Определение приближенного квазирешения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода и Фредгольма 1-го рода методом интервального осреднения.

А.Ф. Латыпов, О.В.Попик
Институт теоретической и прикладной механики
e-mail: `latypov@itam.nsc.ru`

Аннотация

В основе метода лежит условие равенства нулю средних значений невязок уравнений на интервалах, на которые разбивается область определения функции правой части. Для уравнений Вольтерра решение строится в классе кусочно-постоянных функций, для уравнений Фредгольма – в классе кусочно-постоянных, классе непрерывных кусочно-линейных функций и в C_1. Число интервалов и распределение их длин определяются из условия минимума среднеквадратичной невязки уравнений.

Для решения некорректных задач, каковыми в общем случае являются интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода и Фредгольма 1-го рода, используются методы регуляризации [1], [2]. Эти методы портят уравнения. В данной работе используется метод подбора [1], дополненный условием равенства нулю средних значений невязок уравнений на интервалах, на которые разбивается область определения квазирешения. При этом уравнения удовлетворяются также, по крайней мере, еще в одной точке внутри каждого интервала. Это условие позволяет получать квазирешение в выбранном классе функций без введения стабилизирующего функционала. Положительным фактором является также то, что операция осреднения сглаживает ошибки задания или измерения функции правой части и ядра.

A. Линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода.

1 Приближенное квазирешение в классе кусочно-постоянных функций.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода вида

$$\int_a^x \mathbf{K}(x,y)\,\mathbf{g}(y)\,dy = \mathbf{f}(x), \qquad x \in [a,\, b]. \tag{1.0.1}$$

Ядро $\mathbf{K}(x,\,y)$ и правая часть $\mathbf{f}(x)$ – известные интегрируемые функции. Разобьем отрезок $[a,\,b]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения (узлы), $i = \overline{1, N}\,;$, $x_1 = a$, $x_{N+1} = b$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначим квазирешение на i- ом интервале $\mathbf{g}(y) = \mathbf{g}_i = const$, и обозначим также

$$\begin{aligned} & u \in [x_l, x_{l+1}]\,,\ \eta = \frac{y - x_l}{h_l},\ h_l = x_{l+1} - x_l,\ \xi = \frac{u - x_l}{h_l};\ \eta, \xi \in [0,1]\,; \\ & \int\limits_{x_l}^{u} \mathbf{K}(x,\,y)\,dy = h_l \int\limits_{0}^{\xi(u)} \mathbf{K}(x,\,y(\eta))\,d\eta = h_l \mathbf{k}_{l0}(x, \xi(u)) \end{aligned} \quad . \tag{1.0.2}$$

Пусть на отрезках $[x_l, x_{l+1}]$ значения $\{\mathbf{g}_l\}$, $l = \overline{1, i-1}$ определены. Тогда функция невязки $\mathbf{z}_i(x)$ для i- го интервала записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}_i(x) = \mathbf{Q}_i(x) + h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x))\ \mathbf{g}_i - \mathbf{f}_i(x)\,, \\ & \mathbf{Q}_i(x) = \sum_{l=1}^{i-1} h_l \mathbf{k}_{l0}(x, 1)\ \mathbf{g}_l,\ \ x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned} \quad . \tag{1.0.3}$$

Используя условие

$$\langle \mathbf{z}_i(x) \rangle = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}_i(x)\,dx = 0, \tag{1.0.4}$$

из (1.0.3) получим

$$\mathbf{g}_i = -\left\langle h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \right\rangle^{-1} \cdot \left[\langle \mathbf{Q}_i(x) \rangle - \langle \mathbf{f}_i(x) \rangle \right]. \tag{1.0.5}$$

Предполагается, что существует хотя бы одно разбиение интервала построения квазирешения, при котором матрицы $\langle h_i \mathbf{k}_{i0}(x, \xi(x)) \rangle$ не вырождены. В противном случае исходная физическая задача сформулирована, по-видимому, неверно. (В одномерном случае, если среднее значение функции на произвольных интервалах равно нулю, то функция тождественно равна нулю). Из условия (1.0.4) следует также, что на каждом интервале, по крайней мере, в одной точке внутри интервала $x_i^* \in (x_i, x_{i+1})$ невязка равна нулю. Квазирешение (1.0.5) зависит от количества интервалов N и распределения их длин $h_i, i = \overline{1, N}$. Введем функционал среднеквадратичной невязки (штрих сверху означает транспонирование)

$$\Phi(N,\,x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}'_i(x)\,\mathbf{z}_i(x)\,dx. \tag{1.0.6}$$

Число интервалов и распределение их длин получим из решения задачи

$$\Phi_* = \inf_{N, x_i} \Phi(N,\,x_i)\,,\ x_{i-1} < x_i < x_{i+1},\ \ i = \overline{2, N}. \tag{1.0.7}$$

Число интервалов N конечно, так как исходная задача некорректна. Функционал среднеквадратичной невязки (1.0.6) – многоэкстремальная функция по переменным x_i. Для получения точного решения задачи (1.0.7) требуется выполнить громадный объем вычислений. Приближенное решение в данной работе определяется посредством алгоритма циклического покоординатного сканирования функционала в заданном числе точек с выбором лучшей точки для последовательности значений N. Данный алгоритм естественно не обеспечивает в общем случае получение точного решения задачи (1.0.6). Однако по сравнению с алгоритмами поиска локального экстремума он дает существенно меньшие значения функционала. Значение $\Phi_* = 0$ соответствует точному решению. Поэтому получаемое значение Φ_* является характеристикой качества решения.

2 Приближенное квазирешение в классе кусочно-линейных функций.

Запишем приближенное квазирешение на i- ом интервале в форме линейной функции

$$\mathbf{g}_i(y) = \mathbf{g}_{i0}(1-\eta) + \mathbf{g}_{i1}\eta,\ \eta = \frac{y - x_i}{h_i},\ h_i = x_{i+1} - x_i\, \eta \in [0,1], \tag{2.0.1}$$

и обозначим также в дополнение к (1.0.2)

$$\int_0^{\xi(u)} \mathbf{K}(x,\, y(\eta))\, \eta d\eta = \mathbf{k}_{l1}(x, \xi(u))\ ,\ \xi \in [0,1]\,.$$

Пусть на отрезках $[x_l, x_{l+1}]$, $l = \overline{1, i-1}$ решения $\{\mathbf{g}_l(y)\}$ определены. Тогда функция невязки $\mathbf{z}_i(x)$ для i- го интервала записывается в следующем виде

$$\begin{array}{l} \mathbf{z}_i(x) = \mathbf{Q}_i(x) + h_i\{[\mathbf{k}_{i0}(x,\xi(x)) - \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))]\, \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\, \mathbf{g}_{i1}\} - \mathbf{f}_i(x)\,, \\ \mathbf{Q}_i(x) = \sum\limits_{l=1}^{i-1} h_l\{[\mathbf{k}_{l0}(x,1) - \mathbf{k}_{l1}(x,1)]\, \mathbf{g}_{l0} + \mathbf{k}_{l1}(x,1)\, \mathbf{g}_{l1}\},\ x \in [x_i, x_{i+1}] \end{array}. \tag{2.0.2}$$

Если значение $\mathbf{g}_{10}$ известно, то используя условие (1.0.4), получим

$$\mathbf{g}_{i1} = \langle \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\rangle^{-1}\left\{\frac{\langle \mathbf{f}_i(x)\rangle - \langle \mathbf{Q}_i(x)\rangle}{h_i} - [\langle \mathbf{k}_{i0}(x,\xi(x))\rangle - \langle \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\rangle]\, \mathbf{g}_{i0}\right\} \tag{2.0.3}$$

Пусть теперь значение $\mathbf{g}_{10}$ неизвестно. Предположим также, что значения функций в узлах слева и справа различны $g_{i1} \neq g_{i+1,0}$. Введем функционал

$$F_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) = \frac{1}{2h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{z}'_i(x)\, \mathbf{z}_i(x)\ dx. \tag{2.0.4}$$

Значения $\{\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}\}$ определим из условия минимума (2.0.4) при равенстве нулю средней невязки на интервале $[x_i, x_{i=1}]$

$$\begin{array}{l} \langle \mathbf{z}_i(x)\rangle = \langle \mathbf{Q}_i(x)\rangle - \langle \mathbf{f}_i(x)\rangle + \\ \qquad h_i\{[\langle \mathbf{k}_{i0}(x,\xi(x))\rangle - \langle \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\rangle]\, \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\rangle\, \mathbf{g}_{i1}\} = 0 \end{array} \tag{2.0.5}$$

По методу множителей Лагранжа определяем составной функционал

$$\Omega_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) = F_i(\mathbf{g}_{i0}, \mathbf{g}_{i1}) + \frac{1}{2}\ \langle \mathbf{z}_i(x)\rangle'\, \langle \mathbf{z}_i(x)\rangle\,. \tag{2.0.6}$$

Для сокращения записей обозначим

$$\mathbf{P}_i(x) = \mathbf{Q}_i(x) - \mathbf{f}_i(x)\,, \mathbf{A}_i(x) = h_i[\mathbf{k}_{i0}(x,\xi(x)) - \mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))]\,, \mathbf{B}_i(x) = h_i\mathbf{k}_{i1}(x,\xi(x))\,.$$

Необходимые условия минимума (2.0.6) дают следующие уравнения

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{P}(x) + \mathbf{A}(x)\, \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{B}(x)\, \mathbf{g}_{i1}]^{\,T}\mathbf{A}(x)\ dx + \\ \lambda[\langle \mathbf{P}(x)\rangle + \langle \mathbf{A}(x)\rangle\, \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{B}(x)\rangle\, \mathbf{g}_{i1}]^{\,T}\langle \mathbf{A}(x)\rangle = 0, \\ \dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{P}(x) + \mathbf{A}(x)\, \mathbf{g}_{i0} + \mathbf{B}(x)\, \mathbf{g}_{i1}]^{\,T}\mathbf{B}(x)\ dx + \\ \lambda[\langle \mathbf{P}(x)\rangle + \langle \mathbf{A}(x)\rangle\, \mathbf{g}_{i0} + \langle \mathbf{B}(x)\rangle\, \mathbf{g}_{i1}]^{\,T}\langle \mathbf{B}(x)\rangle = 0 \end{array}. \tag{2.0.7}$$

3 Линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода с разностным аргументом

$$\mathbf{F}(t) = -\int\limits_0^t \frac{\partial \mathbf{U}(t-\tau)}{\partial \tau}\mathbf{G}(\tau)\,d\tau;\ \ t \in [0,T]. \tag{3.0.1}$$

Вектор-функция $\mathbf{F}(t)$ $[r \times 1]$ и матрица $\mathbf{U}(t)\,[r \times r]$ (в квадратных скобках указаны размеры матриц) заданы в точках $t_k = h \cdot k,\ k = \overline{0, L},\ h = T/L$. Вектор-функция $\mathbf{G}(t)\,[r \times 1]$ подлежит определению. Уравнение (2.0.1) описывает линейную динамическую систему, имеющую r входов и r выходов. Решение будем строить в классе кусочно-постоянных функций. Пусть на интервалах $[t_l, t_{l+1}]$ решения $\{\mathbf{G}_l\}$ определены, $l = \overline{0, i-1}$, $N+1$ – число интервалов. Тогда функция невязки $\mathbf{z}(t)$ для i - го интервала записывается в следующем виде

$$\begin{array}{l} \mathbf{z}(t) = \mathbf{Q}(t) - \mathbf{U}(t-t_i)\cdot \mathbf{G}_i,\ t \in [t_i, t_{i+1}] \\ \mathbf{Q}\ (t) = \mathbf{F}(t) + \sum\limits_{l=0}^{i-1}\left[\mathbf{U}(t-t_{l+1}) - \mathbf{U}(t-t_l)\right]\cdot \mathbf{G}_l \end{array}. \tag{3.0.2}$$

На матрицу нормальных реакций $\mathbf{U}(t)$ наложены условия $\mathbf{U}(0) = \dot{\mathbf{U}}(0) = 0$, соответствующие физической системе (скорость распространения сигнала конечна). Поэтому минимальная длина интервала должна быть конечной величиной. Выполним осреднение в уравнении (3.0.2) $(H_i = t_{i+1} - t_i)$

$$< \mathbf{z}_{\mathrm{i}} > = \frac{1}{H_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{z}\ (t)\,dt,\ \ < \mathbf{Q}_{\mathrm{i}} > = \frac{1}{H_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{Q}(t)\,dt,\ \ < \mathbf{U}_i > = \frac{1}{H_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_i)\,dt,$$

и используя условие равенства нулю невязки в среднем на интервале $< \mathbf{z}_i > = 0$, получим решение

$$\begin{array}{l} \mathbf{G}_{\mathrm{i}} = < \mathbf{U}_i >^{-1} \cdot < \mathbf{Q}_{\mathrm{i}} > \\ < \mathbf{Q}_{\mathrm{i}} > = \frac{1}{H_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(t)\,dt + \frac{1}{H_i}\sum\limits_{l=0}^{i-1}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_{l+1})\ dt - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{U}(t-t_l)\ dt\right]\cdot \mathbf{G}_{\mathrm{l}} \end{array}. \tag{3.0.3}$$

Определенные интегралы в (3.0.3) вычисляются методом трапеций. Решение $\mathbf{G}_i,\ i = \overline{0, N}$ зависит от количества интервалов $N+1$ и распределения их длин H_i. Для получения этого распределения вводится функционал среднеквадратичной невязки (1.0.6) и решается задача (1.0.7). Основой технологии [3] является изложенный метод.

4 Линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода вида

$$\int\limits_a^b K(x,y)\,g(y)\ dy = f(x),\ x \in [c,\,d]. \tag{4.0.1}$$

Ядро $K(x,\,y)$ и правая часть $f(x)$ – известные интегрируемые функции. Разобьем отрезок $[a,\,b]$ на n интервалов, y_j – точки разбиения, $j = \overline{1, n}$; $y_1 = a$, $y_{n+1} = b$; $h_j = y_{j+1} - y_j$ – длина j- го интервала.

4.1 Решение – кусочно-постоянная функция.

Пусть на j- ом интервале $g(y) = g_j = const$. Обозначим интегралы

$$\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} K(x,\, y)\, dy = k_j(x)\,,$$

и определим матрицы $\mathbf{C}(x)\,[1 \times n] = \{\, k_j(x)\}$, $\mathbf{G}\,[n \times 1] = \{\, g_j\}$. Тогда уравнение (4.0.1) запишется в следующем виде

$$z(x) = \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{G} - f(x) = 0. \tag{4.1.1}$$

Разобьем также отрезок $[c,\, d]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения, $i = \overline{1, N}$, $x_1 = c$, $x_{N+1} = d$. Обозначим далее определенные интегралы

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k_j(x)\, dx = k_{ij},\ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f_i,\ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} z(x)\, dx = z_i,$$

определим матрицы $\mathbf{Q}\,[N \times n] = \{\, k_{ij}\}$, $\mathbf{F}\,[N \times 1] = \{f_i\}\,, \mathbf{Z}\,[N \times 1] = \{z_i\}$. Проинтегрируем уравнение (3.1.1) на N интервалах и положим равным нулю среднее значение невязки на каждом интервале $\mathbf{Z} = 0$. Получим уравнение

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{F}. \tag{4.1.2}$$

Для определения решения $\mathbf{G}$ введем функционал

$$\Phi(\mathbf{G}, n,\, N, x_i, y_j) = \frac{1}{2} \int\limits_c^d z^2(x)\, dx. \tag{4.1.3}$$

При фиксированных значениях $(n,\, N, x_i, y_j)$ запишем необходимые условия условного минимума функционала Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{G}} + \mathbf{\Lambda}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{G}} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F}) = 0, \tag{4.1.4}$$

где $\mathbf{\Lambda}\,[N \times 1]$ – множители Лагранжа. Далее, используя (4.1.1), (4.1.3) уравнение (4.1.4) принимает вид

$$\begin{array}{l} \mathbf{G}'\mathbf{M} + \Lambda'\mathbf{Q} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{M}\,[n \times n] = \int\limits_c^d \mathbf{C}'(x)\ \mathbf{C}(x)\, dx,\ \ \mathbf{b} = \int\limits_c^d f(x)\ \mathbf{C}(x)\, dx \end{array}. \tag{4.1.5}$$

Выражение для $\mathbf{G}$ определяется из решения системы уравнений (4.1.2), (4.1.5)

$$G = (Q'Q)^{-1}\, Q'F. \tag{4.1.6}$$

При $N = n$ решение (4.1.6) имеет вид

$$G = Q^{-1} F. \tag{4.1.7}$$

Для определения параметров $(n,\, N, x_i, y_j)$ используется алгоритм минимизации функционала Φ из 1-го раздела.

4.2 Решение – непрерывная кусочно-линейная функция.

Представим решение на каждом j -ом интервале линейной функцией

$$g_j(\xi) = g_j \cdot (1-\xi) + g_{j+1} \cdot \xi, \;\; \xi = h_j^{-1}(y - y_j), \; \xi \in [0, 1]. \tag{4.2.1}$$

Здесь $g_j = g(y_j)$. Подставляя (4.2.1) в (4.0.1), получим

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \left[g_j A_j(x) + g_{j+1} B_j(x) \right] = f(x), \\ A_j(x) = \int\limits_0^1 K(x, y_j + h_j\xi)\,(1-\xi)\,d\xi, \; B_j(x) = \int\limits_0^1 K(x, y_j + h_j\xi)\,\xi\,d\xi \end{array}.$$

Сгруппируем члены

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n+1} \left[h_{j-1} B_{j-1}(x) + h_j A_j(x) \right] g_j = f(x), \\ h_0 = B_0 = h_{n+1} = A_{n+1} = 0 \end{array}. \tag{4.2.2}$$

Сохраним обозначения раздела (4.0.1) для интегралов

$$k_j(x) = h_{j-1} B_{j-1}(x) + h_j A_j(x)$$

и матриц $\mathbf{C}(x)\,[1 \times n+1] = \{\, k_j(x)\}$, $\mathbf{G}\,[n+1 \times 1] = \{\, g_j\}$. Тогда уравнение (4.1.1) сохраняет свой вид и для данного случая. Повторяя последующие операции, получим решение (4.1.6) при $N < n+1$и (4.1.7) при $N = n+1$. Размер матрицы $\mathbf{Q}\,[N \times n+1]$. Сохраняется также процедура определения параметров $(n,\, N, x_i, y_j)$.

4.3 Решение в C_1.

Представим решение на j -ом интервале в следующей форме

$$g_j(\xi) = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \phi_k(\xi), \;\;\; \xi = h_j^{-1}(y - y_j), \; \xi \in [0, 1], \tag{4.3.1}$$

и выберем функции $\phi_k(\xi)$ так, чтобы коэффициенты были равны значениям функции и ее производных на концах интервала по аналогии с построением интерполяционного полинома Эрмита

$$\alpha_1 = g_j(0), \;\; \alpha_2 = g_j(1), \;\; \alpha_3 = \frac{dg_j(0)}{d\xi} = p_j h_j, \;\; \alpha_4 = \frac{dg_j(1)}{d\xi} = p_{j+1} h_j. \tag{4.3.2}$$

Здесь $p_j = dg(y_j)/dy$. Для этого функции $\phi_k(\xi)$ должны удовлетворять условиям, представленным в таблице. Зададим функции полиномами третьей степени $\phi_k(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_{k\,i}\xi^i$. Тогда требуемым условиям соответствуют функции

$$\begin{array}{l} \varphi_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \varphi_2(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \\ \varphi_3(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \;\; \varphi_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \end{array}. \tag{4.3.3}$$

Обозначим

$$\int\limits_0^1 K(x, y_j + h_j\xi)\,\phi_k(\xi)\,d\xi = k_{jk}(x). \tag{4.3.4}$$

Подставим (4.3.1) со значениями (4.3.2), (4.3.3) в (3.0.1). Получим

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n+1} \left[c_j(x)\, g_j + d_j(x)\, p_j \right] = f(x), \\ c_j(x) = h_{j-1} k_{j-1,2}(x) + h_j k_{j,1}(x), \\ d_j(x) = h_{j-1}^2 k_{j-1,4}(x) + h_j^2 k_{j,3}(x), \\ h_0 = k_{02} = k_{04} = 0;\; h_{n+1} = k_{n+1,1} = k_{n+1,3} = 0 \end{array} . \tag{4.3.5}$$

Введем матрицы

$$\mathbf{C}\,[1 \times n+1] = \{ c_j(x) \}, \; \mathbf{D}\,[1 \times n+1] = \{ d_j(x) \}, \; \mathbf{G}\,[n+1 \times 1] = \{ g_j \}, \; \mathbf{P}\,[n+1 \times 1] = \{ p_j \}$$

и запишем уравнение (4.3.5) в форме

$$z(x) = \mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{D}(x) \cdot \mathbf{P} - f(x) = 0. \tag{4.3.6}$$

Разобьем отрезок $[c,\, d]$ на N интервалов, x_i – точки разбиения, $i = \overline{1, N}$, $x_1 = c$, $x_{N+1} = d$. Обозначим далее определенные интегралы

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} c_j(x)\, dx = c_{ij}, \; \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} d_j(x)\, dx = d_{ij}, \; \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f_i, \; \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} z(x)\, dx = z_i,$$

матрицы $\mathbf{Q}\,[N \times 2(n+1)] = \{ c_{ij}, d_{ij} \}$, $\mathbf{R}\,[2(n+1) \times 1] = \{ g_j, p_j \}$, $\mathbf{F}\,[N \times 1] = \{ f_i \}$, $\mathbf{Z}\,[N \times 1] = \{ z_i \}$. Проинтегрируем уравнение (4.3.6) на N интервалах и положим равным нулю среднее значение невязки на каждом интервале $\mathbf{Z} = 0$. Получим уравнение

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}. \tag{4.3.7}$$

Повторяя операции раздела 3.1, получим решение при $N < 2(n+1)$

$$R = (Q'Q)^{-1} Q'F, \tag{4.3.8}$$

и при $N = 2(n+1)$

$$R = Q^{-1} F. \tag{4.3.9}$$

Элементы матрицы Q являются линейной комбинацией интегралов вида

$$s_i h_j \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K(x_i + s_i \eta, y_j + h_j \xi)\, \xi^k d\xi d\eta, s_i = x_{i+1} - x_i, \; \eta = s_i^{-1}(x - x_i), \; k = \overline{0, 3}.$$

При отсутствии аналитических выражений наиболее просто они могут быть вычислены посредством какого-либо двумерного аналога метода трапеций, например, представлением функции $K(\cdot)$ или ее части линейчатой функцией на квадратном шаблоне, или линейной функцией по обоим переменным на треугольном шаблоне. Процедура определения параметров $(n,\, N, x_i, y_j)$ прежняя. Пример решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода дан в [4].

Таблица.

	$\phi(0)$	$\phi(1)$	$\frac{d\phi(0)}{d\xi}$	$\frac{d\phi(1)}{d\xi}$
ϕ_1	1	0	0	0
ϕ_2	0	1	0	0
ϕ_3	0	0	1	0
ϕ_4	0	0	0	1

Список литературы

[1] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. // Москва. Наука, 1986.

[2] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. // Киев, Наук. Думка, 1986.

[3] Латыпов А.Ф. Динамический метод определения аэродинамических характеристик моделей по результатам экспериментов в аэродинамических трубах кратковременного действия. // ПМТФ. 2006. Т. 47. №5. с. 47–55.

[4] Latypov A.F. and Nikulichev Yu. V. Numerical solution of the integral Fredholm equation of the first kind// Proceedings of the International conference on the methods of aero physical research. // Novosibirsk, 5–10 February, 2007. Pt. III. pp. 178–184.