

Аналитическое и численное исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности линии уреза *

С. П. БАУТИН, С. Л. ДЕРЯБИН

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SBautin@math.usart.ru, SDeryabin@math.usurt.ru

А. Ф. СОММЕР

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: nisei@sibmail.ru

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, Н. Ю. ШОКИНА

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: khak@ict.nsc.ru, nina.shokina@ict.nsc.ru

Для уравнений мелкой воды построены решения начально-краевых задач в виде рядов, локально сходящихся в окрестности подвижной границы вода-суша. Полученные решения использованы при разработке новых аппроксимаций краевых условий на этой границе.

Введение

Трудности численного моделирования взаимодействия длинных волн с берегом в рамках модели мелкой воды связаны с тем, что расчет приходится выполнять в области с подвижной линией уреза, на которой полная глубина жидкости обращается в нуль, а число Фруда становится бесконечным. Для корректной постановки численных краевых условий на этой линии необходимы аналитические исследования поведения решения в процессах наката и отката волн. Аналитические решения нелинейных уравнений мелкой воды, описывающие накат и откат необрушающихся волн на плоский откос, получены в [1, 2]. В [3, 4] исследовано влияние формы набегающей волны на максимальные значения высоты и скорости наката на плоский откос.

Реальный береговой склон является криволинейным и взаимодействие волн с ним имеет более сложный характер, чем с плоским откосом. В настоящей работе с использованием методологии [5] построены решения нелинейных уравнений мелкой воды в виде рядов, локально сходящихся в окрестности подвижной линии уреза в случае криволинейного рельефа дна и прилегающей суши. Для различных режимов взаимодействия волны с берегом получен закон движения точки уреза, на основе которого сконструированы новые разностные краевые условия в этой точке. Расчеты тестовых задач наката волн на берег показали существенное преимущество предложенных аппроксимаций краевых условий на подвижной линии уреза перед известными аппроксимациями [6], использовавшимися ранее.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 08-01-00052, 09-05-00294, 10-05-91052-НЦНИ), а также в рамках Программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-6068.2010.9) и Проекта IV.31.2.1. программы фундаментальных исследований СО РАН

1. Аналитическое решение уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза

Пусть для системы уравнений мелкой воды

$$H_t + (uH)_x = 0, \quad u_t + uu_x + gH_x = gf, \quad (1)$$

начальные данные заданы в момент времени $t = t_0$:

$$H(x, t_0) = H_0(x), \quad u(x, t_0) = u_0(x), \quad (2)$$

где t — время, $u(x, t)$ — усредненная по глубине горизонтальная составляющая вектора скорости, $H = \eta + h$ — полная глубина, $\eta(x, t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня $y = 0$, g — ускорение свободного падения, $f(x) = h'(x)$, рельеф дна и прилегающей суши описывается функцией $y = -h(x)$. Уравнения (1) дополняются краевым условием

$$H(x_0(t), t) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

где $x_0(t)$ — искомая координата подвижной точки уреза, $x_{00} = x_0(0)$ — положение этой точки в начальный момент времени.

Разработанный в [5] метод получения аналитических решений уравнений идеального газа в окрестности границы газ-вакуум используется здесь для уравнений мелкой воды. В зависимости от начальных условий возможны три случая, а именно: $H'_0(x_{00}) \neq 0$, $H'_0(x_{00}) = 0$ и $H'_0(x_{00}) = \infty$. В случае конечной производной $H'_0(x_{00}) \neq 0$ сначала в виде сходящихся рядов по степеням $(t - t_0)$ выписывается решение задачи Коши (1), (2). Затем определяется закон движения точки уреза в виде ряда

$$x_0(t) = x_{00} + x_{01}(t - t_0) + x_{02} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots + x_{0k} \frac{(t - t_0)^k}{k!} + \dots, \quad (4)$$

коэффициенты которого можно найти, продифференцировав по t достаточное количество раз равенство (3) с найденной функцией H :

$$x_{01} = u_{00}, \quad x_{02} = -g\eta'_0(x_{00}), \quad x_{03} = g \left[2u'_0(x_{00})H'_0(x_{00}) + u_{00}f'(x_{00}) \right], \quad \dots, \quad (5)$$

где $\eta_0(x) = H_0(x) - h(x)$, $u_{00} = u_0(x_{00})$. Подставляя построенный ряд (4) в найденное решение $u(x, t)$ задачи Коши (1), (2), получаем скорость жидкости в точке уреза

$$u^o(t) = u(x_0(t), t) = u_{00} + x_{02}(t - t_0) + x_{03} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots. \quad (6)$$

Показано, что закон движения (4), (5) сохраняется до того момента времени $t = t_*$, когда производная $H_x(x_0(t_*), t_*)$ становится равной бесконечности.

Для второго режима взаимодействия волны с берегом касательные, проведенные в начальный момент времени $t = t_0$ к поверхности дна и к поверхности воды в точке уреза, совпадают, причем $H_0^{(l)}(x_{00}) = 0$ при $0 < l < p$, $H_0^{(p)}(x_{00}) \neq 0$. С использованием в задаче (1), (2) замены переменных $H = \theta^p$, $x = z + x_0(t)$ найдено локально-аналитическое решение (θ, u) характеристической задачи Коши, представленное в виде

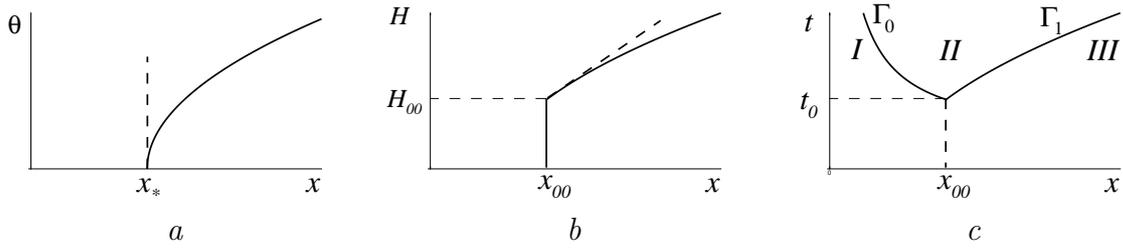


Рис. 1. Профиль функции $\theta(x, t_*)$ с бесконечной производной в точке $x = x_*$ (a); задача о распаде специального разрыва при $t = t_0$ (b) и конфигурация течения при $t > t_0$ после распада разрыва (c)

рядов по степеням z и существующее до момента времени $t = t_*$, в который производные u_z и θ_z на границе $x = x_0(t)$ становятся равными бесконечности (рис. 1, a). Закон движения этой границы и ее скорость $u^o(t)$ определяются как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_{0t} = u^o, \quad x_0(t_0) = x_{00}; \quad u_t^o = gf(x_0(t)), \quad u^o(t_0) = u_{00}. \quad (7)$$

В частности, для плоского откоса, заданного функцией

$$y = -h(x) = -k(x - x_{00}), \quad k = \text{const} > 0, \quad (8)$$

получим решение

$$x_0(t) = \frac{k}{2}g(t - t_0)^2 + u_{00}(t - t_0) + x_{00}, \quad u^o(t) = kg(t - t_0) + u_{00}, \quad (9)$$

которое для t , близких к t_0 , описывает при $u_{00} < 0$ накат волны на плоский откос, а при $u_{00} > 0$ — откат.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ функция $H_0(x)$ в точке $x = x_{00}$ имеет разрыв первого рода от $H = 0$ до $H_{00} = H_0(x_{00}) > 0$, а правее точки $x = x_{00}$ она является аналитической (рис. 1, b). Помимо функции $H_0(x)$ аналитическая функция $u_0(x)$ также считается заданной. Решение поставленной задачи о распаде специального разрыва [5] моделирует течение, возникающее после опрокидывания волны. Конфигурация течения, возникшего после распада разрыва, включает в себя невозмущенную и возмущенную волны, отделенные друг от друга звуковой характеристикой Γ_1 . С левой стороны возмущенная волна отделена от сухого берега (область I на рис. 1, c) линией Γ_0 — границей уреза, на которой выполняется условие (3). Решение, соответствующее невозмущенной волне (область III на рис. 1, c), построено в виде сходящихся рядов по степеням $(t - t_0)$. С помощью этого решения определяются линия Γ_1 и значения на ней функций H и u . Для построения возмущенной волны (область II на рис. 1, c) в системе (1) делается замена переменных (за независимые переменные берутся t и H , а за неизвестные функции x и u) и ее решение ищется в виде рядов по степеням $(t - t_0)$ при известных данных на характеристике Γ_1 и условии вертикали [5]

$$x(t, H)|_{t=t_0} = x_{00}. \quad (10)$$

Показано, что до некоторого момента времени область сходимости этих рядов покрывает всю область возмущенной волны от Γ_1 до Γ_0 включительно. Кроме того,

при $t > t_0$ на границе уреза всегда выполняется условие $H_x|_{\Gamma_0} = 0$, т. е. после опрокидывания волны на границе уреза всегда реализуется рассмотренный выше второй случай. Поэтому закон движения границы Γ_0 определяется из решения задачи (7), в которой u_{00} теперь следует заменить на величину $u_* = u_{00} - 2\sqrt{gH_{00}}$ — начальную скорость границы уреза после распада разрыва. С учетом этой замены закон движения границы Γ_0 в частном случае плоского откоса записывается в виде (9). Отметим, что ранее в работе [7] также отмечалось, что при накате бора на плоский откос возникает распад разрыва с образованием возмущенной волны, в которой поверхность воды в точке уреза касается поверхности дна, а точка уреза $x = x_0(t)$ оказывается нечувствительной к другим частям течения: она движется по плоскому откосу как изолированная материальная точка под действием лишь силы тяжести, т.е. согласно параболическому закону движения вида (9).

2. Расчет наката с использованием аналитического решения в точке уреза

Для расчета наката поверхностных волн на берег использовалась схема предиктор-корректор на адаптивной сетке [6], аппроксимирующая со вторым порядком уравнения мелкой воды и сохраняющая в линейном случае монотонность профилей численного решения. Адаптивная сетка имела подвижные сгущения в окрестностях вершин и впадин волн (см. рис. 2, а). Подвижная точка уреза совмещалась на каждом временном слое с самым левым расчетным узлом, что позволяло четко отслеживать ее движение.

Для выполнения расчетов необходимо задавать разностные краевые условия в точке уреза. Полная глубина вычислялась в соответствии с формулой (3). В случае конечной производной $H'_0(x_{00}) \neq 0$ для приближенного вычисления нового положения точки уреза и ее скорости использовались частичные суммы рядов (4) и (6). Во втором случае ($H'_0(x_{00}) = 0$) для вычисления положения точки уреза и ее скорости использовалась аппроксимация системы (7). В качестве критерия возникновения третьего случая — случая обрушения волны — использовалось неравенство $|H'_0(x_{00})| > M$, где M — заданное достаточно большое положительное число. Искомые величины определялись из дискретного аналога системы (7), при этом для вычисления u_* использовались значения $u_{00} = u_1^n$ и $H_{00} = H_1^n$ за “скачком” (в первом, соседнем с урезом, узле сетки).

Апробация алгоритмов расчета граничных значений на Γ_0 выполнена вначале на задаче о движении волны понижения по сухому горизонтальному руслу. Эта задача интересна тем, что подвижная точка контакта сухое дно-вода (далее “точка уреза”) аналогична подвижной точке уреза при набегании волн на наклонный берег. Конфигурация течения аналогична изображенной на рис. 1, с: слева от границы уреза Γ_0 располагается сухое дно, между Γ_0 и звуковой характеристикой Γ_1 — возмущенная волна (волна понижения) со сверхкритическим течением в окрестности Γ_0 , справа от Γ_1 — невозмущенная волна (в данном примере — покоящаяся жидкость с постоянной глубиной). Установлено, что в окрестности “точки уреза” расчетный и теоретический профили свободной границы визуально неразличимы. Причина столь высокой точности кроется как в использовании разностных краевых условий в “точке уреза”, выведенных на основе аналитического исследования решений, так и в применении адаптивных сеток, сгущающихся около границы Γ_0 . Отметим, что такая точность никогда не достигалась для использовавшихся ранее [6] аппроксимаций краевых условий в точке уреза.

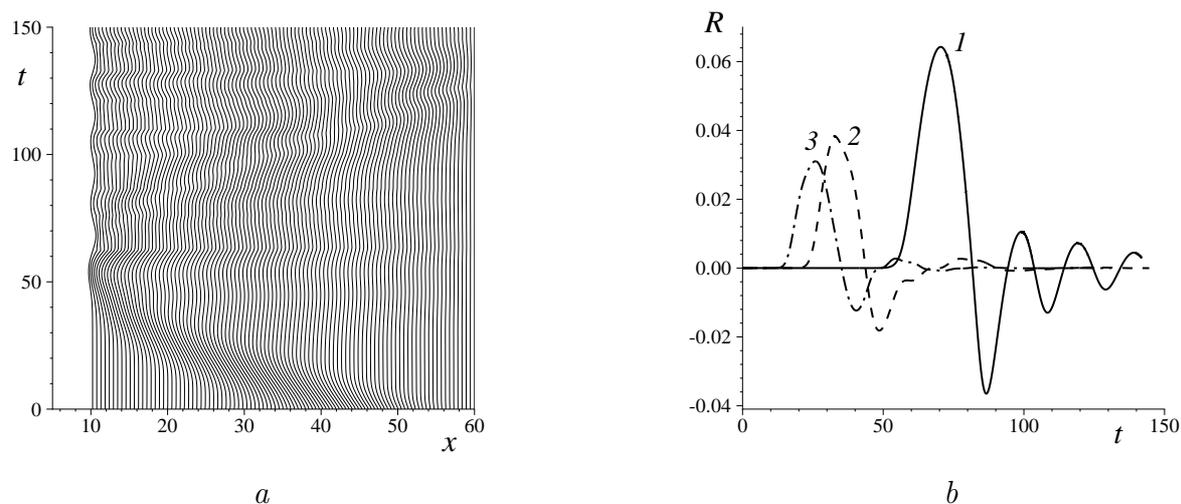


Рис. 2. Накат одиночной волны на пологий плоский откос: a — траектории узлов адаптивной сетки ($\theta = 2.8^\circ$); b — вертикальное смещение $R(t)$ точки уреза: $\theta = 2^\circ$ (1), 5° (2), 8° (3)

Рассматривалась также задача о набегании волн на плоский откос, сопрягающийся с горизонтальным дном. Для малых углов θ наклона откоса численное моделирование осложняется из-за возможного обрушения волны в процессе наката или при появлении опрокидывающегося бора в фазе отката [7]. В настоящей работе максимальные значения вертикального заплеска в расчетах находятся в полном соответствии с теоретическими значениями, приведенными в работе [2] для уединенной волны малой амплитуды и малого угла наклона откоса ($\cot \theta = 19.85$). Этот факт можно интерпретировать, как косвенное подтверждение близости приближенных аналитических решений, полученных разными путями и представленных в разной форме в настоящей работе и в [2].

Интересной особенностью взаимодействия одиночной волны с пологим откосом является колебательный характер процесса наката-отката. Причина возникновения колебаний, видимо, в особом режиме взаимодействия набегающей волны с очень пологим склоном. На возможность длительных низкочастотных колебаний точки уреза при набегании одиночной волны на очень пологий берег указано в работе [8]. С увеличением крутизны плоского откоса колебательный характер движения точки уреза практически исчезает (см. рис. 2, b , где $R(t) = \eta(x_0(t), t)$) и процесс взаимодействия одиночной волны с крутым плоским откосом сводится к накату и откату, после которого точка уреза возвращается в свое первоначальное положение.

Для исследования влияния неровности рельефа дна и прилегающей суши на процессы наката-отката, был выбран модельный рельеф с ненулевой кривизной, заданный с помощью гладкой монотонно убывающей функции типа гиперболический тангенс с углом наклона в точке перегиба, равным θ_0 (рис. 3, a). Установлено, что на неровном склоне колебательный характер движения точки уреза также имеет место. Как и для плоского откоса, амплитуда колебаний уменьшается при возрастании крутизны склона. Но на неровном склоне, в отличие от ровного, колебания точки уреза наблюдаются и для крутых склонов, при этом рост крутизны ведет к увеличению частоты колебаний (рис. 3, b).

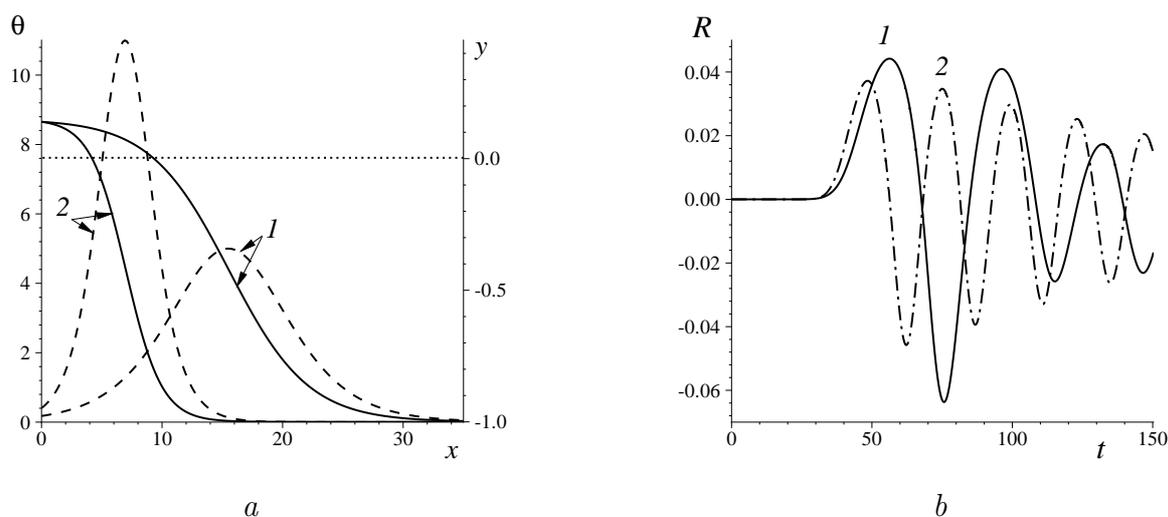


Рис. 3. Накат одиночной волны на неровный откос при $\theta_0 = 5^\circ$ (1) и 11° (2): a — профили дна $y = -h(x)$ (сплошные линии) и локальные углы наклона дна (штрих); b — вертикальное смещение $R(t)$ точки уреза

Заклучение

В работе выполнено аналитическое исследование решений нелинейных уравнений мелкой воды в окрестности границы вода–суша. Рассмотрено несколько режимов взаимодействия волны с берегом и для каждого из них с использованием методологии [5] выписано решение в виде локально сходящихся рядов. Разработаны новые аппроксимации краевых условий в подвижной точке уреза, существенно использующие полученный аналитически закон движения этой точки. Показано, что применение этих аппроксимаций позволяет рассчитывать на длительные времена процессы наката-отката волн как на плоские откосы, так и на криволинейные.

Список литературы

- [1] CARRIER G.F., GREENSPAN H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4, No. 1. P. 97–109.
- [2] SYNOLAKIS C.E. The runup of solitary waves // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 185. P. 523–545.
- [3] МАЗОВА Р.Х., ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н. Линейная теория наката волн цунами на берег // Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана. 1982. Т. 18, № 2. С. 166–171.
- [4] ДИДЕНКУЛОВА И.И., КУРКИН А.А., ПЕЛИНОВСКИЙ Е.Н. Накат одиночных волн различной формы на берег // Изв. РАН. Физ. атм. и океана. 2007. Т. 43, № 3. С. 419–425.
- [5] БАУТИН С.П., ДЕРЯБИН С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005.
- [6] ЧИСЛЕННОЕ моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [7] HIBBERD S., PEREGRINE D.H. Surf and runup on a beach: a uniform bore // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 95, part 2. P. 323–345.
- [8] SYNOLAKIS C.E., BERNARD E.N., TITOV V.V., KANOGLU U., GONZALEZ F.I. Validation and verification of tsunami numerical models // Pure and Applied Geophysics. 2008. Vol. 165. P. 2197–2228.