

СТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА НЕПОДКРЕПЛЕННЫХ ВЫРАБОТКАХ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОИСТОМ МАССИВЕ

Л.Б. Атымтаева¹, Ж.К. Масанов², Г.С. Мырзахметова², Б.Е. Ягалиева¹

¹Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

²Институт механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова, МОН РК, Алматы, Казахстан

This paper is devoted to research stress-strain condition of anisotropic layered massifs with unsupported horizontal deep located mine roadways which have different massif orientation (location) and forms at the case of stationary diffraction of various types of elastic waves (PP-, SV-, SH-).

Введение

В настоящее время в эксплуатацию вводятся подземные сооружения самого различного назначения — от производственных цехов до станций метро. Опыт строительства и эксплуатации подземных объектов подтвердил многочисленные положительные стороны освоения подземного пространства, возможность успешной и экономичной эксплуатации сооружений под землей.

Разработка различных месторождений горных пород и выработок, проектирование подземных сооружений часто проводится под разными углами к плоскости простираания слоев горного массива, что обуславливает разную ориентацию подземных объектов в массиве. Подземные сооружения, продольная ось которых составляет произвольный угол с линией простираания плоскости изотропии массива, находят широкое применение в системе подготовительных и капитальных горных выработок. [1]. Учет способов проходки месторождений и влияние окружающего породного массива возможно только при рассмотрении слоистой анизотропной среды.

Мелкослоистый массив, когда толщина слоев на порядок меньше характерного линейного размера поперечного сечения выработки и механические свойства слоев переходят от одного слоя к другому почти непрерывно, уподобляется анизотропному породному образцу. Представительность такого породного массива, который вполне может служить моделью анизотропной среды, оправдывает рассмотрение трансверсально-изотропного (транстропного) тела, наклонная к горизонту плоскость изотропии которого отражает наличие плоскости напластования пород в их естественном залегании.

Постановка проблемы

Предположим, что в транстропном массиве проведены горизонтальные диагональные полости, в общем случае, произвольно ориентированные относительно плоскости простираания слоев массива (рис.1). Диагональные выработки по своему определению содержат в себе как предельные случаи штореки и квершлагги. Детальный анализ напряженного состояния подобных горных выработок дает основу для оценки устойчивости и прочности штореков и квершлаггов при отклонении их продольной оси от должного положения относительно элементов залегания породных слоев.

Уравнения обобщенного закона Гука для транстропного массива с наклонной под углом φ к горизонту плоскостью изотропии относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ (см. рис.1), где ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а оси Ox_1 и Ox_3 — соответственно горизонтально вкрест и по простираанию плоскости изотропии, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] \{\varepsilon\}, [D] = [b_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, 6; \\ \{\sigma\}^T &= (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \\ b_{15} &= b_{25} = b_{35} = b_{46} = b_{56} = b_{14} = b_{24} = b_{34} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где b_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$ - коэффициенты упругости, зависящие от упругих постоянных среды $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$ и угла φ .

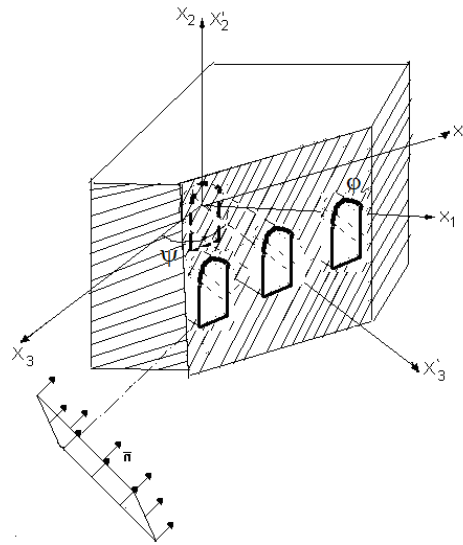


Рис.1. Схема распространения гармонических волн в транстропном массиве с неподкрепленными диагональными полостями вкrest простирания наклонной плоской изотропии

Для рассмотрения диагональных полостей необходимо преобразовать уравнения обобщенного закона Гука (1) для массива в системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$, у которой ось Ox'_3 (продольная ось диагональных полостей) составляет угол ψ с осью Ox_3 в первоначальной декартовой системе координат, направления осей Ox'_1 и Ox_1 также отличаются на угол ψ , а ось Ox'_2 совпадает с осью Ox_2 (см. рис. 1). Подобное возможно, если провести горизонтальный поворот осей на угол ψ вокруг оси Ox_2 . Предположим, что заданные внешние объемные силы не меняются вдоль продольной оси диагональных цилиндрических полостей. В силу трансверсальности изотропии упругих свойств массив поперечное сечение диагональных полостей получает искривление. Однородность механических свойств массива в совокупности с предположением о бесконечной протяженности полостей обуславливает одинаковость искривления поперечных сечений диагональных полостей на всем их протяжении. Следовательно, можно предположить, что все характеристики напряженно-деформированного состояния диагональных полостей зависят от координат (x'_1, x'_2) в плоскости их поперечного сечения, т.е. $u'_1 = u'_1(x'_1, x'_2)$, $u'_2 = u'_2(x'_1, x'_2)$, $u'_3 = u'_3(x'_1, x'_2)$, а $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x'_1, x'_2)$, $i, j = 1, 2, 3$, что аналогично условиям плоской деформации. Подобного рода деформация относится к так называемой обобщенной плоской.

При этих условиях уравнения обобщенного закона Гука для массива с наклонной плоскостью изотропии, содержащей диагональные полости, имеют вид

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [K] \{\varepsilon\}, [K] = [c_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, 5; \\ \{\sigma\}^T &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты упругости $c_{ij} = c_{ji}$ зависят, кроме пяти приведенных постоянных $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$, от угла наклона φ плоскости изотропии пород к горизонту и угла отклонения ψ оси выработок от линии простирания этой плоскости. Указанные коэффициенты

являются приведенными вдоль продольной оси диагональной полости, т.е. $c_{ij} = b'_{ij} - \frac{b'_{i2}b'_{j2}}{b'_{22}}$ зависят от коэффициентов b_{ij} и угла ψ , причем коэффициенты b'_{ij} зависят от коэффициентов b_{ij} .

Предположим, что S_l ($l = \overline{1, L}$) области поперечного сечения полостей, а $S_0 = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{l=1}^L S_l$ область поперечного сечения многосвязной среды (транстропного массива). С центром каждой полости свяжем локальную безразмерную координатную систему (x_{1l}, x_{2l}) ($l = \overline{1, L}$), $(x_{10}, x_{20}) = (x_1/R, x_2/R)$, R - некоторый линейный размер (например, максимальное значение величины перемычки между полостями). Горизонтальные полости проведены вдоль оси Ox_3 и имеют поперечное сечение с контуром Γ_l .

Горизонтальные диагональные полости глубокого заложения имеют поперечное сечение с контуром Γ_l , описываемым в случае некругового поперечного сечения отображающей функцией $\tilde{\omega}(\zeta_l)$

$$z_l = \tilde{\omega}(\zeta_l) = R_l(\zeta_l + \sum_{m=1}^{N_l} d_{ml} \zeta_l^{-m}), \quad z_l = x_{1l} + ix_{2l}, \quad \zeta_l = \rho_l e^{i\theta_l}, \quad d_{ml} = d_{1ml} + id_{2ml} \quad (4)$$

которая в случае круговой формы полости имеет вид $z_l = \tilde{\omega}(\zeta_l) = R_l(\zeta_l)$. (4*)

Здесь коэффициенты d_{ml} , в общем случае, берутся комплексными, что соответствует несимметричным контурам полостей, в случае действительных коэффициентов, имеет место симметричный контур полостей, если все коэффициенты $d_{ml} = 0$, имеет место случай круговых контуров.

Теперь предположим, что в транстропном массиве в плоскости поперечного сечения полостей вдоль направления, задаваемого единичным вектором $\vec{n} = (n_1, n_2)$, падает стационарная упругая волна. Фронт волны параллелен оси полостей Ox_3 , сама волна поляризована в плоскости поперечного сечения полостей в случае рассмотрения PP-, SV-волн и параллельно оси Ox_3 в случае распространения SH-волн. Гармоническая волна имеет вид

$$\bar{u} = \bar{u}^* e^{-i\omega t}, \quad \bar{u}^* = \bar{U}^* \exp[i\bar{k} (n_1 x_1 + n_2 x_2)] = \bar{U}^* \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] \quad (5)$$

где ω - частота волны, $\bar{k}$ - волновой вектор, n_1, n_2 - направляющие косинусы угла падения волны α - угла между осью Ox'_1 и вектором $\vec{n}$ (см. рис. 1).

В случае обобщенной плоской деформации дифракционное поле характеризуется составляющими перемещений $\bar{u}_p = \{u_1, u_2, u_3\}$, зависящих от координат в плоскости поперечного сечения полостей. Тогда краевая задача формулируется исходя из уравнений движения в операторном виде [2]

$$A_{11}^{(0)} u_1 + A_{12}^{(0)} u_2 + A_{13}^{(0)} u_3 = 0, \quad A_{21}^{(0)} u_1 + A_{22}^{(0)} u_2 + A_{23}^{(0)} u_3 = 0, \quad A_{31}^{(0)} u_1 + A_{32}^{(0)} u_2 + A_{33}^{(0)} u_3 = 0 \quad (6)$$

Так как в случае обобщенной плоской деформации выполняются аналогичные условия, как и при плоской деформации, то можно принять, что осуществимо разделение волн на квазипродольные и квазипоперечные, причем PP-, SV- волны распространяются в плоскости поперечного сечения полостей, а SH-волна является горизонтально поляризованной и ее амплитудные смещения происходят вдоль оси диагональных полостей. Тогда, в случае падения волн растяжения-сжатия (PP-, SV-) в рассмотрение берется дифракционное поле, которое характеризуется составляющими перемещений в плоскости поперечного сечения полости $\bar{u}_p = (u_1, u_2)$. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (6) с

учетом, что все составляющие перемещений, кроме (u_1, u_2) , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2) . Тогда в уравнениях (6) ненулевыми остаются лишь члены

$$A_{11}^{(0)}u_1 + A_{12}^{(0)}u_2 = 0, A_{21}^{(0)}u_1 + A_{22}^{(0)}u_2 = 0, A_{31}^{(0)}u_1 + A_{32}^{(0)}u_2 = 0. \quad (7)$$

Так как коэффициенты в дифференциальных уравнениях в частных производных, входящие в операторный вид уравнений движений (7), являются постоянными, не зависящими друг от друга, можно, применив некоторые преобразования, упростить формулы (7) к следующему виду

$$(A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)})u_1 + (A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)})u_2 = 0, (A_{21}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)})u_1 + (A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)})u_2 = 0. \quad (8)$$

Вводя обозначения

$$A_{11}^{(0)} = A_{11}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{31}^{(0)}; A_{12}^{(0)} = A_{21}^{(0)} = A_{12}^{(0)} + A_{31}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}; A_{22}^{(0)} = A_{22}^{(0)} + A_{32}^{(0)} \cdot A_{32}^{(0)}. \quad (9)$$

можно представить (8) в матричной форме:

$$(B_0' \partial_1^2 + B_1' \partial_1 \partial_2 + B_2' \partial_2^2 + B_3') \bar{u}_p = 0, \quad \bar{u}_p = \{u_1, u_2\} \quad (8^*)$$

$$\text{где } B_0' = \begin{pmatrix} c_{11}' & c_{16}' \\ c_{16}' & c_{66}' \end{pmatrix}, B_1' = \begin{pmatrix} 2c_{16}' & c_{12}' + c_{66}' \\ c_{12}' + c_{66}' & 2c_{26}' \end{pmatrix}, B_2' = \begin{pmatrix} c_{66}' & c_{26}' \\ c_{26}' & c_{22}' \end{pmatrix}, B_3' = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$c_{11}' = c_{11} + c_{55}^2; c_{16}' = c_{14} + c_{55} \cdot c_{35}; c_{66}' = c_{44} + c_{35}^2; c_{12}' = c_{12} + c_{55} \cdot c_{33}; \\ c_{26}' = c_{24} + c_{33} \cdot c_{35}; c_{22}' = c_{22} + c_{33}^2. \quad (10)$$

Коэффициенты c_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$ берутся из соотношений (3).

При падении SH-волн сдвига рассматривается антиплоская деформация полости (условия обобщенной плоской деформации и особенности распространения сдвиговых волн позволяют применить случай антиплоской деформации), а дифракционное поле, в этом случае, характеризуется амплитудными составляющими перемещений $u_3(x'_1, x'_2)$ в осевом направлении. Краевая задача формулируется исходя из уравнений движения (6) с учетом, что все составляющие перемещений, кроме u_3 , равны нулю, а характеристики напряженно-деформированного состояния среды зависят только от координат точек (x'_1, x'_2) . Тогда в уравнениях (7) ненулевыми остаются $A_{13}^{(0)}u_3 = 0, A_{23}^{(0)}u_3 = 0, A_{33}^{(0)}u_3 = 0$. Складывая почленно левые и правые части системы, можно прийти к выражению

$$A_{33}^{(0)}u_3 = 0, \text{ или } \{c_{55}' \partial_1^2 + 2c_{45}' \partial_1 \partial_2 + c_{44}' \partial_2^2 + \omega_0^2\} u_3(x_1, x_2) = 0 \quad (11)$$

где коэффициентами $c_{55}', c_{45}', c_{44}'$ для проведения аналогии обозначены выражения вида

$$c_{55}' = c_{15} + c_{45} + c_{55}; c_{45}' = \frac{1}{2}(c_{13} + c_{45} + c_{25} + c_{34} + 2c_{35}); c_{44}' = c_{34} + c_{23} + c_{33}. \quad (12)$$

Аналогично, упругие коэффициенты c_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$ берутся из соотношений (3), $\omega_0^2 = \omega_1^2 \rho R^2$, $u_1(x'_1, x'_2), u_2(x'_1, x'_2), u_3(x'_1, x'_2)$ – амплитудные составляющие перемещений в отраженной волне, отнесенные к линейному размеру (радиусу) полости R .

Для получения решений необходимо поставить условия первой краевой задачи механики, т.е. рассмотреть случай, когда контур диагональных полостей неподкреплен (свободен от нагрузок).

Решение первой основной задачи для неподкрепленных полостей

Предположим, что контур глубоко заложенных диагональных полостей свободен от воздействия внешних нагрузок. Тогда граничные условия на контурах полостей Γ_l запишутся в виде:

$$(\sigma_{nn} + \sigma_{nn}^*)_{\Gamma_l} = 0, (\sigma_{n\tilde{\theta}} + \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_{\Gamma_l} = 0, (\sigma_{\tilde{\theta}3} + \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_{\Gamma_l} = 0 \quad (13)$$

Здесь σ_{nn}^* , $\sigma_{n\tilde{\theta}}^*$ - нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей волной растяжения-сжатия, в плоскости поперечного сечения полостей; $\sigma_{\tilde{\theta}3}^*$ - касательные напряжения на площадке с нормалью (n_1, n_2) , обусловленные падающей SH-волной сдвига; σ_{nn} , $\sigma_{n\tilde{\theta}}$, $\sigma_{\tilde{\theta}3}$ - соответствующие амплитудные составляющие напряжений в отраженной волне.

Для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (8*), (11) вводятся аффинные преобразования [2], которые позволяют свести дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка (8*), (11) к уравнениям Гельмгольца, решения которых ищутся в рядах по цилиндрическим функциям Ханкеля и Бесселя[3]:

$$u_i = \sum_{(n)} X_{nl}^{(i)} H_n^{(1)}(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}} + s_{nl}^{(i)} J_n(\omega_0^{(i)} r_l^{(i)}) e^{in\kappa_l^{(i)}}, (r_l^{(i)} < R_{lq}^{(i)}), i = 1, 2, 3 \quad l = \overline{1, L} \quad (14)$$

$$s_{nl}^{(i)} = \sum_{q=1, (p)}^L \sum_{q \neq l} X_{pq}^{(i)} H_{p-n}^{(1)}(\omega_0^{(i)} R_{lq}^{(i)}) e^{i(p-n)\kappa_{lq}^{(i)}}, \omega_0^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{c_{11}'}, \omega_0^{(2)} = \omega_1 / \sqrt{c_{66}'}, \omega_0^{(3)} = \omega_0$$

$(R_{lq}^{(i)}, \kappa_{lq}^{(i)})$ – координаты точки $O_{\xi l}^{(i)}$ в системе координат $(r_q^{(i)}, \kappa_q^{(i)})$

Выражения для перемещений и напряжений на контуре диагональных полостей в падающей волне $(u_i^*)_{\Gamma} (i = \overline{1, 3})$, $(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{nn}^*)_{\Gamma}$, $(|\tilde{\omega}'|^2 \sigma_{n\tilde{\theta}}^*)_{\Gamma}$, $(|\tilde{\omega}'| \sigma_{\tilde{\theta}3}^*)_{\Gamma}$, находятся с помощью формул разложений экспоненциальных функций в гармонические ряды.

Используя сложные контурные соотношения для комплексных представлений функций Ханкеля и Бесселя [3,4] с учетом отображающей функции (4), метода обобщенной суперпозиции, теоремы сложения цилиндрических функций [3,5], можно свести представления граничных условий для неподкрепленных диагональных полостей (13) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом редукции[4].

Анализ состояния неподкрепленных диагональных выработок

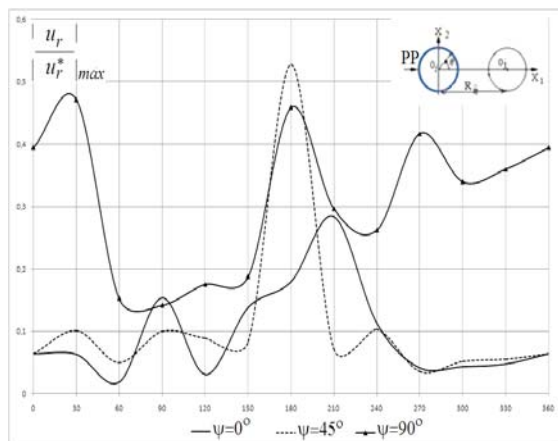
Для динамического анализа состояния диагональных круговых выработок в качестве анизотропного массива берется алевролит с упругими характеристиками пород: $E_1 = 1,074 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 0,523 \cdot 10^5$ кг/см², $G_2 = 0,12 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu_1 = 0,413$, $\nu_2 = 0,198$.

Упругие волны распространяются под углом α от 0 до 180 с диапазоном частот от 1 до 100 Гц (берется наиболее часто встречающийся диапазон частот в реальном измерении). Изменение угла наклона плоскости изотропии φ рассматривается от 0 до 90.

В соответствии с теоретическим решением был разработан алгоритм и составлен пакет прикладных программ в среде Matlab7.0. В системе удерживалось не более 20 уравнений, что позволило удовлетворить граничным условиям с погрешностью менее 1% для амплитуд контурных напряжений $(\sigma_{nn})_{\Gamma}$, $(\sigma_{n\tilde{\theta}})_{\Gamma}$, $(\sigma_{\tilde{\theta}3})_{\Gamma}$ по отношению к соответствующим амплитудным значениям напряжений в падающей волне. Отсечение членов ряда происходило по мере удовлетворения граничным условиям и по мере анализа коэффициентов при неизвестных в уравнениях. Программа тестировалась на результатах для одиночной диагональной выработки и парных выработок, полученных в предыдущих разделах. Показано, что при увеличении длины перемычки между выработками на расстояние более (10-15)R количественная и качественная картины повторяли состояния одиночных диагональных выработок. Изучено влияние физико-механических параметров массива и падающих волн, а также ориентации выработок относительно наклонных слоев массива на НДС двух глубоко заложённых диагональных выработок круглого сечения.

Показано существенное влияние как угла падения волны, угла наклона плоскости изотропии, так и ориентации диагональных выработок. Причем увеличение угла отклонения ψ ведет к увеличению концентрации перемещений и напряжений, при этом в зоне «света» и на перемычке наблюдаются значительные всплески значений перемещений (см.рис.2).

а)



б)

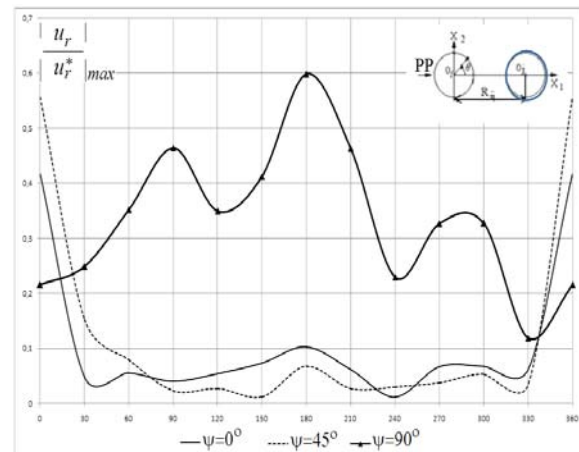


Рис.2. Влияние углов отклонения осей выработок от плоскости простирания изотропии на картину распределения контурных радиальных перемещений двух круговых диагональных выработок

В заключение хотелось бы добавить, что комплексные исследования в данном направлении проводятся в ИММаш имени У.А. Джолдасбекова при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (тема исследований «Разработать и развить методы исследования состояния крупно- и маломасштабных неоднородных горных пород с различными сооружениями» ПФИ «Актуальные проблемы физики, математики, механики и информатики» (Ф.0508) на 2006-2009, 2009-2011 гг. (регр.: №0109РК00668)).

Список литературы

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука. 1980. 213 с.
2. Атымтаева Л.Б. Обобщенно-плоская деформация многосвязного транстропного массива при дифракции упругих волн //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз. 2010. №1. С.131-138.
3. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – Киев: Наукова думка. 1985. 178 с.
4. Masanov Zh., Atymtayeva L., Yagaliyeva B., Myrzakhmetova G. Stationary diffraction of elastic SH-waves onto mutually influencing cavities of arbitrary structure and deep lying in transtropic massif //Proc. of the 3rd WSEAS International Conference on CONTINUUM MECHANICS (CM'08). Cambridge: UK, 2008. ISSN: 1790-2769. P.5-9.
5. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. -Киев: Наукова думка. 1978. 310 с.