ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ *

А.Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: kazakov@icc.ru

Исследуются некоторые начально-краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений и систем с частными производными параболического типа с вырождением. Для рассмотренных задач доказаны новые теоремы существования решений в классе аналитических функций, обобщены некоторые известные решения нелинейного уравнения теплопроводности со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

Введение. Развитие численных [1] и аналитических [2] методов решения дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа было одним из важных направлений работы Н.Н. Яненко и его учеников. А.Ф. Сидоров в 80-х годах прошлого века предложил для аналитического исследования параболических задач применить метод характеристических рядов, ранее применявшийся только для изучения уравнений и систем гиперболического типа [2]. За статьей А.Ф. Сидорова [3] (представлена в "Доклады АН СССР" академиком Н.Н. Яненко) последовала серия публикаций (см., например, [4], [5]), которую продолжает данная работа. При этом используется предложенная автором ранее модификация метода характеристических рядов [6]

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение нелинейной теплопроводности (диффузии, фильтрации) со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры $K(T) = \alpha T^\sigma$:

$$T_t = \alpha \mathrm{div}(T^\sigma \nabla T). \tag{1}$$

Здесь $T = T(t, \mathbf{x})$– искомая функция (температура, давление газа в пористом грунте); t– время; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$– вектор пространственных координат; div, ∇– операторы дивергенции и градиента по пространственным координатам; $\alpha > 0, \sigma > 0$– известные константы, которые определяют свойства среды.

Стандартная замена $u = T^{1/\sigma}, t' = \alpha t$ приводит уравнение (1) к виду

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2. \tag{2}$$

В случае, когда $u = 0$, коэффициент перед старшей производной обращается в нуль и параболический тип уравнения (2) вырождается. Этот случай и рассматривается ниже.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) + \dfrac{1}{\sigma}\left(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right), \\ u|_{x_1=a(t)} = f(t, x_1, x_2)|_{x_1=a(t)}, \end{cases} \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–07–00245)

Будем предполагать, что известные функции $a(t), f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическим и удовлетворяют условиям:

$$a(0) = 0, a'(0) \neq 0, f(t, 0, 0) = 0, f_{x_2}(t, 0, 0) = 0. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $f \equiv 0$ получается известная задача о тепловой волне, которая движется по холодному фону [5].

Основная теорема. Сформулируем и докажем теорему существования аналитического решения поставленной краевой задачи.

Теорема 1. *Если функции $a(t)$ и $f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точек $t = 0$ и $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$ соответственно и удовлетворяют условиям (4), то задача (3) имеет два аналитических решения в некоторой окрестности точки $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$.*

Будем строить решение в виде ряда

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l}(t) \frac{[x_1 - a(t)]^k x_2^l}{k!l!}. \tag{5}$$

Для удобства определения коэффициентов ряда (5) сделаем в задаче (3) замену независимых переменных

$$y = x_1 - a(t), \ z = x_2, \ \tau = t. \tag{6}$$

Якобиан замены (6) $J = 1$, т.е. замена (6) невырожденная. При такой замене задача (3) примет вид:

$$\begin{cases} u_\tau - a'(\tau) u_y = u \left(u_{yy} + u_{zz} \right) + \dfrac{1}{\sigma} \left(u_y^2 + u_z^2 \right), \\ u\big|_{y=0} = \phi(\tau, z), \end{cases} \tag{7}$$

где $\phi(\tau, z) = f(\tau, a(\tau), z)$.

Из аналитичности a и f вытекает, что функция ϕ – аналитическая в некоторой окрестности точки $(\tau = 0, z = 0)$, т.е. может быть разложена в сходящийся ряд

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\tau) \frac{z^n}{n!}, \ \phi_n = \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \right|_{z=0},$$

причем из (4) следует, что $\phi(\tau, 0) = \phi_z(\tau, 0) = 0$, т.е. $\phi_0 = \phi_1 = 0$.

Решение задачи (7) будем искать в виде:

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l}(\tau) \frac{y^k}{k!} \frac{z^l}{l!}, u_{k,l}(\tau) = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial y^k \partial z^l} \right|_{\substack{y=0\\z=0}}. \tag{8}$$

Символы $u_{k,l}$ в формулах (5) и (8) обозначают одни и те же функции. Коэффициенты ряда (8) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$. Из граничных условии имеем, что $u_{0,l}(\tau) = \phi_l(\tau), \ l = 0, 1, \ldots$. В том числе,

$$u_{0,0} = \phi_0 \equiv 0, u_{0,1} = \phi_1 \equiv 0.$$

Для определения $u_{1,0}(\tau)$, положив в (7) $y = z = 0$, получим уравнение

$$u_{1,0} \left(\frac{1}{\sigma} u_{1,0} + a'(\tau) \right) = 0. \tag{9}$$

Возможны два случая: $u_{1,0} \equiv 0$ и $u_{1,0} \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай $u_{1,0} \neq 0$. Тогда решение уравнения (9) имеет вид

$$u_{1,0} = -\sigma a'(\tau),$$

таким образом, все производные первого порядка найдены. Далее найдем вторые производные. Из граничных условий

$$u_{0,2} = \phi_2.$$

Для нахождения $u_{1,1}$ продифференцируем уравнение (7) по z и положим $z = y = 0$. Подставив известные величины, получим уравнение $-a'(\tau)u_{1,1} = -\dfrac{2}{\sigma}\sigma a'(\tau)u_{1,1}$, откуда

$$u_{1,1} = 0.$$

Продифференцировав (7) по y, положив $y = z = 0$, подставив известные величины и приведя подобные слагаемые, получим, что

$$u_{2,0} = \frac{\sigma\left(a'' - a'\phi_2\right)}{(1+\sigma)a'}.$$

По условию теоремы $a'(0) \neq 0$, а значит, $a'(\tau) \neq 0$ в некоторой окрестности. Таким образом, все производные второго порядка найдены, база индукции установлена.

Пусть найдены производные до порядка n включительно, т.е. считаем известными $u_{k,n-k}, \quad k = 0, ..., n$. Тогда

$$u_{0,n+1} = \phi_{n+1}.$$

Продифференцировав уравнение (7) k раз по y, $n-k$ раз по z и положив $z = y = 0$, получим соотношение:

$$\begin{aligned} u'_{k,n-k} - a'u_{k+1,n-k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j}\left(u_{i+2,j} + u_{i,j+2}\right) + \\ + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \left(u_{k-i+1,n-k-j}u_{i+1,j} + u_{k-i,n-k-j+1}u_{i,j+1}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

При $k = 0$ имеем уравнение $u'_{0,n} - a'u_{1,n} = \frac{2}{\sigma}u_{1,0}(u_{1,n} + u_{0,n+1}) + g_{0,n}$, из которого однозначно определяется $u_{1,n}$:

$$u_{1,n} = -2\phi_{n+1} - \frac{\phi'_n}{a'} + \frac{g_{0,n}}{a'},$$

где функция

$$g_{0,n} = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^j u_{0,n-j}\left(u_{2,j} + u_{0,j+2}\right) + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \left(u_{1,n-j}u_{1,j} + u_{0,j+1}u_{0,n-j+1}\right)$$

зависит от производных порядка не выше n, известных в силу предположения индукции. И т.д.: последовательно вычисляются

$$u_{k+1,n-k} = \frac{-k\sigma a' u_{k-1,n-k+2} + g_{k,n-k} - u'_{k,n-k}}{a'(1+k\sigma)}, \quad k = 1, ..., n.$$

где функции

$$g_{k,n-k}=\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{n-k-2}C_k^iC_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j}\left(u_{i+2,j}+u_{i,j+2}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-k}C_k^iC_{n-k}^j u_{i+1,j}u_{k-i+1,n-k-j}+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{n-k-1}C_k^iC_{n-k}^j u_{i,j+1}u_{k-i,n-k-j+1}$$

зависит от производных порядка не выше n, которые известны в силу предположения индукции.

Таким образом, для случая $u_{1,0}\neq 0$ формальное решение построено.

Рассмотрим теперь случай $u_{1,0}=0$. В задаче о движении теплового фронта по холодному фону [5] этот случай приводит к тривиальному решению. Однако, если среди ϕ_n есть хотя бы одна ненулевая функция, решение в этом случае будет ненулевым.

Процедура построения решения такая же, как и в первом случае. При этом получаются следующие соотношения: $u_{1,1}=0$, $u_{2,0}=0$, $u_{0,2}=\phi_2$, и так далее. Из (10) (поскольку $u_{1,0}=0$) имеем, что $u_{k+1,n-k}=g_{k,n-k}/a'(\tau)$. Таким образом, оба формальных решения задачи (10) построены.

Сходимость построенных рядов доказывается методом мажорант, причем для первого и второго случаев строится одна и та же мажоранта.

З а м е ч а н и е 2. Два найденные аналитические решения задачи (7) позволяют строить кусочно-аналитические решения задачи (3), непрерывно состыкованные на поверхности $x_1=a(t)$. В частном случае $f\equiv 0$ одно из этих решений является тривиальным (задача о движении тепловой волны по холодному фону). В этом смысле теорема 1 является обобщением теоремы 2.1 из работы [5].

Параболическая система. Рассмотрим для нелинейной параболической системы следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t=uu_{xx}+vv_{xx}+\dfrac{1}{\alpha}u_x^2\\ v_t=uu_{xx}+vv_{xx}+\dfrac{1}{\beta}v_x^2\end{cases}\qquad(11)$$
$$u\big|_{x=a(t)}=0,\ v\big|_{x=a(t)}=0,\quad a(0)=0,\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Подобного рода системы (в линейном случае) иногда называют системами А.В. Лыкова [7].

Теорема 2. *Если функция a - аналитическая, то задача (11) при условии* $a'(0)\neq 0$ *имеет единственное нетривиальное аналитическое решение.*

Доказательство. Построение решения. Будем строить решение в виде рядов

$$u=\sum_{k,l=0}^{\infty}u_{k,l}(t)\frac{[x-a(t)]^k}{k!l!},\quad v=\sum_{k,l=0}^{\infty}v_{k,l}(t)\frac{[x-a(t)]^k}{k!l!}.$$

Сделаем замену независимых переменных

$$z=x-a(t),\tau=t.$$

Тогда задача (11) примет вид

$$\begin{cases} u_\tau-a'(\tau)u_z=uu_{zz}+vv_{zz}+\dfrac{1}{\alpha}u_z^2\\ v_\tau-a'(\tau)v_z=uu_{zz}+vv_{zz}+\dfrac{1}{\beta}v_z^2\end{cases}\qquad(12)$$
$$u\big|_{z=0}=0,\ v\big|_{z=0}=0.$$

Решение задачи (12) будем строить в виде характеристических рядов

$$u(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(\tau)\frac{z^k}{k!};v(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(\tau)\frac{z^k}{k!}.$$

Из краевых условий следует, что $u_0(\tau)=v_0(\tau)=0$. Из уравнений системы имеем

$$\begin{cases} -a'(\tau)u_1(\tau)=\dfrac{1}{\alpha_1}u_1^2(\tau), \\ -a'(\tau)v_1(\tau)=\dfrac{1}{\beta_1}v_1^2(\tau), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1\neq 0;\ u_1=-\alpha a'(\tau), \\ v_1\neq 0;\ v_1=-\beta a'(\tau). \end{cases}$$

Продифференцируем обе части системы (12) по z и положим $z=0$ и подставим выражение для u_1 и v_1. Получим

$$\begin{cases} (1+\alpha)u_2+\beta v_2=\dfrac{\alpha a''}{a'}, \\ \alpha u_2+(1+\beta)v_2=\dfrac{\beta a''}{a'}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta_2=a'\left(1+\alpha+\beta\right)$, решение:

$$v_2=\frac{a''\left(-a^2+\alpha\beta+\beta\right)}{a'\left(1+\alpha+\beta\right)};u_2=\frac{a''\left(-\beta^2+\alpha\beta+\alpha\right)}{a'\left(1+\alpha+\beta\right)}.$$

И так далее.

Пусть найдены коэффициенты ряда с номерами до $k-1$ включительно, тогда $u_k,\ v_k$ определяются из системы

$$\begin{cases} \left(1+k\alpha\right)u_{k+1}+k\beta v_{k+1}=\dfrac{u_k'-F_{k+1}}{a'(\tau)}, \\ k\alpha u_{k+1}+\left(1+k\beta\right)v_{k+1}=\dfrac{v_k'-G_{k+1}}{a'(\tau)}. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta_k=\left(1+k\alpha\right)\left(1+k\beta\right)-k^2\alpha\beta=1+k\alpha+k\beta>0$. Решение:

$$v_{k+1}=\frac{1}{\Delta_k a'(\tau)}\left[-k\alpha\left(u_k'-F_{k+1}\right)+\left(1+k\alpha\right)\left(v_k'-G_{k+1}\right)\right],$$

$$u_{k+1}=\frac{1}{\Delta_k a'(\tau)}\left[\left(1+k\beta\right)\left(u_k'-F_{k+1}\right)-k\beta\left(v_k'-G_{k+1}\right)\right].$$

Таким образом, формальное решение задачи (12) построено.

Сходимость. Введем новые искомые функции U и V:

$$u(t,z)=u_0+u_1z+z^2U(t,z)=-\alpha a'(\tau)z+z^2U,$$

$$v(t,z)=v_0+v_1z+z^2V(t,z)=-\beta a'(\tau)z+z^2V.$$

Тогда система (12) преобразуется как

$$\begin{cases} A_1 U + B_1 z U_z + C_1 z^2 U_{zz} + A_2 V + B_2 z V_z + C_2 z^2 V_{zz} = g_0 + z g_1 + z^2 g_2 + z^3 g_3, \\ A_4 V + B_4 z V_z + C_4 z^2 V_{zz} + A_3 U + B_3 z U_z + C_3 z^2 U_{zz} = h_0 + z h_1 + z^2 h_2 + z^3 h_3, \end{cases} \quad (13)$$

где $A_i, B_i, C_i, \quad i = 1, ..., 4$ – положительные константы, а функции $g_j, h_j,\ j = 0, ..., 3$ – аналитические.

Будем строить решение системы (13) в виде степенных рядов

$$U(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\tau) \frac{z^k}{k!}; V(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(\tau) \frac{z^k}{k!}.$$

Для коэффициентов рядов справедливы формулы:

$$\begin{cases} \left[A_1 + B_1 k + C_1 k(k-1)\right] U_k + \left[A_2 + k B_2 + k(k-1) C_2\right] V_k = G_k, \\ \left[A_3 + B_3 k + C_3 k(k-1)\right] U_k + \left[A_4 + k B_4 + k(k-1) C_4\right] V_k = H_k, \end{cases}, \quad k = 0, 1, ...$$

Определитель системы $\Delta = (k+1)^2 \left((k+1)\alpha + (k+1)\beta + 1\right) = (k+1)\Delta_{k+1} \neq 0$.

Теперь построим мажоранту W для функций U и V. Пусть

$$A = \min\left\{A_1, A_2, A_3, A_4\right\}, B = \min\left\{B_1, B_2, B_3, B_4\right\}, C = \min\left\{C_1, C_2, C_3, C_4\right\},$$

а G_0, G_1, G_2, G_3 - соответствующие мажоранты для функций в правых частях. Тогда, если $D = \max\limits_{k} \dfrac{k(k-1)+1}{A + kB + k(k-1)C}$, то W является решением уравнения

$$W_{zz} = D\left[z G_3 + G_2 + \frac{\partial G_1}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial W} W_z + \frac{\partial G_1}{\partial W_\tau} W_{z\tau} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2} \right].$$

Если продифференцировать обе части по z и выразить W_{zzz}, то вместе с условием $W(0,\tau) = W_0(\tau) \gg U_0(\tau), V_0(\tau)$, $W_z(0,\tau) = W_1(\tau) \gg U_1(\tau), V_1(\tau)$, $W_{zz}(0,\tau) = W_2(\tau) \gg U_2(\tau), V_2(\tau)$ имеем задачу Коши типа Ковалевской, которая по теореме Коши-Ковалевской имеет единственное аналитическое решение.

Данное решение по построению функции W мажорирует функции U и V, т.е. ряды, задающие эти функции, сходятся. Следовательно, сходятся ряды для функций u и v.

Список литературы

[1] Яненко Н.Н Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.

[2] Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

[3] Сидоров А.Ф. Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.

[4] Ваганова Н.А. Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.

[5] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.

[6] Казаков А.Л. Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 91–109.

[7] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.