Слабое решение интервальной модели Неймана *

А.Т. Латипова
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: alfas_chel@mail.ru

А.В. Панюков
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: a_panyukov@mail.ru

Previously, there was considered an interval model of a developing economy of von Neumann's type and was given precise interval estimation of the number of Frobenius. There is proposed a method of constructing the primal and dual beams of von Neumann, that form the weak position of equilibrium for any point model belonging to considered interval model.

Модель многоотраслевого планирования Неймана оказало большое влияние на теорию экономического роста, и стимулировала развитие математической экономики [1]. Тем не менее, во многих публикациях модель Неймана описывается как невычислимая чисто теоретическая модель (например, [2]), а для практических результатов предлагается использовать модель Леонтьева, являющейся частным случаем модели Неймана. В то же время модель Неймана может быть применена не только для многоотраслевого планирования, но и для решения других задач (например, для оптимизации бюджета продаж при ценовой диверсификации [3]). Поэтому разработка численных методов для модели Неймана является актуальной. Авторами были разработаны эффективные численные методы нахождения положения равновесия, которые могут быть реализованы в программных средствах, использующих вычисления с плавающей точкой [4]. Данные методы основываются на теории игр и линейном программировании.

Общим положением равновесия в модели Неймана (A, B), где A и B - это заданные $n \times m$ матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами $a_{ij} \geq 0,\ b_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots n,\ j = 1, 2, \ldots m$, является решение $(\lambda,\ x,\ w)$ системы билинейных неравенств и уравнений:

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

$$(A - \lambda B)^T\, w \geq 0,\ (w, e^n) = 1,\ w \geq 0, \tag{2}$$

где $e^l \in \mathbf{R}^l,\ l \in \{m, n\}$ такой, что $(\forall i = 1, 2, \ldots, l)\ e^l_i = 1$.

Число λ^{-1} — это равновесный темп роста, который достигается засчет структуры интенсивностей процессов x и структуры равновесных цен на товары w.

Невырожденным положением равновесия в рассматриваемой модели является положение равновесия (λ, x, w), удовлетворяющее дополнительному условию

$$w^T A\, x > 0. \tag{3}$$

Обозначим λ^* максимальное λ, удовлетворяющее (1)-(2). Число λ^* называют числом Фробениуса, а соответствующие ему векторы x^* и w^* - прямым и двойственным векторами Фробениуса. Таким образом, положение равновесия (λ^*, x^*, w^*) является решением

*Поддержано грантом РФФИ №10-07-96003-р_урал_а

следующей задачи математического программирования

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda,x,w \in D(A,B)} \lambda,$$
$$D(A,B) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (A-\lambda B)x \le 0, (A-\lambda B)^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Аналогично обозначим $\lambda_н$ минимальное λ, удовлетворяющее (1)-(2). Число $\lambda_н$ называют числом Неймана, а соответствующие ему векторы $x_н$ и $w_н$ - прямым и двойственным векторами Неймана. В дальнейшем под положением равновесия для модели Неймана подразумевается (λ^*, x^*, w^*).

На практике численные значения элементов матриц затрат и выпуска для модели Неймана получают, используя статистические данные и экспертные оценки, поэтому может возникать неопределенность, которая зачастую является интервальной. Рассмотрим проблему нахождении положения равновесия в модели Неймана (A, B), если значения элементов матриц заданы только в виде интервалов.

Интервальной назовем модель Неймана с интервальными матрицами затрат $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right]\right\}$ и выпуска $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{b_{ij}}, \overline{b_{ij}}\right]\right\}$, $i = (\overline{1,n}),\ j = (\overline{1,m})$, $\mathrm{mid}\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}})/\mathbf{2}$, $\mathrm{mid}\mathbf{B} = (\underline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}})/\mathbf{2}$. Ранее авторами была доказана следующая теорема, позволяющая определить интервал для числа Фробениуса через матрицы верхних и нижних границ [5].

Теорема 1. Пусть тройка $(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})$ является положением равновесия для модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, а $(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})$ является положением равновесия для модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, тогда для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $(\tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{B} \in \mathbf{B})$ её число Фробениуса $\tilde{\lambda}$ принадлежит интервалу $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$.

Также было рассмотрено влияние мультипликативной неопределенности на положение равновесия [6].

Теорема 2. Если (λ^*, x^*, w^*) является положением равновесия модели Неймана $(\mathrm{mid}\ \mathbf{A}, \mathrm{mid}\ \mathbf{B})$, то для любой точечной модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\left(\tilde{A} = \beta_1 \mathrm{mid}\ \mathbf{A},\ \tilde{B} = \beta_2 \mathrm{mid}\ \mathbf{B}\right)$ тройка $(\lambda^* \beta_1/\beta_2,\ x^*,\ w^*)$ является положением равновесия.

Таким образом, в случае мультипликативной неопределенности остаются постоянными прямой и двойственный вектора Фробениуса, изменяется только число Фробениуса. Однако устойчивость прямого и двойственного векторов Фробениуса может наблюдаться и при более общей интервальной неопределенности.

Пример. Модель (A, B) размера 2×2, элементы матриц которой удовлетворяют ограничениям

$$a_{21} + a_{22} \le \lambda^*(b_{21} + b_{22}); a_{11} = b_{11};\ \ a_{12} = b_{12};$$

имеет положение равновесия $\{\lambda^*, (x^*)^T{=}(0,5; 0,5), (w^*)^T = (1; 0)\}$.

Пример показывает, что существуют диапазоны значений для элементов матриц, при которых прямой и двойственный векторы Фробениуса $(x^*,\ w^*)$ не будут меняться. В связи с этим можно ввести понятия сильного и слабого решений [7].

Сильным решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x_s, w_s) такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$, существует положение равновесия $(\tilde{\lambda}, x_s, w_s)$.

Наличие слабого решения обеспечивает допустимость ограничений (1)-(2) для интервальной модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Слабым решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x', w') такую, что для любой точечной модели Неймана для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$, выполняются ограничения

$$\begin{cases} (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \le 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \ge 0; \\ (x', e^m) = 1; \ \ (w', e^n) = 1; \ \ x', w', \lambda \ge 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение позволяет проверить, является ли пара векторов (x, w) слабым решением.

Теорема 3. Если для пары векторов (x'', w'') разрешима система ограничений:

$$\begin{cases} (\overline{\mathbf{A}} - \underline{\lambda}\, \underline{\mathbf{B}})x'' \le 0; \ \ (\underline{\mathbf{A}} - \overline{\lambda}\, \overline{\mathbf{B}})^T w'' \ge 0; \\ (x'', e^m) = 1; \ \ (w'', e^n) = 1; \ \ x'', w'' > 0; \end{cases}$$

то (x'', w'') является слабым решением интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Доказательство этого утверждения фактически является компиляцией доказательства теоремы 2.26, приведенной в [8].

Если для модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ существует слабое решение, то его можно использовать для оценки числа Фробениуса λ'.

Теорема 4. Пусть $(x',\ w')$ - слабое решение интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Если для точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$,

$$\lambda' = \max\{\lambda | \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \le 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \ge 0\},$$

то $\lambda' \in [\underline{\lambda}_{\text{н}}; \bar{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}_{\text{н}}$ - это число Неймана для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w})$ - положение равновесия для модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Если $\lambda' = \max\{\lambda | \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \le 0; \ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \ge 0\}$, то

$$\lambda' = \min \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w'_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ij} w'_i}.$$

Так как тройка (λ', x', w') является допустимым, но не оптимальным решением задачи (4), то $\lambda' \le \tilde{\lambda}$. Согласно теореме 1 имеем $\tilde{\lambda} \le \bar{\lambda}$, откуда $\lambda' \le \bar{\lambda}$.

Пара $(x',\ w')$ является слабым решением для модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, поэтому (x', w') являются допустимыми векторами для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, а значит, выполняется ограничение

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \overline{\mathbf{B}})w' \ge 0.$$

Пусть $\underline{\lambda}' = \max\{\lambda | \ \ (\underline{\mathbf{A}} - \lambda \overline{\mathbf{B}})w' \ge 0\}$, тогда

$$\underline{\lambda}' = \min \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_{ij} w'_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{b}_{ij} w'_i}.$$

Тройка $(\underline{\lambda}', x', w')$ является допустимым решением для модели $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, поэтому $\underline{\lambda} \ge \underline{\lambda}' \ge \underline{\lambda}_{\text{н}}$. Так как $(\tilde{A}, \tilde{B}):\quad \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$, $\underline{\mathbf{A}} = \tilde{A} - \Delta A$, $\overline{\mathbf{B}} = \tilde{B} + \Delta B$, $(\Delta a_{ij} \ge 0,\ \Delta b_{ij} \ge 0)$. Отсюда

$$\underline{\lambda}_{\text{н}} \le \underline{\lambda}' = \min \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_{ij} w'_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{b}_{ij} w'_i} \le \lambda' = \min \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w'_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ij} w'_i}.$$

Таким образом, $\lambda' \geq \underline{\lambda}_{\text{н}}$. Теорема доказана.

Согласно теореме 4 оценка числа Фробениуса λ' может оказаться меньше $\underline{\lambda}$.

В следующей теореме используется другой подход к оценке числа Фробениуса.

Теорема 5. Пусть (x^*, w^*) - прямой и двойственный векторы Фробениуса для двух точечных моделей Неймана $(\breve{A}, \breve{B})$ и $(\hat{A}, \hat{B})$ таких, что $\hat{a}_{ij} - \breve{a}_{ij} = \Delta a_{ij} \geq 0$, $\hat{b}_{ij} - \breve{b}_{ij} = \Delta b_{ij} \geq 0$. Пусть число Фробениуса модели $(\breve{A}, \breve{B})$ равно $\breve{\lambda}$, а для модели $(\hat{A}, \hat{B})$ оно равно $\hat{\lambda}$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \breve{\lambda}$. Тогда если для модели $(\breve{A}, \breve{B})$ положение равновесия $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ является невырожденным, то

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T (\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T (\breve{B} + \Delta_B)x^*}. \tag{5}$$

Доказательство. По теореме о дополняющей нежесткости должны выполняться следующие ограничения:

$$(w^*)^T(\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B})x^* = 0; \tag{6}$$

$$(w^*)^T(\hat{A} - \hat{\lambda}\hat{B})x^* = 0. \tag{7}$$

Если для модели $(\breve{A}, \breve{B})$ положение равновесия $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ является невырожденным, то согласно (1)-(3)

$$(w^*)^T \breve{A}x^* > 0;\ \left(\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B}\right) x^* \leq 0; w^* \geq 0;$$

откуда следует, что

$$(w^*)^T \breve{B}x^* > 0. \tag{8}$$

Тогда

$$\breve{\lambda} = \frac{(w^*)^T \breve{A}x^*}{w^{*T}\breve{B}x^*} \tag{9}$$

Заменим $\hat{\lambda} = \breve{\lambda} + \Delta\lambda$, $\hat{A} = \breve{A} + \Delta_A$ и $\hat{B} = \breve{B} + \Delta_B$ в (7); получим

$$(w^*)^T (\breve{A} - \breve{\lambda}\breve{B} + \Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B - \Delta\lambda(\breve{B} + \Delta_B))x^* = 0,$$

откуда с учетом (6) и (8):

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T (\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T (\breve{B} + \Delta_B)x^*}.$$

Теорема доказана.

Если интервальная модель Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет сильное решение (x_s, w_s) , то можно оценить изменение числа Фробениуса для точечной модели.

Теорема 6. Пусть (x_s, w_s) - сильное решение для интервальной модели Неймана $\left([\breve{A}, \hat{A}], [\breve{B}, \hat{B}]\right)$, для моделей Неймана $(\breve{A}, \breve{B})$ и $(\hat{A}, \hat{B})$ выполняются условия теоремы 4. Пусть имеется точечная модель Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\quad \tilde{A} = \breve{A} + k\Delta_A, \quad \tilde{B} = \breve{B} + k\Delta_B,$ $k \in [0; 1]$; её число Фробениуса равно $\tilde{\lambda}$. Тогда

$$\tilde{\lambda} - \breve{\lambda} = k\Delta\lambda \frac{w_s^T(\breve{B} + \Delta_B)x_s}{w_s^T(\breve{B} + k\Delta_B)x_s}. \tag{10}$$

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

Из (10) следует, что изменение числа Фробениуса может происходить неравномерно.

Список литературы

[1] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М: Наука, 1984. 296 с.

[2] Цисарь И.Ф. Компьютерное моделирование экономики. М.: Диалог-МИФИ, 2002. 384 с.

[3] Панюков А.В., Латипова А.Т. Оптимизация бюджета продаж // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: "Рынок: теория и практика". Челябинск: ЮУрГУ, 2006. Вып. 4, №15 (170). С. 116–120.

[4] Latipova A.T., Panyukov A.V. Numerical Techniques for Finding Equilibrium in von Neumann's Model // Computational Mathematics and Mathematical Physics (Springer-MAIK: Nauka-Interperiodica). 2008. Vol. 48, N. 14. P. 1999–2006.

[5] Панюков А.В., Латипова А.Т. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2008. Т. 10, № 2 (27). С. 150–153.

[6] Panyukov A.V., Latipova A.T. Finding Equilibrium in Von Neuamnn's Model // 13 IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. Moscow: Elsevier Ltd. 2009. P. 395–399.

[7] Панюков А.В., Латипова А.Т. Интервальная неопределенность в модели Неймана // Дискретная оптимизация и исследование операций. Новосибирск, 2010. С. 213.

[8] Фидлер М., Недома Й. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2008. 288 с.