имели один порядок при $M \to 0$. На дифференциальном уровне при установлении система описывает стационарное решение исходных уравнений Эйлера. Близкий подход предложен для численного моделирования конвективных течений и теплопереноса в жидкостях с параметрами вблизи термодинамической критической точки [14]. В работе выполняется двухмасштабное расщепление давления: полное давление заменяется суммой среднего по области и приращения, преобразуется член с давлением в уравнении импульсов. Такое преобразование сохраняет систему полной, но весьма полезно при создании эффективного численного кода. Таким образом, широкое применение находят подходы, близкие к методу предобуславливания, но адаптированные для рассматриваемого класса задач.

2. Решение модельной задачи

Цель работы состоит в построении численной модели для описания процесса плавления и вызванного им всплывания легкого вещества в результате андерплейтинга базитовой магмы в основании континентальной коры. В результате использования созданной модели будут получены параметры процесса плавления и диапиризма в нижней коре, определена структура течения всплывающей гранитной магмы и предсказание возможной формы гранитогнейсовых диапировых тел.

Для масштабирования элементов решения системы уравнений введена операция приведения уравнений к безразмерному виду. Для решения нестационарной задачи введены итерации по фиктивному времени для уравнений движения. Аналогично рассмотренному подходу производная по фиктивному времени умножена на элементы матрицы предобуславливания P^{-1}. На каждом шаге по реальному времени $\triangle t$ выполняются итерации для уравнений движения по фиктивному времени $\triangle \tau$. Модифицированные уравнения не являются жесткими, что позволяет обеспечить сходимость к искомому решению на каждом шаге по реальному времени.

Особенность численной реализации полной системы уравнений Навье-Стокса для течений с малыми числами Маха состоит в значительном различии двух характерных для существенно дозвуковых течений масштабов времени: характерного времени конвективных процессов и характерного времени распространения акустических возмущений. При использовании явных конечно-разностных схем в соответствии с условием устойчивости Куранта шаг по времени не может превышать характерного времени наиболее быстрого процесса передачи акустических возмущений. Поэтому применение явных конечно-разностных схем оказывается совершенно неоправданным, за исключением ряда специфических задач. В настоящей работе система уравнений реализована неявным конечно-разностным методом стабилизирующей поправки первого порядка по времени и пространству на регулярной прямоугольной сетке в декартовой системе координат. Для улучшения счетных характеристик численной модели поле давлений разделяется на сумму постоянного давления массовых сил, которое учитывается при задании начальных данных, и переменного давления, которое определяется из уравнения состояния.

Рассматривается прямоугольная область земной коры глубиной 30км и шириной 60км. На верхней границе области задана свободная поверхность с постоянным нулевым значением температуры, заданы плотность $2.8 \cdot 10^3$ кг/м^3 и давление 10^5 Па. Боковые границы области изолированы для передачи тепла и выхода вещества. На нижней границе задана область, шириной 20км, постоянно прогреваемая до температуры $1200^o C$, т.е. рассматривается процесс андерплэйтинга. На остальной части нижней границы задана температура $550^o C$. Для согласования граничных условий температура на нижней границе изменяется по экспоненциальному закону. В ходе расчета скорости в области нагрева задаются согласованно в соответствии с исходными уравнениями, что позволяет получать гладкие значения скоростей. Давление на нижней границе в начальный момент времени задается равное 10^8 Па. Расчеты модельной задачи проводились при $h = 0.5$, $\triangle t = 10^{-3}$, $\triangle\tau = 10^{-4}$.

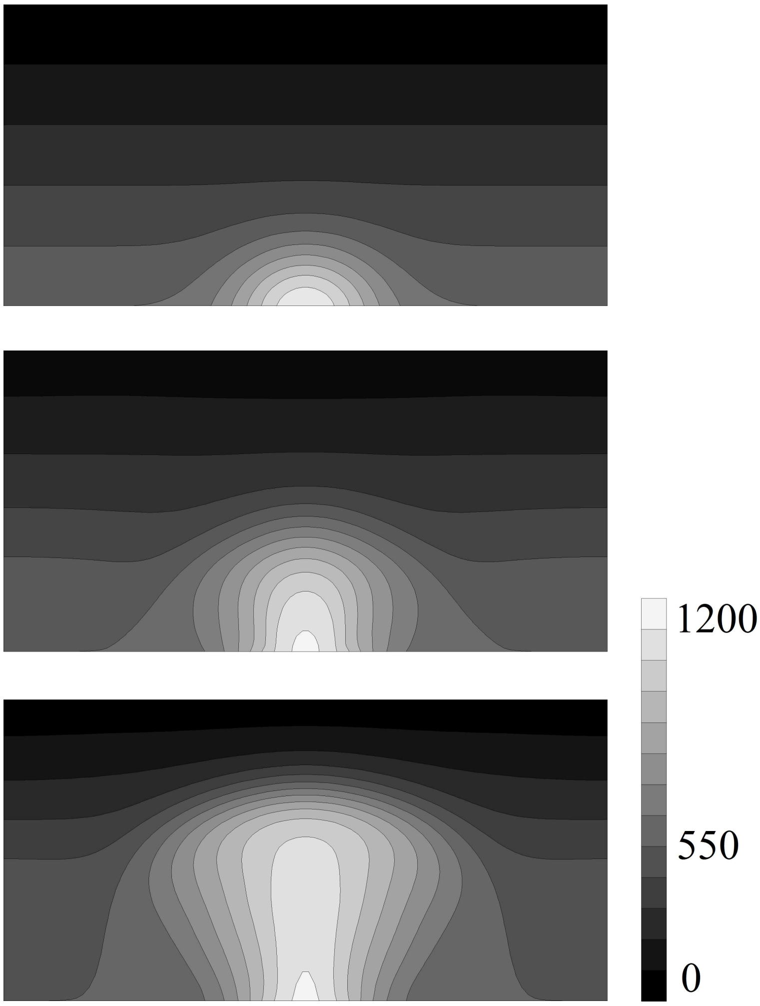

Рис. 1. Изотермы в моменты времени $t = 0$, $t = 1.5 \cdot 10^{13}$ сек и $t = 2.3 \cdot 10^{13}$ сек.

В начальный момент времени среда неподвижна, распределения плотности и давления задаются согласно уравнению состояния с учетом замены переменных для давления. Начальное распределение температуры задается с учетом потока:

$$T|_{t=0} = T_0 + (T_{550} - T_0)y/y_{max} + +(T_{1200} - T_{550})\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{R_x^2})\exp(\frac{(y_{max}-y)^2}{R_y^2}),$$

где R_x, R_y - ширина распространения температуры вдоль x и y, y_{max} - высота прогретой области в начальный момент времени, $T_0 = 0^oC$, $T_{550} = 550^oC$, $T_{1200} = 1200^oC$. В течении всего расчета происходит разогрев нижней границы. В результате конвективных процессов и переноса разогретого вещества происходит плавление и всплывание легкой гранитной магмы (рис. 1).

Таким образом, создана новая нестационарная модель геодинамических течений в приближении слабосжимаемой жидкости. Разработан алгоритм и прототип программы расчета модельной задачи. Результаты численных расчетов подтверждают правомерность построенной модели.

Список литературы

[1] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 319с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с..

[3] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736с.

[4] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. Спб.: Гидрометеоиздат, 1992. 264с.

[5] McKenzie D.P., Weiss N.O. Speculations on the thermal and tectonics history of the Earth // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1975. V. 48. P. 131-174.

[6] Schubert G., Turcotte D.L. Phase changes and mantle convection // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. P. 1424.

[7] Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. М: Физматлит. 2008г. 368 с.

[8] Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Поспелов В.А, Стрелец М.Х., Шур М.Л. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Поспелов В.А, Стрелец М.Х., Шур М.Л. Численное моделирование внутренних течений вязких химически реагирующих газовых смесей // Механика жидкости и газа. Т.19. -М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники). 1985. С.86-185.

[9] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М: Наука. 1984г. 285с.

[10] Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости Некоторые вопросы прикл. и вычисл. математики. Новосибирск. 1966. 186-192.

[11] Червов В.В. Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 3. С. 86-92

[12] Choi Y.-H., Merkle C. L. The Application of Preconditioning to Viscous Flows. J. of Comp. Physics. 1993. V. 105. P. 207-223.

[13] Чирков Д.В. Численный метод расчета течений сжимаемого вязкого газа в широком диапазоне чисел Маха : дис. канд. физ.-мат. наук : 05.13.18. – Новосибирск, 2004.

[14] Полежаев В.И., Соболева Е.Б. Нестационарные эффекты тепловой гравитационной конвекции околокритической жидкости при боковом нагреве и охлаждении // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 1. С. 81-93.