Численное моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде

Л.А. Мержиевский

Объединенный институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск), Россия

e-mail: merzh@hydro.nsc.ru

А.Н. Корчагина

Объединенный институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск), Россия

e-mail: anchouse@ngs.ru

Аннотация

Для расчета распространения теплового импульса в настоящее время используется либо квазилинейное, либо гиперболическое уравнение теплопроводности. Особое место при исследовании нелинейных эффектов, описываемых уравнением теплопроводности, занимает изучение так называемых режимов с обострением [1], в которых характерные величины стремятся к бесконечности за конечные промежутки времени. В ряде реальных высокоскоростных процессов необходимо учитывать время релаксации теплового потока (время установления локального термического равновесия). Такой учет приводит к формулировке нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности [2].

Значительное количество реальных процессов не укладываются в представления механики сплошной среды и требуют привлечения представлений о фрактальности среды, в которой они происходят. К таким процессам, например, относится распространение тепла в высокопористых средах. Для описания таких процессов используется модифицированный закон Фика [3], что требует привлечения математического аппарата дробного интегро-дифференциального исчисления [4]. В классическое уравнение теплопроводности вводятся производные дробного порядка как по пространству, так и по времени. Возникают начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными. Развиваются аналитические методы решения задач, однако наибольшее распространение получили численные методы [3,4]. Это связано, в первую очередь с тем, что аналитические решения удается получить только в редких частных случаях.

Одна из проблем, возникающих при использовании дробных производных, заключается в том, что не существует их однозначного определения. Численные методы решения задач для уравнений с дробными производными привязаны к виду выбранной произ-

водной, поэтому возникает необходимость анализа и сравнения результатов, полученных при использовании разных определений и численных методов. Такое сравнение проводится в данной работе на примере задачи о распространении теплового импульса.

Рассмотрены определения дробных производных Римана-Лиувилля, Капуто и Грюнвальда-Летникова, и соответствующие численные методы. Проведено сравнение численных решений задачи о распространении теплового импульса, полученных различными методами для разных типов дробных производных. Анализ результатов позволил выделить методы, наиболее перспективные с точки зрения адекватности описания реальных процессов распространения тепловых волн во фрактальных средах.

Нелинейное уравнение теплопроводности

Нелинейное уравнение теплопроводности в одномерном случае имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, (1) где x, t – пространственная переменная и время, u – искомая функция. При анализе режимов с обострением обычно рассматривается случай $K(u)=ku^{\sigma}$, $k = const > 0$, $\sigma \geq 1$. Данное уравнение имеет решение, производные которого в точках, где u (t,x) обращается в нуль, разрывны, а поток $K(u)\ \frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывен, т.е. существует фронт температуры, который распространяется с конечной скоростью. Классического решения в этом случае уравнение не имеет, но имеет обобщенное.

Гиперболическое уравнение теплопроводности.

При анализе быстропротекающих процессов зачастую необходимо учитывать конечность скорости распространения тепла. В этом случае закон Фурье принимает вид [2] $gradT+\tau\frac{\partial Q}{\partial t}=-Q$, где Q – тепловой поток, τ – время тепловой релаксации. Соответствующее уравнение теплопроводности становится гиперболическим $\frac{\partial\ u}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Влияние скорости распространения тепла на волновые процессы в термовязкоупругой среде проанализировано в [5].

Уравнения с дробными производными.

Наиболее широким и часто используемым подходом к определению понятия производной дробного порядка является определение Римана-Лиувилля [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}}, \quad x > a, 0 \ \le m-1 \ < \alpha \le m.$$

Упрощением данного определения является определение Капуто, которое применимо для достаточно гладких функций, таких, что операция дифференцирования может быть внесена под знак интеграла:

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(\xi) d\xi, \quad x > a, 0 \ \le m-1 \ < \alpha \le m. \qquad (1)$$

Развивая идею Лиувилля, А. Грюнвальд и – независимо – А.В. Летников ввели понятие дробной производной как предела разностных отношений:

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^\alpha u(x)}{h^\alpha}, \quad \Delta_h^\alpha u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^\alpha u(x-(k-1)h) \qquad (2)$$

$$\omega_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}, \qquad (3)$$

Если $u(x)$ непрерывна, а du/dx интегрируема на отрезке [*a,x*], то производные Римана-Лиувилля, Капуто и Грюнвальда-Летникова существуют и совпадают.

Для вывода уравнений теплопроводности (классического, нелинейного, гиперболического) с дробными производными используется соответствующий вариант модифицированного закона Фурье [3]. В частности, классическое уравнение теплопроводности приобретает вид (здесь K_0 = const):

$$D_t^\gamma u(x,t) = K_0 D_x^\alpha u(x,t), D_x^\alpha = \frac{1}{2}(1+\beta)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}(1-\beta)\frac{\partial^\alpha}{\partial(-x)^\alpha} \quad 0 \ < \ \gamma \ \le \ 2 \quad 1 \le \alpha \le \ 2, \ -1 \ \le \beta \le \ 1$$

Здесь α – дробный порядок дифференцирования по пространству, β – «коэффициент скошенности», который характеризует направление переноса вещества при $\alpha \to 1$, γ – дробный порядок дифференцирования по времени.

Методы численного решения

Методы численной аппроксимации дробных производных напрямую связаны с их определениями. Анализ применимости разных методов аппроксимации и существующих разностных схем решения уравнений с дробными производными осуществлен в [6,9]. Вначале рассмотрим линейное уравнение теплопроводности, которое перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{\gamma-1} u(x,t)}{\partial t^{\gamma-1}}\right) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 1 < \gamma < 2 \, .$$

После численной аппроксимации, представления оператора дробного дифференцирования в виде конечной суммы интегралов по отрезкам $t_k \le t \le t_{k+1}$, расположенным между узлами расчетной сетки, и дальнейших преобразований получаем [6,7]:

$$Au_{i+1}^{n+1} - Cu_i^{n+1} + Bu_{i-1}^{n+1} + D = 0\,, \quad A = B = \frac{1}{h^2}\,, \quad C = \frac{2}{h^2} + \lambda_0\,, \quad D = \frac{{}^{\gamma-1}Lu_i^n - {}^{\gamma-1}\widetilde{L}u_i^{n+1}}{\tau}$$

и далее решаем уравнение методом трехточечной прогонки. Порядок аппроксимации данной схемы $O(\tau + h^2)$.

Для производной Грюнвальда-Летникова на основе определения формулируется конечно-разностная схема:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau^{2-\gamma}h^2}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{2-\gamma}(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})\,,$$

порядок аппроксимации которой также $O(\tau + h^2)$. Схема является условно устойчивой, достаточное условие устойчивости: $\frac{\tau^\gamma}{h^2} \le \frac{1}{2^{2-\gamma}}$ [8].

Аналогично строятся разностные схемы в других случаях [6,9].

Результаты

Проведено сравнение численных решений задачи о распространении теплового импульса, полученных различными методами для разных типов дробных производных.

Результаты решения начально-краевой задачи *u(x,0) = δ(x-π), ∂u/∂t = 0, u(0,t0) = u(2π,t)=0* для линейного уравнения теплопроводности с дробной производной по времени показаны на рис. 1,а. Решение этой задачи в случае дробной производной по пространству при *α* = 1,15 приведены на рис. 1,б. Здесь наблюдается расползание и смещение импульса

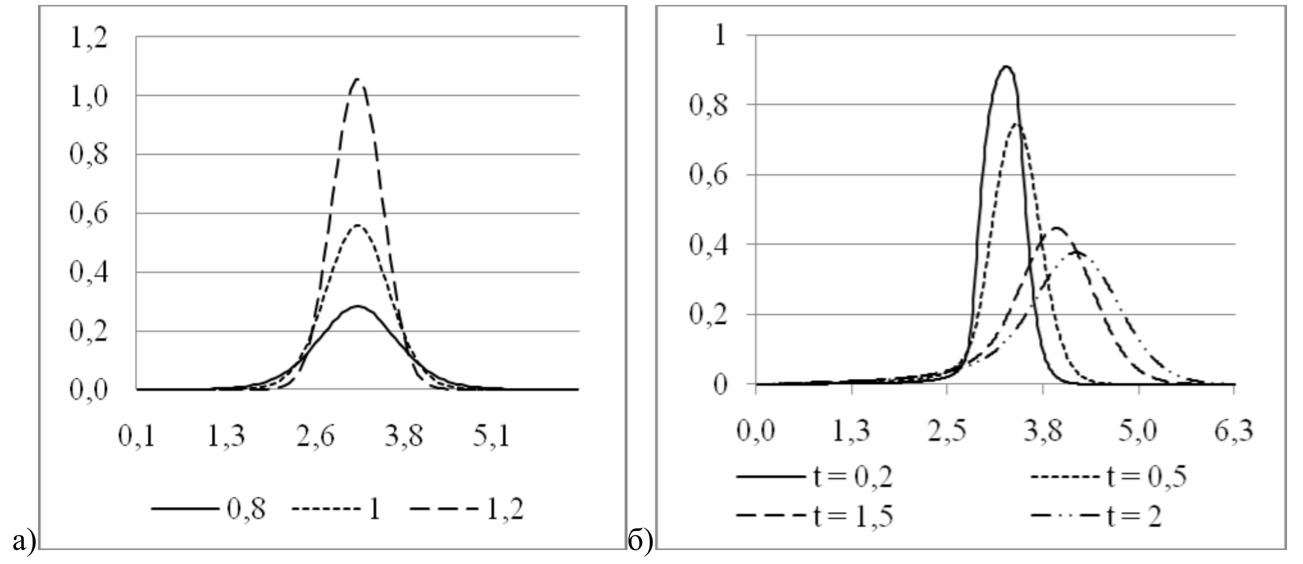
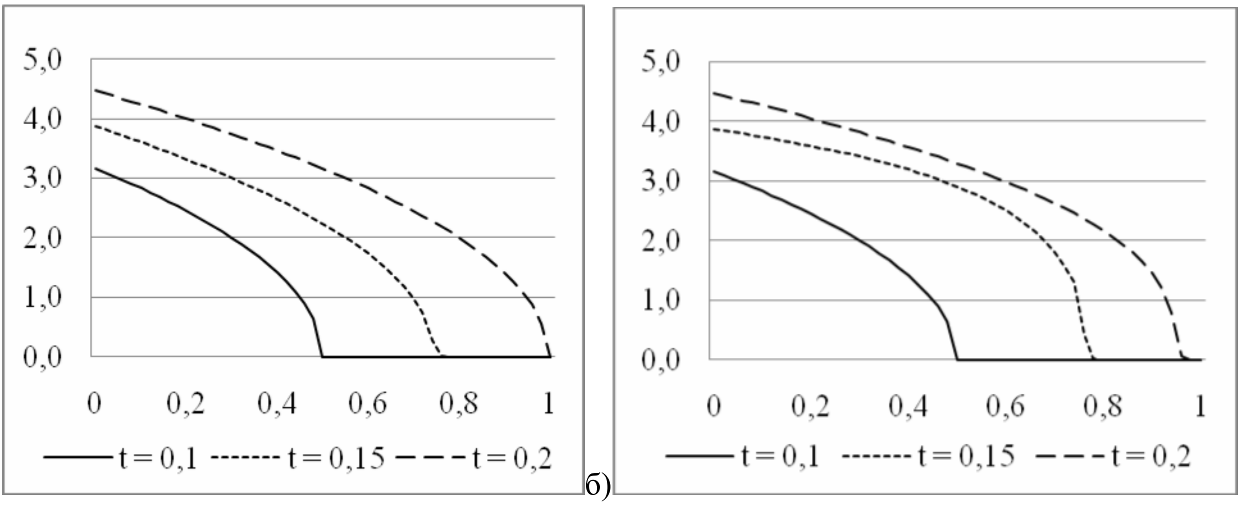


Рисунок 1 - а) положение решения в фиксированное время t=0.1 при γ = 0,8; 1; 1,2 ,
б) изменение решения с течением времени, дробная производная по пространству α=1,15



а) б)

Рисунок 2 – решение нелинейного уравнения а) без дробных производных, б) с дробной производной по времени γ=1,2

вправо. На рис. 2 сравниваются решения для нелинейного уравнения (рис. 2,а) и нелинейного уравнения с дробной производной по времени при $\gamma =$ 1,2 (рис. 3,б) в случае задачи о распространении тепловой волны.

Также проведены расчеты для гиперболического уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, а также с дробной производной по времени $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}+\tau\frac{\partial^{\gamma+1} u}{\partial t^{\gamma+1}}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, начальные и краевые условия $u(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(2\pi,t)=2$, где τ – параметр тепловой релаксации, γ – показатель дробной производной по времени.

Выводы

Проанализирована зависимость поведения решений от параметров порядка дифференцирования и кососимметричности. При $\gamma < 1$ скорость протекания процесса вначале больше скорости классической диффузии, но с течением времени наблюдается замедление, характерное для субдиффузии. При $\gamma > 1$ скорость процесса выше, чем в классическом случае, и процесс с течением времени ускоряется. В этом случае проявляются «волновые» свойства решения.

Решения уравнений с дробной производной по пространству показывают зависимость скорости распространения тепла от порядка дробной производной, оказывающейся большей, чем предсказывает классическая модель. При приближении параметра дифференцирования к 1 наблюдается явно выраженный процесс переноса (рис. 1,б).

Сравнение результатов, полученных при использовании разных определений дробных производных (Римана-Лиувилля, Капуто, Грюнвальда-Летникова) и соответствующих разностных аппроксимаций, показало, что получаемые для рассмотренных задач данные практически совпадают. Это означает, что для решения данного класса конкретных краевых задач эти методы равноценны и дают решения, достаточно близкие к полученным в некоторых случаях аналитическим.

Как и в классическом случае, для нелинейного уравнения с дробными производными получаем тепловую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью, параметры которой, однако, отличаются от решения обычного уравнения. Анализ решений гиперболического уравнения теплопроводности как в классическом случае, так и в случае дробных производных, выявил существенную зависимость скорости протекания процесса от времени тепловой релаксации.

Для всех случаев уравнений с дробными производными получаемые решения обладают всеми качественными свойствами решений «родительских» уравнений.

Библиография

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967.
3. Paradisi P., Cesari R., Mainardi F., Tampieri F. The fractional Fick’s law for non-local transport processes. Physica A, 2001, 293, P. 130-142.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. Merzhievsky L.A., Kondratyev Yu.F. Wave processes in thermoviscoelastic medium. Journal de Physique, 1991 coll.C3, v. 1, p. C3-503 – C3-510.
6. Мержиевский Л.А., Корчагина А.Н. Сравнение методов численного решения задач для уравнения теплопроводности дробного порядка. X Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 2008 г. С.85-86.
7. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае. М., 2002 (Препринт / ИБРАЭ РАН: IBRAE-2002-01).
8. Лукащук С.Ю., Кostригин И.В. Численное решение диффузионно-волновых уравнений дробного порядка на кластерных системах. Труды VI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, 29-31 октября 2005 года, г. Кемерово, Россия, 19 стр.
9. Мержиевский Л. А., Корчагина А. Н. Моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде. Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Труды международной конференции "XI Харитоновские тематические научные чтения". Саров, 2009 г, С. 250-254.