Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов[1]

Ю.Н. Григорьев

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

e-mail: grigor@ict.nsc.ru

И.В. Ершов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,г. Новосибирск

e-mail: i_ershov@ngs.ru

В докладе представлены результаты цикла исследований линейной и нелинейной устойчивости течений термически возбужденных молекулярных газов. Предметом рассмотрения является диссипативный эффект, возникающий в таких течениях, в связи с перспективой его использования для повышения числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) и подавления турбулентности.

Введение. В настоящее время ведется поиск новых способов воздействия на процессы ЛТП и генерации турбулентности. При этом основное внимание уделяется эффектам, ранее находившимся вне поля зрения специалистов-гидродинамиков. Одно из возможных воздействий на сжимаемое течение молекулярного газа связано с дополнительным диссипативным эффектом, возникающим при релаксации внутренних степеней свободы молекул. Известным проявлением этого эффекта стало аномальное поглощение ультразвука в молекулярных газах, которое впервые наблюдалось и получило физическую интерпретацию в 30-х годах прошлого столетия [1]. В докладе излагаются результаты систематических исследований влияния данного эффекта на устойчивость течений и подавления турбулентности в релаксирующих молекулярных газах.

1. Математические модели течений с термической релаксацией. Из кинетической теории молекулярных газов [2] известно, что способ описания неравновесности по внутренним степеням свободы молекул зависит от соотношений между временами релаксации поступательных мод τ_{tt}, вращательных мод τ_{rt}, колебательных мод τ_{vt} молекул и характерным временем течения τ_f. В аэродинамике наиболее распространен случай, когда характерные времена удовлетворяют следующим условиям [3]: $\tau_{tt} \sim \tau_{rt} \ll \tau_{vv} \ll \tau_{vt} \sim \tau_f$.

В расчетах [4 - 8] при относительно невысоких уровнях термического возбуждения, когда возбуждением колебательных степеней свободы можно пренебречь, использовались полные уравнения Навье-Стокса сжимаемого теплопроводного газа. В них слабая неравновесность между поступательными и вращательными степенями свободы учитывается с помощью коэффициента объемной вязкости в дивергентной части тензоре напряжений.

В случае возбуждения колебательных уровней молекул предполагалось, что за время τ_{vv} в подсистеме колебательных уровней устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_v, отличной от температуры потока T. Для таких течений использовалась модель двухтемпературной газовой динамики [9 - 11], где обмен энергией между колебательной модой молекул и квазиравновесными степенями свободы в некотором осредненном смысле учитывается посредством релаксационного уравнения Ландау-Теллера [2, 3]. Последнее имеет вид

$$\gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_v}{\partial x_j} \right) = \frac{\gamma\, \alpha_2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right] - \frac{\gamma_v \rho\, (T_v - T)}{\tau_{vt}},$$

где параметр γ_v характеризует степень неравновесности колебательных мод, коэффициент α_2 отвечает за молекулярный перенос энергии колебательных квантов, γ – показатель адиабаты.

2. Линейная устойчивость плоскопараллельных течений для уравнений релаксационной газовой динамики. На основе линеаризованной системы уравнений двухтемпературной газовой динамики исследована задача линейной устойчивости плоско-параллельных сдвиговых течений колебательно

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00116).

возбужденного сжимаемого газа. С использованием энергетических интегралов получено обобщение ряда классических результатов теории устойчивости плоско-параллельных течений, в частности, первой и второй теорем Рэлея и теоремы Ховарда Доказано, что термическая релаксация создает дополнительный диссипативный фактор, повышающий устойчивость потока. Рассчитаны наиболее неустойчивые моды с максимальными инкрементами нарастания. Проанализирована их зависимость от числа Маха несущего потока, времени колебательной релаксации и степени термической неравновесности.

Рассматривалась линеаризованная система для малых возмущений скоростей u, v и термодинамических величин T, T_v и p, из которой выводилось уравнение энергетического баланса

$$\frac{dE}{dt} = -\int u\,v\,\frac{\partial U_s}{\partial y}\,d\Omega - \frac{\gamma_v}{\gamma^2 \mathrm{M}_0^2}\int \frac{\rho\,(T-T_v)}{\tau}\,d\Omega - \frac{3}{2}\frac{1}{\mathrm{Re}_r}\int \frac{(T-T_v)^2}{\gamma\,\tau}\,d\Omega, \tag{1}$$

где $\mathrm{Re}_r = U\,L_r/\nu_b$ и $\tau = \tau_{vt}$. Интеграл энергии возмущений представляется квадратичной формой вида

$$E = \frac{1}{2}\int \left(u^2 + v^2 + \mathrm{M}_0^2\,p^2 + \frac{\gamma_v T_v^2}{\gamma^2 \mathrm{M}_0^2} \right) d\Omega.$$

Видно, что по сравнению со случаем идеального газа [12] в интеграл энергии E кроме слагаемого с давлением p, определяющего возмущение внутренней энергии газа в состоянии локального термодинамического равновесия, входит слагаемое с T_v, связанное с возмущением колебательных степеней свободы.

Последний интеграл в правой части (1) положительно определен и в явном виде показывает диссипативный эффект процесса колебательной релаксации. Очевидно, что релаксация повышает устойчивость сжимаемого плоскопараллельного течения по сравнению со случаем идеального газа в локальном термодинамическом равновесии [12].

Традиционно изучена устойчивость волновых возмущений в виде плоских волн $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \exp\left[i\alpha(x-ct)\right]$, где $\mathbf{q} = (u,\, v, \rho,\, p,\, T,\, T_v)$, $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{u}(y),\, \tilde{v}(y),\, \tilde{\rho}(y),\, \tilde{p}(y),\, \tilde{\theta}(y),\, \tilde{\theta}_v(y))$ – вектор комплексных амплитуд возмущений; $\alpha > 0$ – вещественное волновое число; $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорости. Для функции $\tilde{p} = W^n\,H$, $W = U_s - c \neq 0$ получено самосопряженное дифференциальное уравнение вида

$$\left[W^{2(n-1)}\,H'\right]' + \left[n\,W^n\,\left(W^{n-3}W'\right)' - \xi^2 W^{2n}\right] H = 0, \quad \xi = \sqrt{W^{-2} - m^2\mathrm{M}_0^2}. \tag{2}$$

Из мнимой части его квадратичной формы при $n = 0$ следует, что для развития неустойчивости в рассматриваемом течении колебательно возбужденного газа необходимо выполнение условия Рэлея в той же форме, что и для случаев однородной и стратифицированной несжимаемых жидкостей [13] и идеального газа [12]: $\min U_s \equiv u < c_r < U \equiv \max U_s$. При некотором дополнительном условии здесь также справедливо более жесткое ограничение на фазовую скорость любого растущего возмущения, известное как теорема о полукруге [18]. Оно выражается неравенством вида $(c_r - \bar{U})^2 + c_i^2 \leq (U-u)^2/2$, $\bar{U} = (U+u)/2$.

При $n = 1$ из мнимой части квадратичной формы (2) получается соотношение, обобщающее на случай колебательно возбужденного газа известное условие Рэлея [13] о необходимости наличия точки перегиба на профиле скорости для развития инерционной неустойчивости в идеальной жидкости.

Для расчета инкрементов нарастания неустойчивых мод рассматривалась спектральная задача для уравнения (8) при $n = 0$. Собственными значениями являются c_i, а параметрами задачи служат волновое число α, число Маха M_0, коэффициент γ_v , характеризующий степень возмущения колебательной моды, время релаксации τ. Волновое число изменялось в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$ с шагом $\Delta\alpha = 0.1$. Число Маха варьировалось в дозвуковом диапазоне. Коэффициент γ_v принимал значения $\gamma_v = 0$, 0.111, 0.250, 0.667. Времена релаксации охватывали диапазон в три порядка: $\tau = 0.01$, 0.1, 1.0. Расчеты ограничены случаем двухатомных газов с $\gamma = 1.4$. Использовалась методология численных расчетов, развитая в работе [12], где рассматривалась аналогичная спектральная задача для идеального газа. Для проверки адекватности численного алгоритма были выполнены расчеты собственных значений неустойчивых мод в идеальном газе при $\gamma_v = 0$ и $\alpha^2 + \mathrm{M}_0^2 \leq 1$. Результаты совпали с данными [13] в пределах двойной точности компьютерных вычислений.

На рис. 1 приведены изолинии инкрементов αc_i в плоскости $(\mathrm{M}_0,\, \alpha)$ для режима $\tau = 1$, $\gamma_v = 0.667$ (сплошные кривые). Штриховые кривые представляют данные [12] для идеального газа. Кривые a, b показывают изменение максимальных инкрементов для идеального газа и колебательно возбужденного газа в зависимости от числа Маха M_0. Некоторые числовые значения для этих кривых даны в табл. 1. Наибольший инкремент $\alpha c_i = 0.1897$ достигается в идеальной жидкости при $\mathrm{M}_0 = 0$, $\alpha = 0.4446$ [14]; при $\mathrm{M}_0 = 1$ инкременты αc_i равны нулю.

Таблица 1.

M_0	$\alpha \times 10^4$		$\alpha\, c_i \times 10^4$	
	$\gamma_v = 0$	0.667	0	0.667
0	4446		1897	
0.2	4260	4377	1813	1801
0.5	3970	3890	1413	1341
0.8	2790	2895	778	620

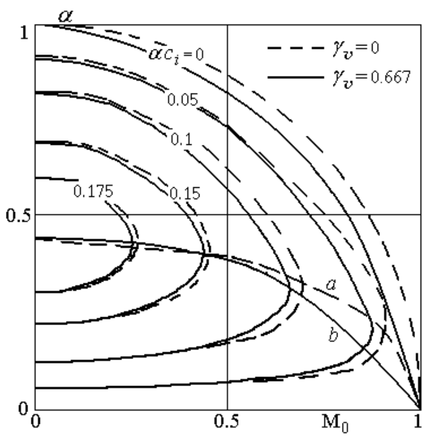

Рис. 1.

Видно, что релаксация подобно сжимаемости снижает инкременты нарастания неустойчивых мод. При этом с ростом числа Маха снижение инкрементов, обусловленное релаксационным процессом, становится все более заметным. Расчеты показывают, что с ростом уровня возбуждения, который задается здесь коэффициентом γ_v, влияние релаксации усиливается. Надо отметить, что в расчетах использовались умеренные значения γ_v. В то же время модель двухтемпературной газовой динамики применима для более высоких уровней возбуждения [3]. Можно предположить, что на уровне возбуждения, близком к началу диссоциации, эффект релаксации по порядку величины снижения инкрементов будет сравним с действием сжимаемости.

3. Энергетическая оценка критического числа Рейнольдса. Для оценки прямого вклада релаксации в изменение критического числа Рейнольдса ЛТП использовалась энергетическая теория нелинейной устойчивости, распространенная авторами в [8, 9] на случай сжимаемых и колебательно возбужденных течений. На ее основе для обеих моделей аналитически и численно решена вариационная задача о минимальном числе Рейнольдса ЛТП в течении Куэтта, описываемого соотношениями

$$U_s(x_2) = x_2, \quad T_s = T_{v,\,s} = \rho_s = 1, \quad p_s = 1/(\gamma \mathrm{M}_0^2).$$

3а. Умеренный уровень возбуждения внутренних степеней свободы молекул газа. Влияние объемной вязкости. Из полных уравнений Навье-Стокса сжимаемого теплопроводного газа выводились уравнения для возмущений гидродинамических переменных произвольной амплитуды, на базе которых строилось уравнение баланса кинетической энергии возмущений [5]. Для функционала в правой части этого уравнения ставилась вариационная задача на собственные значения для нахождения критического числа Рейнольдса Re_{cr}. Предварительно в варьируемом функционале было проведено частичное разделение переменных в виде

$$u'_1 = u''_1(x_1,\, x_2)\cos(\delta x_3), \quad u'_2 = u''_2(x_1,\, x_2)\cos(\delta x_3), \quad u'_3 = u''_3(x_1,\, x_2)\sin(\delta x_3),$$

$$\rho' = \rho''(x_1,\, x_2)\cos(\delta x_3), \quad T' = T''(x_1,\, x_2)\cos(\delta x_3). \tag{3}$$

Это, хотя и сузило класс допустимых функций, но позволило получить линейную систему уравнений Эйлера-Лагранжа, определяющую дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re. В [8] получены асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса на плоскости волновых чисел $(\beta,\, \delta)$. Для длинноволновых продольных $(\beta << 1,\, \delta = 0)$ и поперечных $(\beta = 0,\, \delta << 1)$

возмущений с точностью до членов порядка $O(\beta^2 + \delta^2)$ в пределе получены асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса в виде

$$\mathrm{Re}_{cr}^{(\beta)} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} - \frac{\pi\beta(1+3\alpha_1)}{6}, \;\; \mathrm{Re}_{cr}^{(\delta)} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}}. \tag{4}$$

Так как вычисленные асимптотики являются длинноволновыми приближениями, то полученная зависимость $\mathrm{Re}_{cr} \sim \sqrt{\alpha_1 + 4/3}$ обусловлена воздействием объемной вязкости на крупномасштабные вихревые структуры, характерные для развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

Для произвольных значений волновых чисел β, δ спектральная задача решалась численно методом коллокаций с использование QZ-алгоритма, реализованного в пакете Matlab [9]. Расчеты спектров собственных значений проводились при значениях параметра $\alpha_1 = 0 \div 2$ в диапазоне волновых чисел $\beta = -5 \div 5$, $\delta = -5 \div 5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\beta = h_\delta = 0.1$. Расчеты показали, что для всех фиксированных α_1 минимальные по модулю собственные значения достигаются на оси $\beta \neq 0$ при $\delta = 0$ в плоскости волновых чисел (β, δ). Зависимости спектрального параметра от волнового числа $\mathrm{Re}(\beta)$ при $\delta = 0$ и выбранных значениях объемной вязкости α приведены на рис. 2. Штрих-пунктирная линия соединяет значения абсолютных минимумов на параметризованных по α_1 кривых $\mathrm{Re}_{cr}(\alpha_1)$, а штриховые линии показывают поведение асимптот (4).

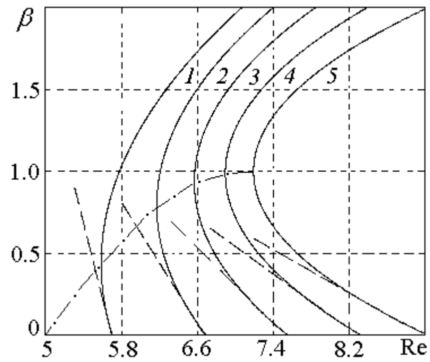

Рис. 2. Зависимости спектрального параметра от волнового числа $\mathrm{Re}(\beta)$ при различных значениях α: *1* – $\alpha_1 = 0$; *2* – $\alpha_1 = 0.5$; *3* – $\alpha_1 = 1$; *4* – $\alpha_1 = 1.5$; *5* – $\alpha_1 = 2$.

Анализ расчетных зависимостей показывает, что с увеличением параметра α_1 критические значения числа Рейнольдса Re_{cr} и соответствующие им значения волнового числа β возрастают. Таким образом, что при возрастании α_1 в диапазоне, характерном для двухатомных газов, увеличение критического числа Рейнольдса может составлять 30%. В случае длинноволновых возмущений асимптотические значения $\mathrm{Re}_{cr}^{(\beta)}$, определенные в (4), существенно превышают соответствующие расчетные критические значения числа Рейнольдса $\mathrm{Re}(\alpha_1, \beta)$ и близки к ним только при $\beta < 0.25$. С учетом периодичности возмущений по продольной координате x_1 определенные на основе энергетической теории наиболее опасные возмущения можно интерпретировать как цепочку вихрей, оси которых перпендикулярны плоскости течения. Заслуживает внимания тот факт, что в данном случае критические числа Рейнольдса достигаются на продольных модах $\beta \neq 0$, $\delta = 0$. В то же время во всех известных авторам расчетах устойчивости плоских несжимаемых течений в рамках энергетической теории (см. [15] и библиографию в ней) минимальные числа Рейнольдса были получены для поперечных мод $\beta = 0$, $\delta \neq 0$. При этом их значения существенно превышают полученные в данной работе. Как известно, с физической точки зрения сжимаемость не может оказывать значительное влияние на свойства течения Куэтта. Вместе с тем данная вариационная задача существенно отличается от соответствующей задачи для несжимаемых течений [15]. Причиной отмеченного различия могло явиться либо отсутствующее здесь условие соленоидальности течения, либо использованная зависимость возмущений от трансверсальной координаты в форме (3). Для проверки этих предположений на основе той же процедуры Matlab были повторены расчеты критических чисел Рейнольдса [15] для несжимаемого течения Куэтта с использованием отделения зависимости от трансверсальной координаты в виде (3). Полученное совпадение результатов с приведенными в [15] возможно говорит о необходимости совершенствования энергетического уравнения [7, 8], например, путем усложнения входящих в него функционалов.

3б. Глубокое возбуждение внутренних степеней свободы молекул газа. Учет колебательной релаксации. Для оценки влияния колебательной релаксации на критические числа Рейнольдса на основе энергетической теория устойчивости рассматривалась устойчивость плоского течения Куэтта. Из полной системы уравнений двухтемпературной гидродинамики с коэффициентами переноса, зависящими от температуры, выводились уравнения для возмущений гидродинамических переменных. Последние использовались в двух вариантах – линеаризованном для малых амплитуд возмущений и нелинейном, без ограничения на амплитуды. Для них строились уравнения энергетического баланса для интеграла энергии в форме

$$E = \frac{1}{2}\int\left[\rho\big(u'^2 + v'^2 + T'^2 + \gamma\gamma_v T_v'^2\big) + \frac{\rho'^2}{\gamma \mathrm{M}_0^2}\right] d\Omega.$$

Отсюда в соответствии с энергетической теорией устойчивости при $dE/dt = 0$ получаются вариационные задачи для критических чисел Рейнольдса Re_{cr}. Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа после отделения периодических переменных приводятся к спектральным задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых спектральным параметром служит число Рейнольдса Re. Их анализ показал, что качественные свойства спектров собственных значений для линеаризованного и нелинейного случаев совпадают.

Задачи решались численно методом коллокаций с использование QZ-алгоритма. Расчеты показали, что в обоих случаях минимальные значения критических чисел Рейнольдса Re_{cr} достигаются на продольных модах $\beta > 0$, $\delta = 0$. На рис. 3 представлены изолинии числа Рейнольдса $\mathrm{Re}(\beta,\, \delta)$ для числа Маха потока $\mathrm{M}_0^2 = 0.5$ и объемной вязкости $\alpha_1 = 0$. Рис. 4 показывает, что возрастание степени неравновесности колебательной моды и времени колебательной релаксации приводит к росту значений критических чисел Рейнольдса.

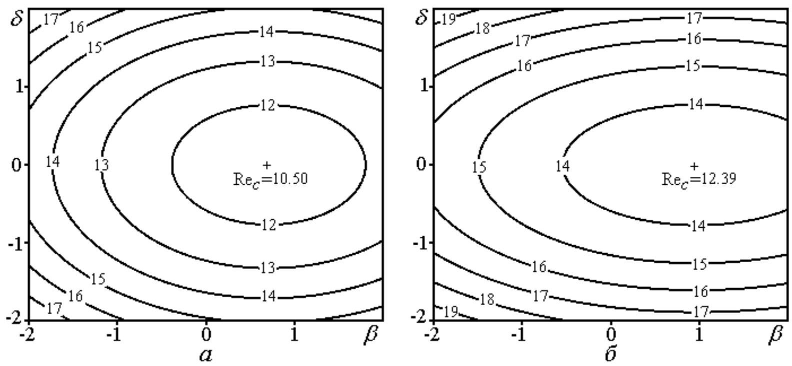

Рис. 3. Изолинии числа Рейнольдса $\mathrm{Re}(\beta,\, \delta)$ для числа Маха потока $\mathrm{M}_0 = 0.5$, объемной вязкости $\alpha_1 = 0$ и времени колебательной релаксации $\tau = 3$: *а* – $\gamma_v = 0.111$, *б* – $\gamma_v = 0.667$, $+$ – значения критического числа Рейнольдса Re_{cr}.

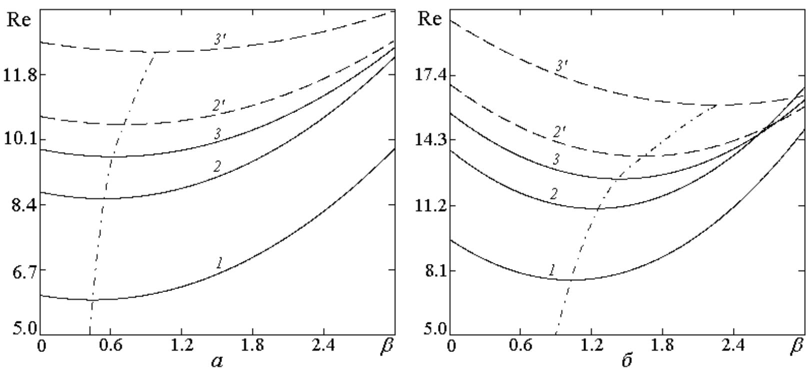

Рис. 4. Зависимости числа Рейнольдса $\mathrm{Re}(\beta)$ и критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}(\beta)$ (штрих-пунктирная линия) для числа Маха потока $\mathrm{M}_0 = 0.5$ при фиксированных значениях объемной вязкости $\alpha_1 = 0$ (*а*), $\alpha_1 = 0$ (*б*) и времени колебательной релаксации $\tau = 1$ (сплошные линии) и $\tau = 3$ (пунктирные линии): *1* – $\gamma_v = 0$; *2, 2'* – $\gamma_v = 0.111$; *3, 3'* – $\gamma_v = 0.667$.

4. Диссипация возмущений при закритических числах Рейнольдса. Для закритических чисел Рейнольдса на основе численного интегрирования полной системы уравнений двухтемпературной гидродинамики исследовано влияние релаксации на развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [7, 11].

Рассматривался поток с $U_s(x_2) = \operatorname{th} x_2$, $T_s = T_{v,\,s} = \rho_s = 1$. В качестве начальных возмущений компонент вектора скорости и термодинамических величин использовались рассчитанные в п. 2 невязкие возмущения с наибольшими инкрементами нарастания. Результаты показывают, что возмущением колебательных мод можно на 10 - 15% повысить среднюю скорость диссипации кинетической энергии эволюционирущей вихревой структуры.

Список литературы

[1] Леонтович М.А. Замечание к теории поглощения звука в газах// ЖЭТФ. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 561-576.

[2] Жданов В.М., Алиевский М.Е. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.

[3] Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газокинетические процессы в неравновесной молекулярной физике// Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 11. С. 1-42.

[4] Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газокинетические процессы в неравновесной молекулярной физике// Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 11. С. 1-42.

[5] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в течениях возбужденного молекулярного газа// ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4.С. 22-34.

[6] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Зырянов К.И., Синяя А.В. Численное моделирование эффекта объемной вязкости на последовательности вложенных сеток// Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 3. С. 36 - 49.

[7] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Зырянов К.В. Численное моделирование волн Кельвина-Гельмгольца в слабо неравновесном молекулярном газе //Вычислительные технологии. 2008.-Т.13, №5. С.25-40.

[8] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина-Гельмгольца// ПМТФ. 2008. Т. 49, № 3.С. 73-84.

[9] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости. // ПМТФ. 2010. Т.51, № 5. С. 59-67.

[10] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа// ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 15-23.

[11] Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Зырянов К.В. Численное моделирование инерционной неустойчивости в колебательно неравновесном двухатомном газее// Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 6. С. 42-57.

[12] Blumen W. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid// J. of Fluid Mech. 1970. Vol. 40, part 4. P. 215-239.

[13] Drasin P.G., Howard L.N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid// Advances in Applied Mechanics. Vol. 9. N-Y: Academic Press, 1966.

[14] Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile// J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 543-556.

[15] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука,1977.