УДК 532.546.06

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Н. Эмих

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

Введение

Выход в свет в 1922 г. фундаментальной монографии Н. Н. Павловского [1] положил начало интенсивному развитию гидродинамической теории фильтрации на базе смешанных краевых задач теории ананалитических функций. В последующие десятилетия трудами отечественных учёных был создан обширный комплекс математических моделей двумерных фильтрационных течений с ориентацией на их применение в гидротехнике, водоснабжении, ирригации, гидромелиорации.

Эффективным при решении таких задач оказался аппарат конформных отображений. Получаемые с его помощью зависимости были доступны для теоретического анализа и инженерных расчётов, что способствовало завершённости исследований.

В 60-х годах приобретает актуальность моделирование в рамках новых по своему характеру многопараметрических краевых задач таких малоизученных процессов, как горизонтальный дренаж потоков с неизвестными подвижными границами, фильтрация жидкостей с различными физическими свойствами. Для их решения разработанных в предшествовавшие десятилетия аналитических методов оказывалось, как правило, недостаточно. Появление и интенсивное распространение в этот период быстродействующих вычислительных устройств послужило импульсом для развития численных подходов, обладающих в ряде случаев бóльшими возможностями по сравнению с классическими методами теоретического анализа. Но вместе с тем именно современные вычислительные технологии позволили преодолеть барьеры, возникшие на пути дальнейшего развития гидродинамической теории фильтрации, и в конечном итоге осуществить полноценное исследование вышеназванных типов фильтрационных течений.

Специфика фильтрационных течений с дренажём

В дренируемых потоках с подвижными границами последние находятся под воздействием дренажа и, со своей стороны, ограничивают возможность его активизации. Впервые на это обстоятельство обратил внимание В. В. Ведерников [2]. Анализируя схему фильтрации к точечному стоку, он указал на возможность возникновения ситуации, при которой на кривой депрессии непосредственно над дреной образуется точка заострения. При этом на всём участке от указанной точки до стока давление в потоке становится отрицательным, и его дополнительное сколь угодно малое понижение должно привести к прорыву в дрену воздуха.

В 30-х годах дрены на ирригационных объектах действовали в режиме свободного истечения, при котором давление во всём потоке превышает атмосферное. Видимо, поэтому выполненный в [2] анализ не получил развития; сам В. В. Ведерников к этому вопросу также не возвращался.

С появлением в последующие десятилетия вакуумных мелиоративных дрен и горизонтальных водозаборов приобрело значимость изучение предельных режимов течений с дренажём, при котором устанавливаются рамки реализации течений в описывающих эти течения краевых задачах и определяются интервалы допустимых значений дренажных расходов.

Задачи фильтрации с дренажём являются многопараметрическими со всеми особенностями, присущими этому типу краевых задач. Получаемые на этапе построения решения задач комплексный потенциал течения ω и комплексная координата z точек области фильтрации связаны между собой посредством вспомогательной комплексной переменной ζ, область изменения которой — полуплоскость, и содержат неизвестные параметры конформных отображений. Ключевым этапом на пути анализа течения в прямой постановке является нахождение упомянутых параметров, связанных с входными параметрами рассматриваемой фильтрационной схемы системой трансцендентных уравнений. Для выполнения этой весьма трудоёмкой процедуры используются стандартные компьютерные программы и алгоритмы, разрабатываемые применительно к той или иной конкретной задаче.

В некоторых случаях при подготовке системы к расчётам часть искомых параметров удаётся выразить через остальные, уменьшив тем самым число параметров, подлежащих нахождению при последующем численном решении уравнений, число которых также соответственно уменьшается. В сокращённой системе выбирается уравнение, решаемое во внешнем цикле относительно некоторого параметра, сложной функцией которого представляется выражение, образующее это уравнение. В этот цикл вложены последовательно выполняемые внутренние циклы.

При решении системы каждый из искомых параметров связывается с одним из её уравнений вида $F(\mu)=0$. Однозначная разрешимость такого уравнения обеспечивается устанавливаемой аналитически или численно монотонностью функции $F(\mu)$ и различием её знаков на концах интервала, содержащего искомый параметр μ. Интервалы допустимых значений параметров определяются в результате предварительного расчёта критических режимов течения.

Для численного решения уравнений разработана стандартизированная процедура, состоящая из нескольких этапов. Вначале последовательным делением исходного интервала, в котором содержится искомый параметр, из него выделяется сокращённый интервал, на концах которого функция $F(\mu)$ имеет разные знаки. Нахождение параметра с предписанной точностью осуществляется затем в итерационном цикле, состоящей из одной линейной и серии квадратичных интерполяций.

В задачах фильтрации с дренажём в расчётные формулы входят эллиптические интегралы и функции. Для их вычисления используются экономичные алгоритмы, изложенные в серии статей [3]. Получаемые при решении задач аналитические зависимости содержат также несобственные интегралы. Среди них преобладают интегралы вида $I=\int\limits_a^b f(u)\,du/\sqrt{(u-a)(b-u)}$ с функцией $f(u)$, непрерывной в промежутке $[a,b]$. Особенности подынтегральной функции на обоих концах промежутка интегрирования устраняются одновременно посредством замены переменной $u=a+(b-a)v^2(2-v)^2$, в результате которой имеем $I=4\int\limits_0^1 f[u(v)]\,dv/\sqrt{2-v^2}$. Интегралы по бесконечному промежутку $[d,\infty)$ преобразуются заменой $u=d/[v^2(2-v^2)]$, переводящей исходный промежуток интегрирования в тот же, что и для всех прочих несобственных интегралов, прометуток $[0,1]$. Такая унификация избавляет от необходимости переприсвоения пределов интегрирования для каждого очередного интеграла, что значительно ускоряет расчёты при поистине калейдоскопическом чередовании вычисляемых интегралов.

Собственно интегрирование производится по стандартной программе, основанной на формуле Симпсона. Но эффективность программы, а в некоторых случаях и сама возможность реализации с требуемой точностью определяется поведением подынтегральных функций. Их относительно быстрое изменение происходит, как правило, вблизи концов промежутка интегрования, хотя оно существенно сглаживается в результате вышеуказанных замен переменной. С учётом этого исходный промежуток интегрирования разбивается на несколько частичных промежутков с уменьшением их длины по мере приближения к концевым точкам. Точность вычислений контролируется посредством соотношений, фиксирующих замкнутость границы области фильтрации, а также основанных на балансе физических характеристик течения. Во всех разработанных моделях фильтрационных течений относительная погрешность расчётов исчисляется величинами порядка $10^{-4} - 10^{-6}$.

Стратифицированные фильтрационные течения

Исследования по фильтрации жидкостей различной плотности, начатые на рубеже XIX и XX столетий, проводились в последующие десятилетия в рамках так называемых гидравлических, одномерных схем. В двумерной постановке задача о течении пресных грунтовых вод над солёными была впервые рассмотрена в работе [4]. Начавшиеся в 60-х гг. под руководством П. Я. Кочиной исследования по фильтрации стратифицированных жидкостей привели к созданию обширного комплекса математических моделей таких течений.

Центральное место в этом комплексе занимают краевые задачи фильтрации с дренажём в кайме пресных вод, образующейся над солёными грунтовыми водами за счёт притока из поверхностных источников или инфильтрации. Специфика задач этого сложного и малоизученного раздела подземной гидродинамики связана с наличием двух неизвестных подвижных границ каймы: свободной поверхности и поверхности раздела между пресными и солёными водами. Обе границы подвержены воздействию дренажа, активизация которого приводит в конечном итоге к проникновению в дрену воздуха или солёных вод. В связи с этим необходимо вначале рассчитать тот из двух возможных критических режимов, при котором произойдёт дестабилизация течения. Вопрос заключается в том, каким окажется этот режим при тех или иных входных параметрах исследуемого течения.

Ключом к разрешению дилеммы является *двойной критический режим*, выявленный в работе [5] и подлежащий первоочередному расчёту. Он состоит в том, что при некоторой, устанавливаемой численно глубине дренажного стока по достижении им определённой и также вычисляемой интенсивности критические режимы течения возникают одновременно на обеих подвижных границах. Их точки, расположенные на одной вертикали с дренажным стоком, становятся точками заострения своих границ, а интенсивность дренирования оказывается максимально достижимой. В зависимости от того, заложена дрена выше или ниже её положения в двойном критическом режиме, интервал допустимых значений её расхода рассчитывается в *простом критическом режиме*, связанном соответственно со свободной поверхностью или с поверхностью раздела. Далее течение можно исследовать в *нормальном режиме дренирования* при любом возможном значении расхода дрены.

Проиллюстрируем изложенный подход на задаче об инфильтрационной кайме пресных вод плотности ρ_1, сформировавшейся над солёными грунтовыми водами плотности ρ_2 [6]. Равномерно распределённая по поверхности инфильтрация заданной интенсивности ϵ компенсируется оттоком в равнодебитные и равноудалённые дренажные точечные стоки, расположенные на одинаковой глубине, вследствие чего в процессе формирования каймы сохраняется объём содержащихся в них пресных вод. Неизменным предполагается также объём солёных вод, изолированных от внешних источников и стоков. Периодичность течения позволяет ограничиться его изучением в пределах одного из полупериодов, представленного на рис. 1.

С использованием метода П. Я. Полубариновой-Кочиной, основанного на аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [7], в работе [6] получены следующие зависимости комплексного потенциала течения ω и комплексной координаты z точек области течения от параметрической переменной ζ (рис. 2):

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -2c_1\frac{F_1(\zeta)}{d-\zeta}\,\lambda(\zeta),\ \frac{dz}{d\zeta} = i\,c_1\frac{F_2(\zeta)}{d-\zeta}\,\lambda(\zeta),\ \lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta-p)(\zeta-r)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}}, \quad (1)$$

$$F_1(\zeta) = \sigma\,U - 1/U\,,\ F_2(\zeta) = \alpha\,U + \beta/U\,,\ U = \exp[W(\zeta)/2]\,,\ c_1 > 0\,.$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\epsilon+\rho} + \sqrt{\epsilon\,(1+\rho)}}{\sqrt{\epsilon+\rho} - \sqrt{\epsilon\,(1+\rho)}}\,, \quad \alpha = \frac{\sigma-1}{\epsilon} + \sigma + 1\,, \quad \beta = \frac{\sigma-1}{\epsilon} - \sigma - 1\,.$$

Функция $W(\zeta)$, используемая при построении решения и связанная с комплексной скоростью фильтрации w [7], определяется равенствами

$$W(\zeta) = \ln \frac{2i + \beta w}{2i\sigma - \alpha w} = i\, c_0 \int\limits_0^{\zeta} \Phi(u)\, du \quad (c_0 > 0)\,,$$

где

$$\Phi(u) = \frac{(b-u)(u-f)}{(p-u)(r-u)}\, \Phi_0(u)\,, \quad \Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{(u-g)u(1-u)}}\,,$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\epsilon+\rho} + \sqrt{\epsilon\,(1+\rho)}}{\sqrt{\epsilon+\rho} - \sqrt{\epsilon\,(1+\rho)}}\,, \quad \alpha = \frac{\sigma-1}{\epsilon} + \sigma + 1\,, \quad \beta = \frac{\sigma-1}{\epsilon} - \sigma - 1\,.$$

$$(\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1)\,.$$

Для функции $\lambda(\zeta)$, содержащейся в (1), выбирается ветвь, положительная при $\zeta > r$. Величины, связанные с функциями z и ω, отнесены соответственно к L и κL (κ — коэффициент фильтрации грунта).

С использованием балансовых соотношений получено следующее выражение для постоянной c_1:

$$c_1 = \frac{\epsilon\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi(\beta\sigma+\alpha)} \sqrt{\frac{(d-g)d(d-1)}{(d-p)(r-d)}}\,.$$

Содержащиеся в представлениях (1) для функций $z(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ постоянные c_0 и аффиксы b, d, g, f, p, r особых точек области фильтрации (см. рис. 1, 2), подлежат нахождению. В этой фактически самостоятельной задаче выделена внутренняя подзадача, которая сводится к определению параметров c_0, b, d, f, p при заданных параметрах g, r из системы уравнений, составленной с использованием элементов области W. В [6] разработан и обоснован аналитически алгоритм решения этой системы. Параметры g, и r подчинены при этом некоторым условиям, которые оказываются следствиями ограничений на интенсивность дренирования; последние же устанавливаются на начальном этапе исследования при расчёте соответствующего критического режима течения в рамках описанной выше процедуры. Относительно параметров g, r составлена система уравнений

$$-\int\limits_0^1 y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = H_0\,, \quad -\int\limits_{-\infty}^{g} y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = T_0\,, \tag{2}$$

левые части которых — остающиеся неизменными объемы пресных вод выше и ниже уровня дрен в сформировавшейся кайме, а правые — до включения дрен (см. рис. 1).

Первое уравнение в (2) содержит координаты точек кривой депрессии AC, второе — координаты точек линии раздела EG. Параметрические уравнения обеих подвижных границ каймы получаются из второй зависимости в (1), записанной на соответствующих участках действительной оси плоскости ζ. Алгоритм нахождения неизвестных параметров отображения при заданных физических параметрах подробно изложен и обоснован в работе [6].

В комплекс моделей стратифицированных течений входят также задачи притока нефти к горизонтальным скважинам в пластах, содержащих жидкости с иными физическими свойствами или газ [8].

Список литературы

1. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и её основные приложения // Собр. соч. М.;Л.; Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 3–152.
2. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
3. Bulirsch R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Num. Math. 1965. B. 7, H. 1. S. 78–90; H. 4. S. 353–354; 1969. B. 13, H. 4. S. 305–315.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. О линзе пресной воды над соленой водой // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 418–420.
5. Эмих В. Н. Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и ее приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 494–504.
6. Капранов Ю. И., Эмих В. Н. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45. №5. С. 79–93.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
8. Эмих В. Н. Фильтрация нефти к скважине при наличии в пласте иных жидкостей // Доклады РАН. 2010. Т. 435. №2. С. 199–204.