Симметрийный анализ системы уравнений механики двухфазной среды*

А.В. Панов
Челябинский государственный университет
e-mail: `gjd.y@ya.ru`

Рассматривается система уравнений механики двухфазной среды: смеси газа и мелких частиц. Температурными эффектами пренебрегаем. Роль свободного элемента выполняет давление. Найдена главная группа симметрий системы. Спецификации свободного элемента, дающие дополнительные симметрии, отсутствуют.

Введение.
Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \rho_1 \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + m_1 \dfrac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial x} = -\dfrac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau}, \\ \rho_2 \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) + m_2 \dfrac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial x} = \dfrac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau}, \end{cases}$$

описывающую течение смеси газа и мелких частиц [1]. В предпололожении конечности объемной концентрации дискретных частиц и отсутствия температурных эффектов данная система состоит из уравнений сохранения массы и импульса каждой из фаз. Правая часть $\dfrac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau}$ отвечает за силу вязкого трения между фазами. Кроме того $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ — средняя плотность i-й фазы, m_i, ρ_{ii}, u_i — объемная концентрация, истинная плотность, скорость i-й фазы, P — давление, общее для смеси в целом. Первая фаза соответствует газу, вторая — частицам.

Данную систему мы будем рассматривать как класс систем, так как предполагается, что функции $P = P(\rho_1, \rho_2)$ могут быть различными. Для каждой конкретной функции $P(\rho_1, \rho_2)$ можно найти допускаемые группы преобразований этой системы. Для разных наборов эти группы могут отличаться, но есть группы преобразований, допускаемые данной системой при любой функции P. Инфинитезимальные генераторы таких групп образуют алгебру Ли, которую будем называть главной алгеброй Ли системы. Наша задача — это описание главной алгебры Ли этой системы, а также нахождение специализаций свободного элемента P, при которых появляются дополнительные симметрии, то есть дополнительные допускаемые группы помимо тех, которые соответствуют главной алгебре Ли. Кроме того, стоит задача поиска оптимальных систем подалгебр алгебры Ли и нахождения инвариантных относительно этих подалгебр решений.

*Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-96007-р_урал_а.

2. Главная группа Ли.

Для сокращения количества индексов и удобства вычислений переобозначим $u = u_1, v = u_2, \rho = \rho_1, \sigma = \rho_2, b = \tau^{-1}, a = \rho_{22}^{-1}$. Далее, используя равенство $m_1 + m_2 = 1$ и равенство $m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{22}} = a\sigma$, выразим m_1, m_2. Разделив два последних равенства системы на ρ и σ соответственно, получим

$$\rho_t + \rho_x u + u_x \rho = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_t + \sigma_x v + v_x \sigma = 0, \tag{2}$$

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}(1 - a\sigma)(P_\rho(\rho,\sigma)\rho_x + P_\sigma(\rho,\sigma)\sigma_x) + b\rho^{-1}\sigma(u - v) = 0, \tag{3}$$

$$v_t + vv_x + a(P_\rho(\rho,\sigma)\rho_x + P_\sigma(\rho,\sigma)\sigma_x) - b(u - v) = 0, \tag{4}$$

Будем искать инфинитезимальные генераторы групп, допускаемых системой (1)—(4), в виде

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial \rho} + \beta\frac{\partial}{\partial \sigma} + \delta\frac{\partial}{\partial u} + \gamma\frac{\partial}{\partial v},$$

где функции $\tau, \xi, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ зависят от переменных t, x, ρ, σ, u, v. Методом Ли – Овсянникова найдем базис главной алгебры Ли (см. [2]).

Теорема 1. *Операторы*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

образуют базис главной алгебры Ли L_3 *системы уравнений* (1) — (4).

3. Группа преобразований эквивалентности и специализации давления.

Найдем группы преобразований эквивалентности системы (1)—(4). Для этого перепишем систему в виде

$$\rho_t + \rho_x u + u_x \rho = 0,$$
$$\sigma_t + \sigma_x v + v_x \sigma = 0,$$
$$u_t + uu_x + \rho^{-1}(1 - a\sigma)(P_\rho\rho_x + P_\sigma\sigma_x) + b\rho^{-1}\sigma(u - v) = 0,$$
$$v_t + vv_x + a(P_\rho\rho_x + P_\sigma\sigma_x) - b(u - v) = 0.$$

Здесь P — функция, зависящая только от ρ и σ, поэтому к системе добавляются уравнения

$$P_t = 0, \quad P_x = 0, \quad P_u = 0, \quad P_v = 0. \tag{5}$$

Инфинитезимальные генераторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial \rho} + \beta\frac{\partial}{\partial \sigma} + \delta\frac{\partial}{\partial u} + \gamma\frac{\partial}{\partial v} + \lambda\frac{\partial}{\partial P},$$

где $\tau, \xi, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ зависят, как и прежде, от переменных t, x, ρ, σ, u, v, а функция λ — от переменных $t, x, \rho, \sigma, u, v, P$.

Подействовав данным оператором на систему (1)—(5) и решив определяющие уравнения, найдем базис алгебры Ли преобразований эквивалентности.

Теорема 2. *Операторы*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial P}, \quad Y_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v},$$

$$Y_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2P\frac{\partial}{\partial P}$$

образуют базис алгебры Ли преобразований эквивалентности системы уравнений (1) — (4).

Поиск специализаций давления, допускающих дополнительные симметрии, основанный на применении группы преобразований эквивалентности к классифицирующим уравнениям (см. [2]) показал, что таких специализаций нет.

3. Оптимальные системы подалгебр. Для главной алгебры Ли L_3 найдены оптимальная система одномерных подалгебр

$$X_1, \quad X_2 \quad X_3, \quad X_1 + cX_3, \quad c \in \mathbb{R},$$

и оптимальная система двумерных подалгебр

$$\langle X_1, X_2 \rangle, \quad \langle X_2, X_3 \rangle, \quad \langle X_2, X_1 + cX_3 \rangle.$$

Для данной системы были найдены инвариантные относительно этих подалгебр решения, соответствующие виду функции $P = \frac{a^2\rho_1}{1-\rho_2/\rho_{22}}$, который часто используется при экспериментальных исследованиях, и использованы в решении задачи о поиске области гиперболичности системы.

Список литературы

[1] Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухин, А. Н. Папырин, В. М. Фомин. Новосибирск : Наука, 1980. 160 с.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 399 с.