

# Устойчивость спиральных течений

Е.Г. Борд<sup>1</sup>, В.Я. Рудяк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)*

<sup>2</sup> *Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН (Новосибирск)*  
e-mail: [ngasu2005@ngs.ru](mailto:ngasu2005@ngs.ru)

The linear stability of the flow between two coaxial cylinders explored numerically. Two partial cases – the axial Poiseuille flow and Couette flow between rotating cylinders is concerned as limits. For the spiral flow the neutral stability curves has been established. Two different types of instability in dependence of the rotational and axial Reynolds numbers occurred.

## Введение

Исследование гидродинамической устойчивости течений в каналах актуально до сих пор и востребовано в технических приложениях. Вместе с тем до сих пор отсутствует систематическое исследование гидродинамической устойчивости течения в цилиндрическом канале, несмотря на то, что изучение устойчивости таких течений активно ведется уже около пятидесяти лет. Одной из первых теоретических работ, посвященных изучению устойчивости напорного течения в зазоре между концентрическими цилиндрами, является статья [1]. Было установлено существование монотонной зависимости параметров устойчивости при изменении отношения радиусов цилиндров от единицы (этот предел соответствует течению между параллельными плоскостями) до нуля (в этом пределе получается задача устойчивости для течения Хагена – Пуазейля в круглой трубе). При этом критическое число Рейнольдса меняется от 5778 до бесконечности. К сожалению, авторам [1] не удалось построить кривые нейтральной устойчивости.

Задача устойчивости спиральных возмущений по энергетическому критерию сформулирована в [2]. Такой подход, однако, не позволяет исследовать влияние частоты возмущений на их длины волн в зависимости от числа Рейнольдса. Тем не менее, в этой работе была получена первая нижняя оценка области устойчивости данного течения и установлено принципиальное значение влияния азимутальных возмущений на ламинарно – турбулентный переход.

Вращение внутреннего цилиндра также является причиной изучения влияния неосевых возмущений на характеристики устойчивости. В отсутствии осевого течения, вращение внутреннего цилиндра создает цилиндрическое течение Куэтта. Устойчивость этого течения подробно изучена и экспериментально, и теоретически. Историю решения этой задачи и обзор полученных здесь результатов можно найти в [3, 4]. Для данного течения получены критические значения азимутального числа Рейнольдса и аксиального волнового числа для течений в зазорах различной ширины. Показано, что течение становится неустойчивым при достаточно малых числах Рейнольдса.

Суперпозиция цилиндрического течения Куэтта и напорного течения создает спиральное течение в зазоре между концентрическими цилиндрами. Важный шаг в исследовании

довании этого течения был сделан в серии работ [5, 6]. Решались уравнения устойчивости:

$$u_r + u/r + inv/r + i\alpha w = 0, \quad (1)$$

$$(i\tilde{W} - L)u + 2Re_\varphi V_0 v/r + (u + 2inv)/r^2 = -\partial_r p, \quad (2)$$

$$(i\tilde{W} - L)v + Re_\varphi (V'_0 + V_0/r)u + (v - 2inu)/r^2 = -inp/r, \quad (3)$$

$$(i\tilde{W} - L)w + Re_z W'_0 u = -i\alpha p. \quad (4)$$

Здесь  $L = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - n^2/r^2 - \alpha^2$ ,  $\tilde{W} = -\omega + \alpha Re_z W_0 + nRe_\varphi V_0/r$ ,  $V_0, W_0$  – осевая и азимутальная составляющие скорости установившегося течения,  $u, v, w, p$  – амплитуды возмущений скорости и давления,  $\alpha, n$  – осевое и азимутальное волновые числа,  $Re_z, Re_\varphi$  – осевое и азимутальное числа Рейнольдса,  $\omega$  – комплексная частота. В [5] были рассчитаны характеристики устойчивости напорного течения и установлено, что моды возмущений течения с азимутальными волновыми числами  $n = 0, 1, 2$  неустойчивы. В статье [6] численно изучалась устойчивость спирального течения. Рассматривались возмущения с азимутальным волновым числом  $n = 0$ . Для этой моды возмущений получены кривые нейтральной устойчивости. Их сопоставление с экспериментальными данными, однако, оказалось неудовлетворительным. Кроме того, не были получены значения критических чисел Рейнольдса, соответствующие им осевые и азимутальные волновые числа, форма кривых нейтральной устойчивости. Основная причина отсутствия согласования с экспериментальными данными, по-видимому, состояла в низкой точности расчетов. Позднее это отмечалось и в работе [7], где для течений в зазорах с отношением радиусов  $\theta = 0.95; \theta = 0.77$  впервые построены достаточно надежные кривые нейтральной устойчивости. Здесь  $\theta = R_{in}/R_{out}$ ;  $R_{in}, R_{out}$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно. Для течения в зазоре с  $\theta = 0.77$  в [7] была впервые установлена неустойчивость различных азимутальных мод возмущений, при этом азимутальное волновое число критических возмущений достигало значения  $n = 21$ .

Экспериментальному исследованию устойчивости спирального течения в зазоре с  $\theta = 0.77$  посвящена работа [8]. Для осевых чисел Рейнольдса в диапазоне  $Re_z \sim 1 \div 150$  были найдены критические значения азимутального числа Рейнольдса и критические волновые числа. Установлено, что неустойчивыми могут быть различные азимутальные моды, в том числе возмущения с азимутальным волновым числом, равным нулю. Критические азимутальные числа Рейнольдса при этом не превышали  $Re_\varphi \leq 200$ .

Достижения последних лет представлены в работах [9, 10]. В первой из них данная задача решалась численно и полученные данные неплохо согласовывались с данными [8], хотя рассчитанные критические числа Рейнольдса существенно отличаются от экспериментальных. В работе [10] изучена устойчивость течения в широких ( $\theta = 0.1$ ) зазорах. Утверждается, что напорное течение в зазоре без вращения внутреннего цилиндра остается устойчивым при  $\theta < 0.115$ . Получены кривые нейтральной устойчивости в плоскости  $(Re_\varphi, \alpha)$  при азимутальном числе Рейнольдса  $Re_z = 100$ . Таким образом, данный краткий обзор показывает, что, несмотря на большой интерес к решению задачи устойчивости для спирального течения в концентрическом канале, здесь все еще отсутствуют систематические данные относительно характеристик их устойчивости. Получение таких данных и является целью данной работы. Задача решалась численно в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости.

## 1. Осесимметричные возмущения в напорном течении

Рассмотрим сначала устойчивость напорного течения между соосными неподвижными цилиндрами. Азимутальная скорость полагается равной нулю как в стационарном течении, так и в возмущениях. Предполагается также, что скорость и давление не зависят от угловой переменной. В этих предположениях для компонент возмущений скорости можно ввести функцию тока:  $u = -i\alpha\psi$ ,  $w = \partial_r\psi + \psi/r$ , при этом из уравнений (1–4) следует уравнение типа Орра – Зоммерфельда:

$$\left(L - \alpha^2 + iRe_z(\omega - \alpha W_0)\right) \left(L - \alpha^2\right) \psi + i\alpha Re_z(W_0'' - W_0'/r)\psi = 0, \quad (5)$$

здесь  $L = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2}$ . Уравнение (5) с граничными условиями отсутствия возмущений на границах образует спектральную задачу относительно  $\omega$ . Множество значений параметров, таких что  $Im(\omega) = 0$ , образует кривую нейтральной устойчивости в плоскости  $(Re_z, \alpha)$ .

На рис. 1 представлены кривые нейтральной устойчивости осесимметричных возмущений, полученные для течений с различными отношениями радиусов. Наиболее

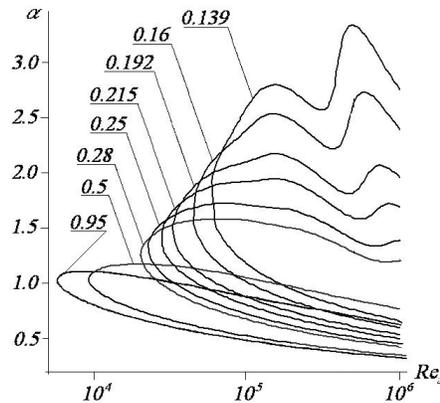


Рис. 1. Кривые нейтральной устойчивости осевых возмущений напорного течения

неустойчивыми являются течения в узком зазоре, причем критическое число Рейнольдса для течения с  $\theta = 0.95$  близко к критическому числу Рейнольдса плоского течения Пуазейля. В диапазоне значений  $\theta > 0.5$  кривые нейтральной устойчивости остаются подобными кривым нейтральной устойчивости плоского течения Пуазейля (при  $\theta = 0.95$  кривые, построенные для течения в зазоре и для плоского течения, графически неразличимы). С увеличением ширины зазора  $\theta < 0.3$  значение критического числа Рейнольдса возрастает более чем в десять раз, при этом изменяется и форма кривых нейтральной устойчивости. Диапазон неустойчивости по волновым числам в течениях расширяется.

## 2. Неосесимметричные возмущения в напорном течении

Геометрическое несовершенство канала, эксцентриситет, вращение внутреннего цилиндра могут быть источником неосесимметричных возмущений напорного течения. В этом случае решается задача устойчивости (1–4). В соответствии с данными, приведенными в [7, 10], азимутальные возмущения становятся неустойчивыми при отношении радиусов  $\theta < 0.77$ . На рис. 2 приведены кривые нейтральной устойчивости, построенные для

течений в широких зазорах. Критические числа Рейнольдса, азимутальные волновые числа и обозначения кривых для этих течений даны в табл. 1.

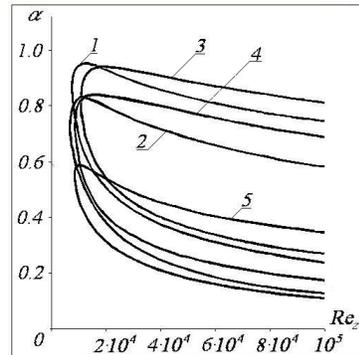


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости возмущений для течений в широких зазорах

Таблица 1. Критические числа Рейнольдса и азимутальные числа на рис. 2

Кривая на рис. 2	1	2	3	4	5
$\theta$	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$n$	2	2	1	1	1
$Re_z$	7633	7711	10792	8609	8542

Данные расчетов, представленные на рис. 2 и в табл. 1, показывают, что азимутальные возмущения приводят к существенному уменьшению критических чисел Рейнольдса по сравнению с критическими числами, полученными для осесимметричных возмущений (рис. 1).

### 3. Спиральное течение

Спиральное течение возникает в результате суперпозиции напорного течения и цилиндрического течения Куэтта, вызванного вращением внутреннего цилиндра. Вес отдельных составляющих в спиральном течении определяется осевым и азимутальным числами Рейнольдса. Следовательно, характеристики устойчивости спирального течения будут существенно зависеть от соотношения между ними. Можно ожидать также, что в различных диапазонах значений осевого и азимутального чисел Рейнольдса будут проявляться различные типы неустойчивости.

На рис. 3 приведены кривые нейтральной устойчивости, полученные для течения в зазоре с  $\theta = 0.5$ . Здесь кривая 1 получена при  $Re_\varphi = 51, n = 5$ , кривая 2 –  $Re_\varphi = 52, n = 3$ , кривая 3 –  $Re_\varphi = 48.5, n = 1$ , кривая 4 –  $Re_\varphi = 43, n = 1$ , кривая 5 –  $Re_\varphi = 38.92, n = 0$ , кривая 6 –  $Re_\varphi = 35.3, n = 0$ . Метками на рисунке показаны критические точки, полученные в экспериментах [8]. Вид кривых нейтральной устойчивости позволяет сделать вывод о том, что в данном диапазоне осевых чисел Рейнольдса происходит изменение типа неустойчивости. Неустойчивости типа Толлмина – Шлихтинга соответствует кривая 1. Кривые 3–6 демонстрируют тенденцию к неустойчивости течения при малых осевых числах Рейнольдса и стабилизацию течения с увеличением осевого числа Рейнольдса. Возникновение порогового значения  $Re_z$  говорит о неустойчивости, характерной для цилиндрического течения Куэтта. При этом наиболее неустойчивыми оказываются различные азимутальные моды возмущений, в том числе возмущения с  $n = 0$

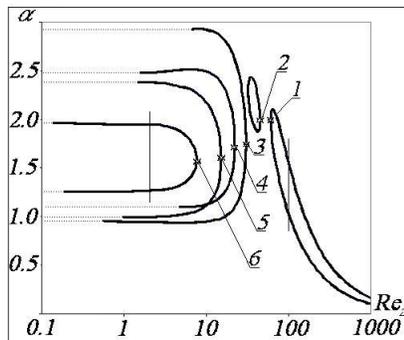
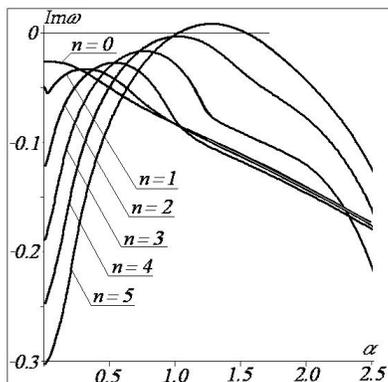
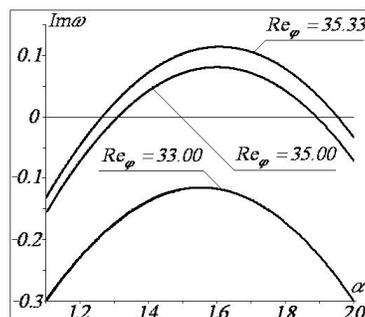


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости спирального течения

(кривые 5, 6). Появление замкнутой кривой 2 завершает картину перехода между двумя различными типами неустойчивости.

На рис. 4 и 5 представлены зависимости инкремента нарастания возмущений от волнового числа, полученные при фиксированных осевых числах Рейнольдса.

Рис. 4.  $Re_z = 100$ Рис. 5.  $Re_z = 2$ 

Зависимости, представленные на рис. 4, соответствуют вертикальному сечению области неустойчивости, ограниченной кривой 1 на рис. 3. Видно, что моды, соответствующие азимутальным волновым числам  $n < 5$ , являются затухающими, причем поведение кривых оказывается близким к монотонному по волновому числу  $n$ . Зависимости коэффициентов усиления, показанные на рис. 5, соответствуют вертикальному сечению области неустойчивости 6 на рис. 3. Значение азимутального числа Рейнольдса, при котором получена эта кривая, близко к критическому, причем с уменьшением азимутального числа Рейнольдса течение стабилизируется. Таким образом, можно констатировать, что при отношении радиусов  $\theta = 0.5$  установлено соответствие результатов линейной теории устойчивости с экспериментальными данными [10]. Показано, что в зависимости от чисел Рейнольдса наиболее неустойчивыми могут быть различные азимутальные моды. Обнаружено изменение типа неустойчивости спирального течения Пуазейля в зависимости от величин азимутального и осевого чисел Рейнольдса. Характер неустойчивости данного течения должен существенно меняться с изменением параметра  $\theta$ . Установление этой зависимости требует дальнейшего исследования.

## Список литературы

- [1] MOTT J.E., JOSEPH D.D. Stability of parallel flow between concentric cylinders // *Phys. Fluids*. 1968. V. 11, № 10. P. 2065–2073.
- [2] JOSEPH D.D., MUNSON B.R. Global stability of spiral flow // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 43, pt. 3. P. 545–575.
- [3] COLE J.A. Taylor-vortex instability and annulus-length effects // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 75. P. 1–15.
- [4] DiPRIMA R.C., EAGLES P.M., NG B.S. The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27, № 10. P. 2403–2411.
- [5] Гольдштик М.А., САПОЖНИКОВ В.А. Устойчивость течения в кольцевом канале // *Изв. АН СССР. Сер. МЖГ*. 1971. № 10. С. 102–108.
- [6] Вильгельми Т.А., ШТЕРН В.Н. Устойчивость спирального течения в кольцевом канале // *Изв. АН СССР. Сер. МЖГ*. 1974. № 3. С. 35–44.
- [7] NG B.S., TURNER E.R. On the linear stability of spiral flow between rotating cylinders // *Proc. R. Soc. Lond.* 1982. A382. P. 83–102.
- [8] TAKEUCHI D.I., JANKOWSKI D.F. A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 102. P. 101–126.
- [9] MESEGUER A., MARQUES F. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 455. P. 129–148.
- [10] COTRELL D.L., PEARLSTEIN A.J. Linear stability of spiral and annular Poiseuille flow for small radius ratio // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 547. P. 1–20.