Наибо́льший интервал с заданными пропорциями для интервальной линейной задачи о допусках*

И.А. Шарая
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `sharaya@ict.nsc.ru`

Предложен и обоснован новый метод решения интервальной линейной задачи о допусках. Он ищет решение среди интервалов с фиксированными пропорциями.

1. Термины, обозначения, постановка задачи

1.1. Интервалы

Интервалами будем называть не только интервальные числа (отрезки вещественной оси), но также интервальные векторы и матрицы. Следуя стандарту [1] написания работ по интервальному анализу, интервалы будем обозначать жирным шрифтом, а неинтервальные числа, векторы и матрицы — обычным.

Отношения "$=$", "$\leq$" и "$\subseteq$" для векторов и матриц понимаем по всем компонентам.

Интервал $\boldsymbol{x}$ в конечномерном пространстве задается своими концами, т.е. (см. рис. 1) такими двумя точками $\underline{x}$ и $\overline{x}$ этого пространства, для которых справедливо неравен-

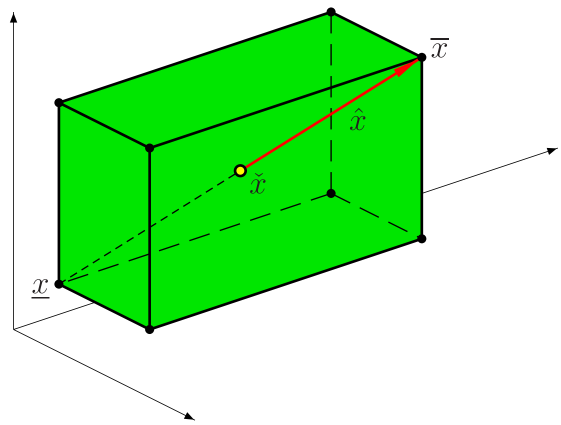

Рис. 1. Интервал $\boldsymbol{x}$ в $\mathbb{R}^3$

ство $\underline{x} \leq \overline{x}$. При этом $\underline{x}$ называется *нижним*, а $\overline{x}$ – *верхним концом интервала* $\boldsymbol{x}$, а сам интервал представляет собой множество всех точек x, для которых $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$. Геометрически, интервал в конечномерном пространстве — это прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям. Вершины этого параллелепипеда называются *вершинами интервала*. На рис. 1 вершины интервала $\boldsymbol{x}$ выделены черными

*Работа выполнена при поддержке Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6068.2010.9).

точками. При работе с интервалом полезны также его *середина* $\check{x} := (\underline{x} + \overline{x})/2$, *радиус* $\hat{x} = (\overline{x} - \underline{x})/2$ и *ширина* $\operatorname{wid} \boldsymbol{x} := \overline{x} - \underline{x}$ (от англ. width).

Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ – вектор с неотрицательными компонентами. Интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ длины n будем называть *интервалом с пропорциями* p, если его ширина пропорциональна p, т.е.

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{x}_1 : \operatorname{wid} \boldsymbol{x}_2 : \ldots : \operatorname{wid} \boldsymbol{x}_n = p_1 : p_2 : \ldots : p_n.$$

Радиус интервала равен половине ширины, поэтому он тоже пропорционален p. Коэффициент этой пропорциональности обозначим через λ. Т.к. $\hat{x} \geq 0$ и $p \geq 0$, то $\lambda \geq 0$ и мы можем записать для радиуса

$$\hat{x} = \lambda p, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0.$$

Сам же интервал $\boldsymbol{x}$ с пропорциями p можно представить как $\boldsymbol{x} = [\check{x} - \lambda p, \check{x} + \lambda p]$ или, что то же самое, в виде

$$\boldsymbol{x} = \check{x} + p[-1, 1]\lambda. \tag{1}$$

Интервалы с пропорциями p сравнимы по размеру. Тот интервал считается больше, у которого больше коэффициент λ. Пусть дано некоторое множество интервалов с пропорциями p. *Наибольшим* в этом множестве считается всякий интервал, который по размеру не меньше остальных.

1.2. Интервальная линейная задача о допусках

Для интервальной линейной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}$ – интервальная матрица размера m на n, а $\boldsymbol{b}$ – интервальный вектор длины m, *допусковым решением* называется такой точечный вектор x длины n, что для всех точечных матриц A из $\boldsymbol{A}$ значение Ax лежит в интервале $\boldsymbol{b}$.

Интерпретация допускового решения (см. рис. 2). Рассмотрим процесс, в ко-

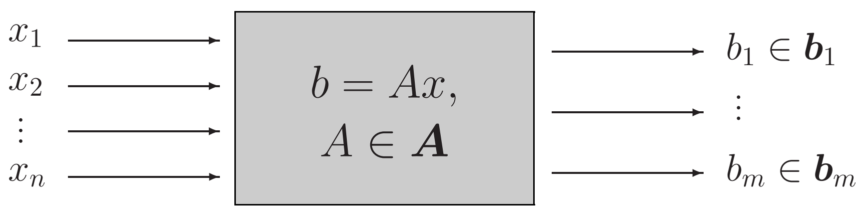

Рис. 2.

тором вектор входных переменных x преобразуется в вектор выходных переменных b по линейному закону. Компоненты A_{ij} матрицы этого преобразования известны с точностью до интервалов $\boldsymbol{A}_{ij}$. Для компонент вектора выходных переменных заданы интервалы допустимых значений (допуски): $b_i \in \boldsymbol{b}_i,\ i = 1, \ldots, m$. Допусковое решение — это такой вектор входных переменных, для которого, несмотря на неточность знаний о коэффициентах линейного преобразования, можно гарантировать, что выходные переменные будут удовлетворять заданным допускам.

Множество всех допусковых решений называется *допусковым множеством решений (ДМР)*. Следуя традиции, будем обозначать его Ξ_{tol} (tolerance – по англ. «допуск»).

Исходя из приведенной на рис. 2 интерпретации, ясно, что не столь полезно знать отдельное допусковое решение или всё ДМР, сколько интервал $\boldsymbol{x}$, лежащий в ДМР. Тогда значение каждого входа x_i можно выбирать в пределах интервала $\boldsymbol{x}_i$ независимо от значения других входов, и при этом выход b останется в пределах $\boldsymbol{b}$. Интервал, лежащий в множестве, называется *внутренним* для этого множества. А задача об отыскании внутреннего интервала для допускового множества решений известна как *интервальная линейная задача о допусках.* Понятно, что при прочих равных условиях лучшим решением задачи о допусках считается тот интервал, который больше. Обзор известных методов решения интервальной линейной задачи о допусках есть в [2].

Мы представляем новый метод решения задачи о допусках. Суть его в том, что решение ищется как наибо́льший интервал с заданными пропорциями. В прикладном аспекте (см. рис. 2), такой подход позволяет учесть желаемые соотношения допусков на входы. А с вычислительной точки зрения, он удобен тем, что преобразует исходную задачу о допусках к задаче об отыскании безусловного максимума вогнутой кусочно-линейной функции. В отличие от известных, новый метод, решая задачу о допусках, одновременно проверяет, не пусто ли допусковое множество решений. Тем самым, он позволяет сказать, имеет ли задача о допусках вообще какое-то решение (не обязательно с заданными пропорциями).

2. Новый критерий внутреннего интервала для ДМР

Договоримся множество всех вершин интервала обозначать через vert (от англ. vertices). Так, для интервального вектора $\boldsymbol{a}$ длины n

$$\operatorname{vert}\boldsymbol{a} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \{\underline{a}_i, \overline{a}_i\},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, что это множество содержит не более 2^n элементов, т.е. $|\operatorname{vert}\boldsymbol{a}| \le 2^n$. Строгое неравенство здесь соответствует интервальному вектору, у которого есть такие компоненты i, что $\underline{a}_i = \overline{a}_i$.

В [3] было доказано следующее утверждение о строении ДМР.

Лемма 1.

$$\Xi_{tol} = \bigcap_{i=1,\ldots,m}\ \bigcap_{a\in\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})} \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \in \boldsymbol{b}_i\}, \quad \text{где } \boldsymbol{A}_{i:} = (\boldsymbol{A}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{A}_{in}),$$

т.е. допусковое множество решений Ξ_{tol} представимо в виде пересечения гиперполос, число которых не превосходит $\sum_{i=1}^{m} |\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})|$ и, тем более, не превосходит $m\cdot 2^n$.

Лемму 1 можно переформулировать так: допусковое множество решений совпадает с множеством решений системы двойных линейных неравенств

$$\underline{b}_i \le ax \le \overline{b}_i, \quad a \in \operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:}),\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Для дальнейших выкладок удобно представить эту систему в виде принадлежности $Cx \in \boldsymbol{d}$, где $C \in \mathbb{R}^{M\times n}$ — матрица системы, $M = \sum_{i=1}^{m} |\operatorname{vert}(\boldsymbol{A}_{i:})|$, $\boldsymbol{d}$ — интервальный вектор длины M (он составлен из компонент вектора $\boldsymbol{b}$ с повторами). В этих обозначениях Лемму 1 можно переписать как

$$x \in \Xi_{tol} \iff Cx \in \boldsymbol{d}. \tag{2}$$

Еще один факт, который нам понадобится, — критерий внутреннего интервала для множества решений системы двойных линейных неравенств. Этот результат имеет много простых доказательств и потому его авторство установить трудно.

Лемма 2. *Пусть $\widetilde{C}$ – прямоугольная вещественная матрица, $\widetilde{\boldsymbol{d}}$ – интервальный вектор. Интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ лежит в множестве решений системы $\widetilde{C}x \in \widetilde{\boldsymbol{d}}$ тогда и только тогда, когда справедливо интервальное включение $\widetilde{C}\boldsymbol{x} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{d}}$.*

Доказательство. Нам надо доказать эквивалентность

$$(\forall x \in \boldsymbol{x})(\widetilde{C}x \in \widetilde{\boldsymbol{d}}) \iff \widetilde{C}\boldsymbol{x} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{d}}. \tag{3}$$

Левая часть $(\forall x \in \boldsymbol{x})(\widetilde{C}x \in \widetilde{\boldsymbol{d}})$ означает, что множество $\bigcup\limits_{x\in\boldsymbol{x}} \widetilde{C}x$ лежит в $\widetilde{\boldsymbol{d}}$. Поскольку $\widetilde{C}\boldsymbol{x}$ совпадает с интервальной оболочкой множества $\bigcup\limits_{x\in\boldsymbol{x}} \widetilde{C}x$, правая часть $\widetilde{C}\boldsymbol{x} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{d}}$ означает, что интервальная оболочка множества $\bigcup\limits_{x\in\boldsymbol{x}} \widetilde{C}x$ лежит в $\widetilde{\boldsymbol{d}}$. Но для интервала эквивалентно, содержит он само множество или его интервальную оболочку.

Для допускового множества решений из двух приведенных лемм легко получить следующий критерий внутреннего интервала.

Теорема (критерий внутреннего интервала ДМР). *Пусть $\boldsymbol{x}$ – интервальный вектор длины n, а матрица C и интервальный вектор $\boldsymbol{d}$ – из (2). Тогда*

$$\boldsymbol{x} \subseteq \Xi_{tol} \iff C\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{d}. \tag{4}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \subseteq \Xi_{tol} &\iff (\forall x \in \boldsymbol{x})\ (x \in \Xi_{tol}) \\ &\overset{(2)}{\iff} (\forall x \in \boldsymbol{x})\ (Cx \in \boldsymbol{d}) \\ &\overset{(3)}{\iff} C\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{d}. \end{aligned}$$

Отметим, что (4) внешне напоминает известный критерий внутреннего интервала ДМР

$$\boldsymbol{x} \subseteq \Xi_{tol} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{b}.$$

Но в выкладках новый критерий дает больше свободы и гарантий, т.к. для вещественной матрицы произведение на сумму произвольных интервальных векторов можно раскрыть по дистрибутивному закону, а для интервальной – только по субдистрибутивному:

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &= C\boldsymbol{y} + C\boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) &\subseteq \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}. \end{aligned}$$

3. Новый метод решения задачи о допусках

Будем искать решение интервальной линейной задачи о допусках в виде наибóльшего интервала с пропорциями $p > 0$. Из критерия (4) принадлежности интервала допусковому множеству решений и представления (1) получаем, что интервал $\boldsymbol{x}$ с пропорциями p служит решением задачи о допусках тогда и только тогда, когда

$$C(\check{x} + p[-1,1]\lambda) \subseteq \boldsymbol{d}.$$

Для вещественной матрицы C скобки можно раскрыть по дистрибутивному закону.

$$C\check{x} + C(p[-1,1]\lambda) \subseteq \boldsymbol{d}.$$

Добавим к обеим частям вектор $-C\check{x}$.

$$C(p[-1,1]\lambda) \subseteq \boldsymbol{d} - C\check{x}. \tag{5}$$

Рассмотрим i-ую строку этого включения. Ее левая часть равна

$$\begin{aligned}
&\sum_j C_{ij}(p[-1,1]\lambda)_j = \sum_j C_{ij}(p_j[-1,1]\lambda) = \\
&\overset{\substack{p\geq 0,\\ \lambda\geq 0}}{=} \sum_j C_{ij}[-p_j\lambda, p_j\lambda] = \sum_j [-|C_{ij}|p_j\lambda,\, |C_{ij}|p_j\lambda] = \\
&= \left[-\sum_j |C_{ij}|p_j\lambda,\, \sum_j |C_{ij}|p_j\lambda\right] = \big[-|C_{i:}|p\lambda,\, |C_{i:}|p\lambda\big],
\end{aligned}$$

где $C_{i:}$ – i-ая строка матрицы C, а $|C_{i:}| = (|C_{i1}|, \ldots, |C_{in}|)$. Отсюда i-ая строка в (5) эквивалентна системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{rcl} -|C_{i:}|p\lambda & \geq & \underline{d}_i - C_{i:}\check{x}, \\ |C_{i:}|p\lambda & \leq & \overline{d}_i - C_{i:}\check{x}. \end{array}\right. \tag{6}$$

При $|C_{i:}|p > 0$, т.е. в случае $C_{i:} \neq 0$, эту систему можно представить как ограничение на λ

$$\lambda \leq \min\left\{\frac{C_{i:}\check{x} - \underline{d}_i}{|C_{i:}|p}, \frac{\overline{d}_i - C_{i:}\check{x}}{|C_{i:}|p}\right\}.$$

А при $|C_{i:}|p = 0$, т.е. в случае $C_{i:} = 0$, система (6) означает требование $0 \in \boldsymbol{d}_i$.

В целом, включение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \lambda \leq \min\limits_{l\,\in\,\mathrm{Idx}} \min\left\{\dfrac{C_{l:}\check{x} - \underline{d}_l}{|C_{l:}|p}, \dfrac{\overline{d}_l - C_{l:}\check{x}}{|C_{l:}|p}\right\}, \\ 0 \in \boldsymbol{d}_k, \quad k \in \mathrm{Idx}_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\mathrm{Idx} = \{i \mid C_{i:} \neq 0\}$, $\mathrm{Idx}_0 = \{i \mid C_{i:} = 0\}$.

Обозначим через λ^* значение параметра λ, максимально возможное при ограничениях (7). А через x^* — какое-нибудь значение переменной $\check{x}$, соответствующее этому λ^*. Если $\lambda^* \geq 0$, то интервал с центром x^* и радиусом $\lambda^* p$ будет наибóльшим среди интервалов, которые имеют пропорции p и решают задачу о допусках.

Давайте, определим λ^* и x^* из (7). При естественном предположении $\boldsymbol{A} \neq 0$ (из которого следует, что $C \neq 0$ и потому $\mathrm{Idx} \neq \varnothing$), рассмотрение сводится к двум случаям.

Случай 1: $(\exists k \in \mathrm{Idx}_0)$ $(0 \notin \boldsymbol{d}_k)$.

Вторая строка в (7) не выполняется ни для каких λ и $\check{x}$.

В этом случае:
- система (7) несовместна,
- λ^* и x^* не определены,
- допусковое множество решений пусто
- и задача о допусках вообще не имеет решений.

Случай 2: $\mathrm{Idx}_0 = \varnothing$ либо $(\forall k \in \mathrm{Idx}_0)\ (0 \in \boldsymbol{d}_k)$.

Вторая строка в (7) либо отсутствует, либо ее можно опустить из-за того, что она не влияет на множество решений.

В этом случае в обозначениях

$$f_l(\check{x}) := \min\left\{\frac{C_{l:}\check{x} - \underline{d}_l}{|C_{l:}|p}, \frac{\overline{d}_l - C_{l:}\check{x}}{|C_{l:}|p}\right\}, \qquad f(\check{x}) := \min_{l\,\in\,\mathrm{Idx}} f_l,$$

число λ^* и вектор x^* описываются формулами

$$\lambda^* = \max_{\check{x}\in\mathbb{R}^n} f(\check{x}), \qquad x^* = \arg\max_{\check{x}\in\mathbb{R}^n} f(\check{x}). \tag{8}$$

Поскольку

$$f_l(\check{x}) = \min\left\{\frac{\hat{d} + (C_{l:}\check{x} - \check{d}_l)}{|C_{l:}|p}, \frac{\hat{d}_l - (C_{l:}\check{x} - \check{d}_l)}{|C_{l:}|p}\right\} = \frac{\hat{d}_l - |C_{l:}\check{x} - \check{d}_l|}{|C_{l:}|p},$$

каждая функция $f_l(\check{x})$ вогнута, кусочно-линейна (состоит из двух кусков) и ограничена сверху числом $\hat{d}_l/(|C_{l:}|p)$. Функция $f(\check{x})$, как нижняя огибающая конечного числа таких функций, тоже вогнута, кусочно-линейна и ограничена сверху числом $\min\limits_{l\,\in\,\mathrm{Idx}}\Big(\hat{d}_l/(|C_{l:}|p)\Big)$.

Т.к. $f(\check{x})$ достигает конечного максимума на $\check{x} \in \mathbb{R}^n$, λ^* в (8) всегда определено.

Подграфик функции $f(\check{x})$ — выпуклое многогранное множество. Множество всех точек, на которых достигается максимум функции f, определяется в пространстве переменых $(\check{x}, \lambda)$ как проекция сечения этого подграфика гиперплоскостью $\lambda = \lambda^*$. Поэтому множество $\mathrm{Arg}\max\limits_{\check{x}\in\mathbb{R}^n} f(\check{x})$ всех возможных точек x^*, при которых достигается λ^*, есть выпуклое многогранное множество.

Если $\lambda^* < 0$, допусковое множество решений пусто и задача о допусках неразрешима.

Если $\lambda^* \geq 0$, допусковое множество решений непусто и задача о допусках разрешима.

При $\lambda^* = 0$ внутренняя область ДМР пуста и радиус всякого внутреннего интервала имеет хоть одну нулевую компоненту. Каждый наибольший внутренний интервал с пропорциями p вырождается в точку (его радиус $\lambda^* p$ равен нулю).

При $\lambda^* > 0$ все соответствующие ему точки x^* служат внутренними точками допускового множества решений как центры внутренних интервалов с радиусом $\lambda^* p > 0$.

Список литературы

[1] Kearfott A., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, №1. С. 7–13. (`http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int`)

[2] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Электронная книга. `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[3] Шарая И.А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, №5. С. 103–119. (`http://www.nsc.ru/interval/sharaya/Papers/ct05.pdf`)