РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПО ГРАДИЕНТАМ

А.М. Блохин, Д.Л. Ткачев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

SOLUTION REGULARITY AND WELL-POSEDNESS OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEM WITH THE SQUARE GRADIENT NONLINEARITY

A.M. Blokhin, D.L. Tkachev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk

Novosibirsk State University, Novosibirsk

*We study an initial-boundary value problem for a system of quasilinear equations which are effectively used for finding by the stabilization method numerical stationary solutions of the hydrodynamical model of charge transport in the silicon MESFET (Metal Semiconductor Field Effect Transistor). This initial boundary value problem has the following peculiarities: the PDE system is not a Cauchy-Kovalevskaya-type system; the boundary is a non-smooth curve and has angular points; nonlinearity of the problem is mainly connected with squares of gradients of the unknown functions. The optimal condition (S. Hildebrandt, K.-O. Widman. Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order, Math. Z., 142 (1975)) allows one to prove the - regularity and existence of a weakened solution, and the uniqueness of this solution under some additional conditions.*

**Введение**

В последнее время при макроскопическом описании процесса переноса зарядов в полупроводниках помимо широко известных "дрейф-диффузионных" уравнений [1]-[3] и моделей типа "переноса энергии" [4]-[6] стали использоваться новые модели гидродинамического типа [7,8], которые выводятся из бесконечной системы моментных уравнений с помощью подходящей процедуры замыкания (моментные соотношения - следствия уравнения переноса Больцмана).

В настоящей работе исследуется гидродинамическая модель, когда в качестве материальной основы выбран плоский кремниевый транзистор MESFET ("Metal Semiconductor Field Effect Transistor"). Замыкание системы моментных уравнений осуществляется с помощью известного принципа максимума энтропии (MEP) [9], [10] (см. также работу [11], где приведены дополнительные ссылки).

Следуя [9], [10], [12], выпишем квазилинейную систему моментных уравнений в двумерном случае и в безразмерном виде (процесс обезразмеривания подробно описан в работе [13]):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

Здесь *R* – электронная плотность, *E -* энергия электронов,  **–** вектор скорости электронов (в декартовых координатах (*x,y*)),  **–** поток энергии,

,

– электрический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

коэффициенты *с*, в системе (1.1) – известные гладкие функции от энергии *E* (их конкретный и достаточно сложный вид приведен в [12], [13]);

– плотность легирования, – некоторая постоянная (см. [13]). Схематически полупроводниковый транзистор MESFET изображен на Рис. 1. Сформулируем для системы (1.1), (1.2) следующие граничные условия ([13], [14], см. Рис. 1):

|  |
| --- |
| Stan1_1.eps |
| Рис.1 Схематическое изображение транзистора MESFET |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

и начальные данные при

Здесь,

– часть границы (см. Рис. 1),

**l** – единичный вектор внешней нормали к границе некоторые постоянные [14].Постоянная носитназвание напряжения смещения.

Кусочно-постоянная функция , функция легирования, определяется так:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

где подмножество

В стационарном случае исходная проблема (1.1)-(1.3) сводится к решению эллиптической системы уравнений

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

с несколько измененными по сравнению с (1.3) граничными условиями:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

**Замечание.** Исследование множества решений задачи (1.5), (1.6) принципиально важно при обосновании того, что предложенная модель адекватно описывает процесс переноса зарядов в полупроводниках. Так, в частности, из физических соображений следует, что после снятия напряжения смещения (это соответствует случаю, когда в

граничных условиях (1.6)) система через определенное время должна перейти в состояние равновесия (так называемое состояние глобального термодинамического равновесия). А, следовательно, решение проблемы (1.1)-(1.3) с данными граничными условиями и произвольными начальными данными с возрастанием времени к бесконечности должно стремиться к выбранному стационарному решению.

**Основные результаты**

Определим сначала вектор

Тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

где

а

Обозначим

Пусть выполнено следующее соотношение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |

Как обычно, – символы для обозначения пространств Гельдера и Соболева соответственно.

Справедливы утверждения.

**Теорема 1.** Предположим, что и верно неравенство (2.2). Тогда ограниченное обобщенное решение проблемы (1.5), (1.6) принадежит пересечению пространств При этом справедлива оценка

Здесь – некоторые постоянные.

**Теорема 2.** Пусть выполнено неравенство (2.2). Тогда смешанная задача (1.5), (1.6) имеет решение в пространстве – некоторый параметр. При соблюдении определенного дополнительного условия такое решение единственно.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00320-а), СО РАН (междисциплинарный проект № 91, 2009-2011 г.г.), а также в ходе реализации программ Министерства образования Российской Федерации "Научные и научно-педагогические кадры России", 2009-2013 г.г.(ГК № P 1180), "Развитие потенциала высшей школы", 2009-2011 г.г.(№ 2.1.1/9896).

**Список литературы**

1. S. Selberherr. Analysis and Simulation of Semiconductor Devices, Wien, New York, Springer-Verlag, 1984.
2. W. Hänsch. The drift diffusion equations and its applications in MESFET modeling, Wien, Springer-Verlag, 1991.
3. P. Markovich, C.A. Ringhofer, C. Schmeister. Semiconductor equations, Wien, Springer-Verlag, 1990.
4. D. Chen, E.C. Kan, U. Ravaioli, C-W. Shu, R. Dutton. An improved energy-transport model including nonparabolicity and non-maxwellian distribution effects, IEEE on Electron Device Letters, 13 (1992), 26-28.
5. E. Lyumkis, B. Polsky, A. Shir, P. Visocky. Transient semiconductor device simulation including energy balance equation, COMPEL, 11 (1992), 311-325.
6. N.B. Abdallah, P. Degond. On a hierarchy of macroscopic models for semiconductors, J. Math. Phys, 37 (1996), 3308-3333.
7. A.M. Anile, V. Romano. Hydrodynamical modeling of charge carrier transport in semiconductors, MECCANICA, 35 (2000), 249-296.
8. A.M. Anile, G. Mascali, V. Romano. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2003.
9. A.M. Anile, V. Romano. Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the moment equations, Cont. Mech. Thermodyn., 11 (1999), 307-325.
10. V. Romano. Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the production terms in the moment equations, Cont. Mech. Thermodyn., 12 (2000), 31-51.
11. A.M. Blokhin, D.L. Tkachev. Local-in-time well-posedness of regularized mathematical model for silicon MESFET, ZAMP, 61, (2010), 849-864.
12. A.M. Blokhin, R.S. Bushmanov, V. Romano. Nonlinear asymptotic stability of the equilibrium state for the MEP model of charge transport in semiconductors, Nonlinear Analysis, 65 (2006), 2169-2191.
13. A.M. Blokhin, R.S. Bushmanov, A.S. Rudometova, V. Romano. Linear asymptotic stability of the equilibrium state for the 2D MEP hydrodynamical model of charge transport in semiconductors, Nonlinear Analysis, 65 (2006), 1018-1038.
14. V. Romano. 2D simulation of a silicon MESFET with a non-parabolic hydrodynamical model based on the maximum entropy principle, J. Comp. Phys., 176 (2002), 70-92.

`