РАСПОЗНАВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ*

С.П. Шарый

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
`shary@ict.nsc.ru`

Предметом рассмотрения в нашей работе являются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a}_{11}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{12}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{1n}x_n & = & \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{22}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{2n}x_n & = & \boldsymbol{b}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 & + & \boldsymbol{a}_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{a}_{mn}x_n & = & \boldsymbol{b}_m \end{array}\right. \tag{1}$$

с интервальными коэффициентами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и свободными членами $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, или, кратко,

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — интервальная $m \times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный m-вектор. Системы (1)–(2) мы понимаем как семейства точечных линейных систем $Ax = b$ той же структуры с матрицами $A \in \boldsymbol{A}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b}$.

Множеством решений интервальной линейной системы уравнений будем называть множество

$$\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(\, Ax = b\,) \,\bigr\}, \tag{3}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$ (см., к примеру, [2, 7, 10]). Часто его называют также *объединённым множеством решений*, поскольку для интервальных уравнений существуют другие множества решений [6, 7], более адекватные тем или иным конкретным практическим ситуациям. Мы не рассматриваем их в нашей работе, и потому называем (3) сокращённым термином «множество решений». В представляемой работе мы обсудим, как проверять непустоту множества решений $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, называемую *разрешимостью* системы (1)–(2), а также в случае $\varXi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \varnothing$ находить точку из этого множества. В самой общей ситуации эта задача является NP-трудной [6, 9].

Пусть $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ обозначает наименьшее расстояние точек интервала $\boldsymbol{a}$ до нуля, так называемую мигнитуду интервала, а $\operatorname{mid} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rad} \boldsymbol{a}$ — это середина и радиус интервала $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{mid} \boldsymbol{a} \;&:=\; \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}), \\ \operatorname{rad} \boldsymbol{a} \;&:=\; \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}), \end{aligned} \qquad \langle \boldsymbol{a} \rangle := \begin{cases} \min\{\, |\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}| \,\}, & \text{если } \boldsymbol{a} \not\ni 0, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{a} \ni 0. \end{cases}$$

*Работа выполнена при поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6068.2010.9).

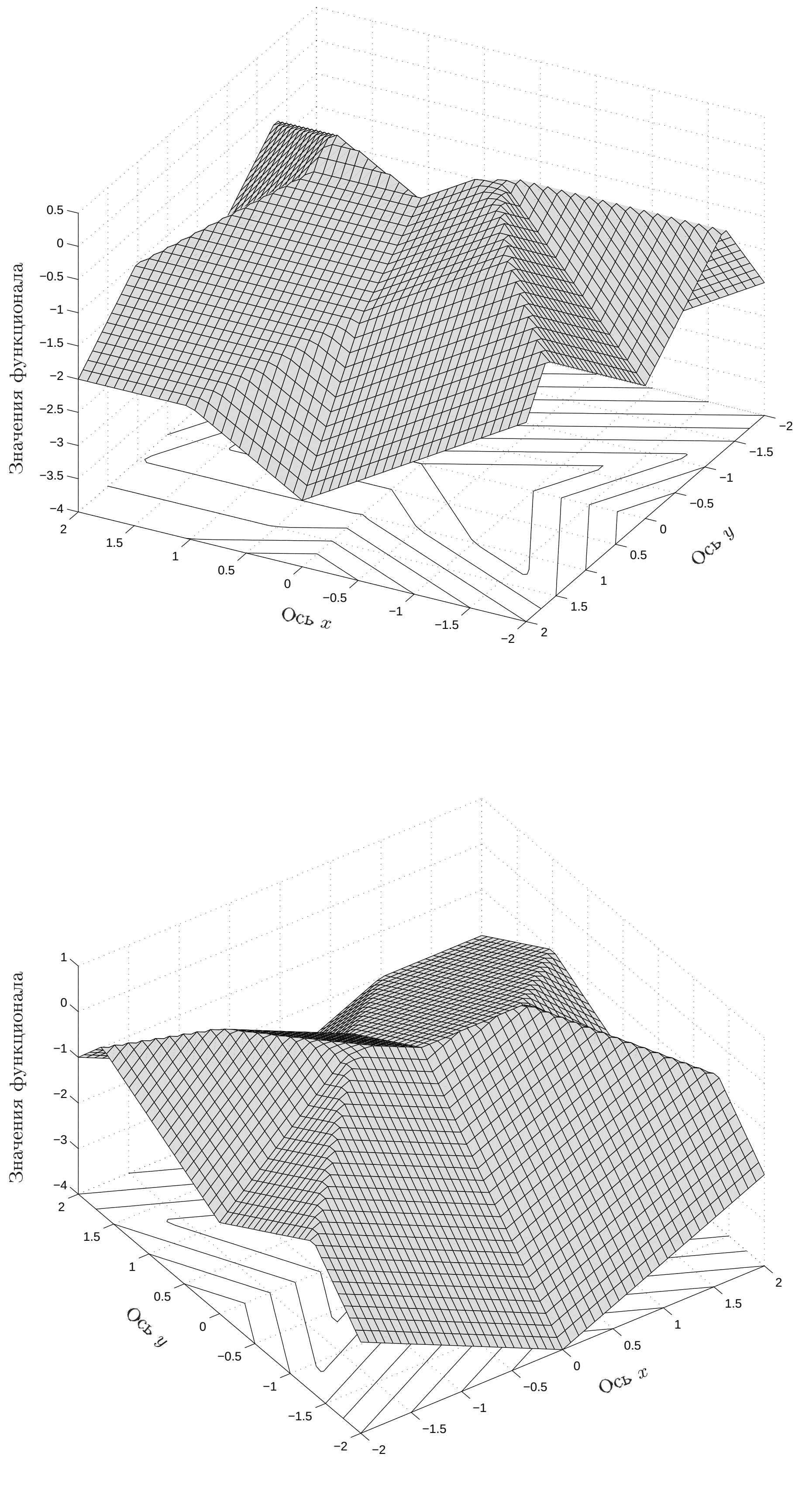

Рис. 1. График распознающего функционала с разных точек зрения.

Тогда выражением

$$\mathrm{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) := \min_{1\le i\le m}\left\{ \,\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i - \left\langle \,\mathrm{mid}\,\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}x_j \,\right\rangle \right\} \tag{4}$$

задается функционал $\mathrm{Uni} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой что принадлежность точки x множеству решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ равносильна неотрицательности в x функционала Uni:

$$x \in \varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \mathrm{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ge 0.$$

То есть, множество решений системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ — это лебегово множество $\{\, x\in\mathbb{R}^n \mid \mathrm{Uni}(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ge 0 \,\}$ функционала Uni.

Функционал Uni, который мы называем *распознающим функционалом* множества решений, является вогнутым в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$, а если в интервальной матрице $\boldsymbol{A}$ некоторые столбцы целиком точечные, то $\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ вогнут и на объединениях нескольких ортантов. Кроме того, функционал $\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ достигает конечного максимума на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если же $\mathrm{Uni}\,(\tilde{x},\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) > 0$, то $\tilde{x}$ — точка внутренности множества решений, а при некоторых дополнительных ограничениях на $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ верно и обратное.

На Рис. 1, к примеру, изображён с разных точек зрения график распознающего функционала для интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [-1,1] \\ [-1,1] & [2,3] \\ [0,1] & [1,2] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [0,1] \\ [-1,0] \end{pmatrix}.$$

Последние два свойства распознающего функционала позволяют использовать его для исследования принадлежности точек внутренности множества решений. Это может иметь особую важность при нахождении телесной внутренней оценки множества решений вокруг точки-центра по методике, которая описана, например, в [7].

Как следствие сформулированных результатов, естественно приходим к следующей методике исследования разрешимости интервальных линейных систем уравнений. Для системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ решаем задачу безусловной максимизации распознающего функционала $\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$. Пусть $U = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ и достигается в точке $\tau\in\mathbb{R}^n$. Тогда

- если $U \ge 0$, то $\tau \in \varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ne \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ разрешима и τ лежит во множестве решений;
- если $U > 0$, то $\tau \in \mathrm{int}\,\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \ne \varnothing$, и принадлежность точки τ множеству решений устойчива к малым возмущениям $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$;
- если $U < 0$, то $\varXi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \varnothing$, т. е. интервальная линейная система $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ неразрешима.

Полезным свойством нашей методики является возможность коррекции с её помощью интервальной системы уравнений с целью достижения разрешимости либо, наоборот, неразрешимости. Действительно, в распознающем функционале (4) величины $\mathrm{rad}\,\boldsymbol{b}_i$ входят аддитивно во все выражения, по которым затем берётся минимум. Поэтому если $\boldsymbol{e} = ([-1,1],\ldots,[-1,1])^\top$, то для интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}$

с правой частью, все компоненты которой расширены на интервал $C[-1,1]$ с радиусом $C>0$, будем иметь $\mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}) = C + \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, и потому

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}+C\boldsymbol{e}) = C + \max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}). \tag{5}$$

Как следствие, если система (1)–(2) была неразрешима, то при $C \geq \max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Uni}\,(x,\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ интервальная система с расширенной правой частью сделается уже разрешимой.

Приложением разработанной техники может служить задача восстановления линейной зависимости по неточно измеренным эмпирическим данным. Пусть

$$b \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

с неизвестными коэффициентами x_i, $i = 1,2\ldots,n$, причём заданы m наборов экспериментально измеренных значений

$$\begin{array}{ccccc} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)}, & b^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_n^{(2)}, & b^{(2)}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(m)}, & a_2^{(m)}, & \ldots, & a_n^{(m)}, & b^{(m)}, \end{array} \tag{6}$$

с которыми должны «согласовываться» x_i (верхний индекс в скобках — номер измерения). Переобозначая $a_{ij} := a_j^{(i)}$, получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+\; a_{12}x_2 \;+\ldots+\; a_{1n}x_n \;=\; b_1, \\ a_{21}x_1 \;+\; a_{22}x_2 \;+\ldots+\; a_{2n}x_n \;=\; b_2, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right.$$

или, кратко, $Ax = b$ с $m\times n$-матрицей $A = (\,a_{ij})$ и m-вектором $b = (\,b_i)$. Её решение — обычное или в обобщённом смысле — принимается за искомую оценку параметров.

В случае, когда данные (6) имеют интервальные неопределённости, говорят [4], что набор параметров $x_1,\ \ldots,\ x_n$ объекта *согласуется* с интервальными экспериментальными данными $(\boldsymbol{a}_{i1},\ \boldsymbol{a}_{i2},\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{in},\ \boldsymbol{b}_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$, если для каждого наблюдения i в пределах измеренных интервалов найдутся такие представители $a_{i1}\in\boldsymbol{a}_{i1}$, $a_{i2}\in\boldsymbol{a}_{i2}$, …, $a_{in}\in\boldsymbol{a}_{in}$ и $b_i\in\boldsymbol{b}_i$, что $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$. Множество параметров, согласующихся с данными, которое называется *информационным множеством*, *множеством возможных значений параметров* и т. п., есть

$$\left\{\ x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \big(\ \exists(a_{ij})\in(\boldsymbol{a}_{ij})\ \big)\big(\ \exists(b_i)\in(\boldsymbol{b}_i)\ \big)\big(\,Ax = b\,\big)\ \right\}$$

где $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, т. е. является ни чем иным, как множеством решений соответствующей интервальной линейной системы. Оценкой параметров при этом естественно взять точку из этого множества решений [1, 4, 5].

В общем случае прямое применение этого подхода приводит к парадоксу, смысл которого может быть образно выражен фразой «Чем лучше, тем хуже». Именно, чем

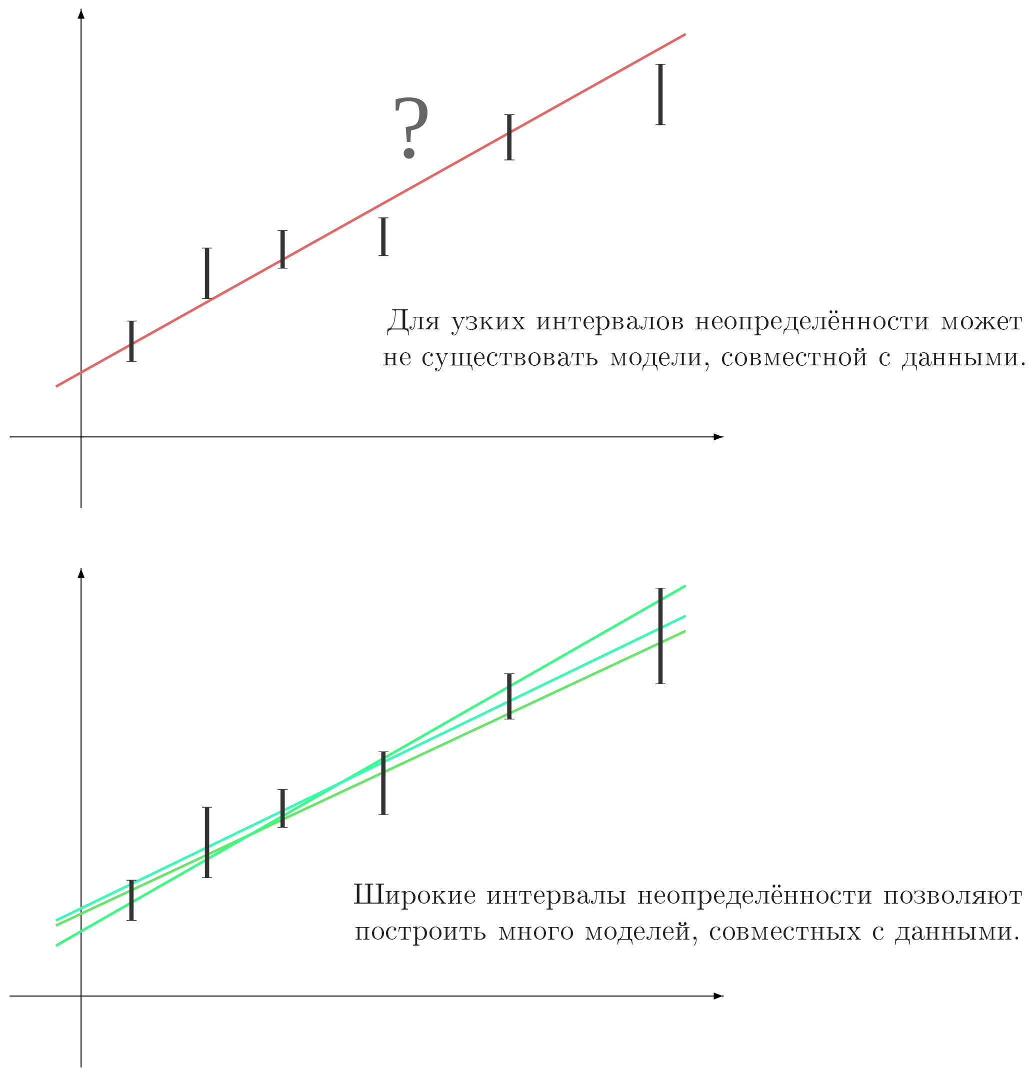

Рис. 2. Иллюстрация парадокса интервального оценивания.

меньше интервалы неопределённости, тем хуже проводить через них регрессионную линию! Эта ситуация иллюстрируется Рис. 2, где на верхнем чертеже интервалы неопределённости данных получаются «сжатием» интервалов нижнего рисунка (т.е. улучшением точности данных), но возможность проведения прямой линии через них утрачивается.

Для преодоления парадокса интервального оценивания в принципе существуют следующие пути:

- Если интервалы данных адекватно отражают неопределённости, то неадекватна применяемая модель и её нужно сменить.

- Если необходимо сохранить модель (вид зависимости) или данные не являются абсолютно гарантированными, то нужно допустить несогласованность параметров и данных.

Исследование первого пути является прерогативой науки моделирования, а здесь мы рассмотрим вторую возможность, связанную с допущением некоторого несогласования между данными и получаемыми на их основе параметрами модели. Основным вопросом при этом является выбор меры для этого «согласования / несогласования».

Ясно, что при непустом информационном множестве избранная нами мера должна быть положительной для точек из этого множества, на которых «согласование» в самом деле достигается. В частности, для наших целей очень подходит распознающий функционал Uni.

Подытоживая высказанные идеи, можно предложить следующий подход к выбору искомых параметров, который мы называем *методом максимума согласования*. Именно, оценкой параметров берётся точка, в которой достигается наибольшее значение распознающего функционала Uni:

- Если $\max \mathrm{Uni} \geq 0$, то эта точка лежит в непустом множестве параметров, согласующихся с данными.
- Если $\max \mathrm{Uni} < 0$, то множество параметров, согласующихся с данными, пусто, но эта точка минимизирует «несогласованность» с экспериментальными данными.

В случае отсутствия параметров, согласующихся с данными, ещё одна содержательная интерпретация метода максимума согласования состоит в том, что $\arg\max \mathrm{Uni}$ — первая точка, которая появится в информационном множестве при равномерном уширении вектора правой части относительно его середины в силу свойства (5). Иными словами, мы предлагаем при пустом информационном множестве в качестве значений искомых параметров брать точку, на которой минимизируется увеличение неопределённости в выходных данных, делающее это информационное множество непустым.

Для численной реализации метода максимума согласования могут быть применены процедуры негладкой оптимизации, и на их сложность решающее влияние оказывает число независимых параметров n. В важнейшем практическом случае, когда неопределённости во входных данных a_{ij} отсутствуют, а интервальность в данных сосредоточена лишь в $\boldsymbol{b}_i$, распознающий функционал становится глобально вогнутым. При этом его максимизация очень эффективно осуществляется развитыми методами негладкой выпуклой оптимизации (см., к примеру [8]). В целом для этого случая получаем эффективную методику обработки данных с интервальными неопределённостями, которая является хорошей альтернативой методу наименьших квадратов (свободно распространяемую версию соответствующей программы для Scialb'а можно найти на `http://www.nsc.ru/interval/Programming/SciCodes/lintreg.sci`). Она очевидным образом обобщается на нелинейный случай, но требует привлечения существенно более сложных оптимизационных методов.

Список литературы

[1] Вощинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // *Заводская Лаборатория*. 2002. Т. 68, №1. С. 118–126.

[2] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. *Методы интервального анализа.* – Новосибирск: Наука, 1986.

[3] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал.* – 1962. – Т. 3, №5. – С. 701–709.

[4] Куржанский А.Б. Задача идентификации — теория гарантированных оценок // *Автоматика и Телемеханика.* – 1991. – №4. – С. 3–26.

[5] Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И. Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределённостей // *Известия Алтайского государственного университета.* – 1998. – №1. – С. 35–38.

[6] Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными.* – Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2008.

[7] Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ.* – Электронная книга, см. `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks`

[8] Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градинетов // *Кибернетика.* 1971. №3. С. 51–59.

[9] Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations.* – Dordrecht: Kluwer, 1998.

[10] Neumaier A. *Interval methods for systems of equations.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.