

# Расчет параметров равновесия методом Ньютона-Канторовича при чистом изгибе и растяжении балки прямоугольного сечения из материала с падающей диаграммой \*

В.В. СТРУЖАНОВ, Е.А. БАХАРЕВА  
Институт Машинovedения УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
e-mail: stru@imach.uran.ru

The article is concerned with pure bending and tension of the beam with rectangular cross-section which is made of weakening material. The material properties are different both compression and tension. This properties are described by the different complete deformation curves. It has been found that beam have several equilibrium parameters for certain values of the load, including unstable equilibrium parameters. The evaluation of stressedly-deformed states is produced by Newton-Kantorovich method. The specific technique is used to choose the initial estimate.

**Key words:** pure bending, tension, square beam, complete deformation curve, stress, strain, stable and unstable equilibrium parameters, Newton-Kantorovich method.

## Введение

Введение в рассмотрение состояний разупрочнения материала (стадии предразрушения) приводит к тому, что при определенных значениях параметров нагружения у механической системы (твердого тела) появляется несколько возможных положений равновесия, в том числе и неустойчивых.

При расчете предельных состояний элементов конструкций необходимо в каждом положении равновесия знать напряженно-деформированное состояние. Наиболее приемлемым итерационным методом определения параметров всех положений равновесия является метод Ньютона-Канторовича, применяемый к операторным уравнениям. Однако при этом необходимо уметь находить соответствующие начальные приближения.

На примере задачи о растяжении и чистом изгибе балки прямоугольного поперечного сечения из материала с падающей диаграммой, отвечающей разупрочнению материала, приводится методика использования метода Ньютона-Канторовича для расчета напряженно-деформированного состояния во всевозможных положениях равновесия, опирающаяся на выбор начального приближения из определенных областей притяжения.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим длинную балку прямоугольного поперечного сечения высотой  $2h$  и шириной  $b$ . К балке прикладывается изгибающий момент  $M$ , реализующий чистый изгиб,

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-08-00135).

и растягивающее продольное усилие  $Q$  ( $M > 0, Q > 0$ ). В этом случае имеют место только продольные напряжения  $\sigma_x = \sigma(y)$  и продольные деформации  $\varepsilon_x = \varepsilon(y)$ . Последние линейно распределены по высоте балки (рис. 1) и заданы линейной функцией  $\varepsilon(y) = c(y + a)$ , где  $c > 0$  - коэффициент,  $a > 0$  - расстояние от срединной плоскости до нейтральной плоскости, где деформации и напряжения равны нулю.

Свойства материала описываются полными диаграммами [1] при растяжении и сжатии

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_1(\varepsilon), & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z^+; \\ \sigma_2(\varepsilon), & -\varepsilon_Z^- \leq \varepsilon \leq 0, \end{cases}$$

где  $\varepsilon_Z^+$  и  $\varepsilon_Z^-$  - соответственно деформации разрушения при растяжении и сжатии. В расчетах использовали следующие функции  $\sigma_1(\varepsilon) = E\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_B}}$ ,  $\sigma_2(\varepsilon) = E(0,1\varepsilon^2 + \varepsilon)$  (рис. 2).

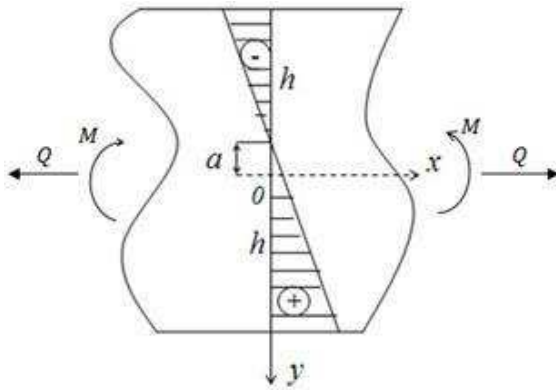


Рис. 1. Схема нагружения элемента балки и распределение деформаций по сечению

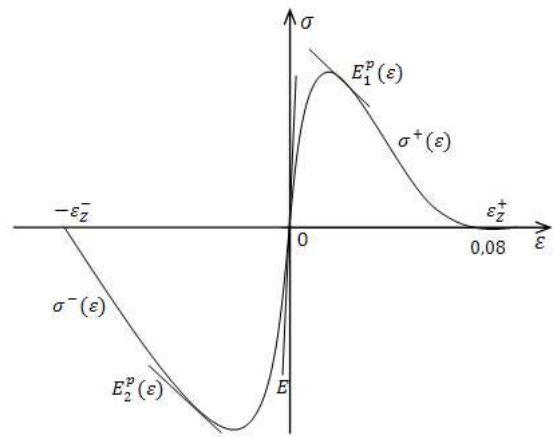


Рис. 2. Полная диаграмма деформирования

Наклон диаграмм характеризует функция касательного модуля

$$E^p(\varepsilon) = \begin{cases} E_1^p(\varepsilon) = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon}, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z^+; \\ E_2^p(\varepsilon) = \frac{d\sigma_2}{d\varepsilon}, & -\varepsilon_Z^- \leq \varepsilon \leq 0, \end{cases}$$

причем при  $E^p > 0$  материал находится в состоянии упрочнения, при  $E^p < 0$  - в состоянии разупрочнения (собственная неустойчивость материала).

Уравнения равновесия имеют вид [2]

$$b \int_{-h}^h \sigma(c(y+a)) dy - Q = 0, \quad (1)$$

$$b \int_{-h}^h \sigma(c(y+a)) y dy - M = 0. \quad (2)$$

Требуется для заданных значений  $M$  и  $Q$  определить из уравнений (1) и (2) распределение деформаций и напряжений по высоте балки.

## 2. Уравнения равновесия как отображение евклидовых пространств

Уравнения (1) и (2) можно принять за отображение  $F : R_s^2 \rightarrow R_m^2$  двумерного евклидова пространства  $R_s^2 = \{a, c\}$  (пространство состояний) в двумерное евклидово пространство  $R_m^2 = \{M, Q\}$  (пространство управлений — нагрузок). Тогда отображение  $F$  можно записать в виде

$$F_1(a, c) = Q, \quad F_2(a, c) = M. \quad (3)$$

Сильная производная отображения  $F$  есть матрица [3]

$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial c} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial c} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Если определитель матрицы (4) (Якобиан) в некоторой точке пространства  $R_s^2$  отличен от нуля, то преобразование (3) в достаточно малой окрестности этой точки определяет взаимно однозначное соответствие этой окрестности и множества точек из  $R_m^2$ , образованных значениями функций (3), принимаемыми в этой окрестности (локальный гомеоморфизм).

Точки пространства  $R_s^2$ , в которых матрица (4) вырождена, определяют критические точки отображения  $F$  [4], которые появляются из-за включения в рассмотрение падающих ветвей полных диаграмм деформирования (учет разупрочнения). Эти критические точки составляют в пространстве  $R_s^2$  линию, разделяющую плоскость  $\Omega = \{(c, a) : c \geq 0, a \geq 0\}$  ( $\Omega \subset R_s^2$ ) на подобласти, где матрица (4) имеет либо положительные собственные значения (области  $I, VI, V, III$ , рис. 3),

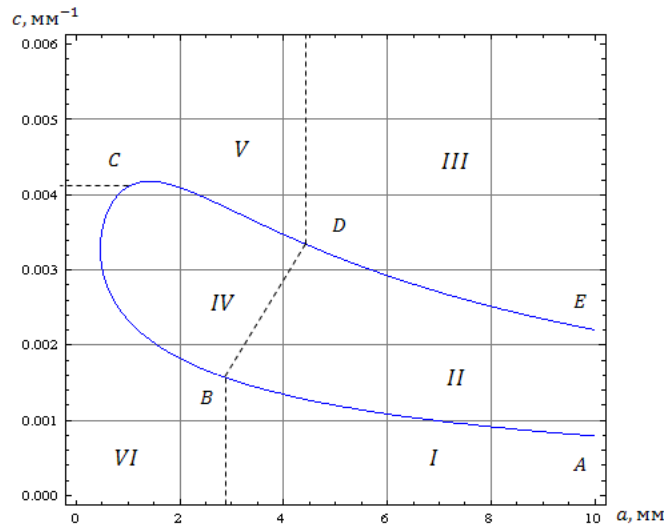


Рис. 3. Линия критических точек отображения  $F$  ( линия  $ABCDE$ )

либо знак собственных значений различен (области  $II, IV$ , рис. 3). Отображая эти области в пространство  $R_m^2$  находим, что линия критических точек  $ABC$  из пространства  $R_s^2$  отображается в линию критических значений  $A'B'C'$  [4], а линия  $CDE$  отображается в линию  $C'D'E'$  (рис. 4). Причем область  $I$  переходит в область  $I'$  и далее соответственно.

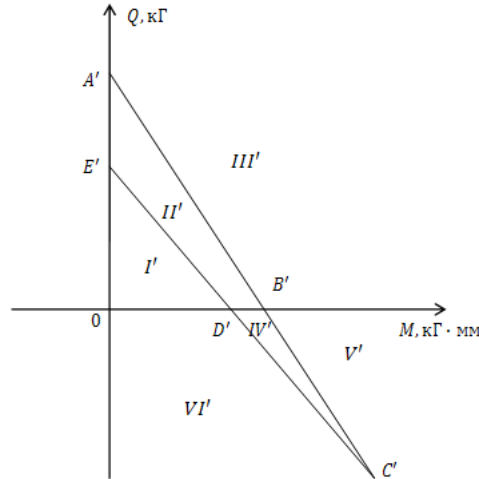


Рис. 4. Линия  $(E'D'C'B'A')$  критических значений отображения  $F$

Таким образом, для точек из областей  $I'$ ,  $III'$ ,  $VI'$ ,  $V'$  пространства  $R_m^2$  имеется только один прообраз в пространстве  $R_s^2$  (единственное решение уравнений (1) и (2)). А для точек из областей  $I'$ ,  $IV'$  по три прообраза (уравнения (1) и (2) имеют три решения).

### 3. Метод Ньютона–Канторовича

Воспользуемся методом Ньютона–Канторовича [5] для определения параметров всех положений равновесия балки при заданных значениях  $M > 0$  и  $Q > 0$  из пространства  $R_m^2$ . Запишем отображение (3) в виде одного операторного уравнения  $F(a, c, M, Q) = 0$ , для решения которого применим итерационную процедуру [5]

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}(F(x_n)), \quad (5)$$

где  $x_n = (a_n, c_n) \in R_s^2$ ,  $x_{n+1} = (a_{n+1}, c_{n+1}) \in R_s^2$ . Существование оператора  $[F'(x_n)]^{-1}$  предполагается, то есть матрица  $F'$  не должна быть вырожденной.

Для реализации схемы (5) важно уметь находить такие начальные приближения  $x_0$ , начиная с которых метод Ньютона–Канторовича сходится. Рациональный выбор начального приближения возможен, если известна, так называемая, область притяжения корня  $x^*$ , то есть такая окрестность точки  $x^*$ , что при любом выборе точки  $x_0$  в этой окрестности последовательность (5) сходится к  $x^*$ . Таким образом, в области притяжения точка  $x_0$  находится в достаточной близости к корню  $x^*$ .

Начальные приближения из областей притяжения, не фиксируя сами области, будем определять, используя следующую численную процедуру. Построим в зонах  $I$ ,  $II$ ,  $III$  (рис. 3) пространства  $R_s^2$  достаточно мелкие сетки узлов, которые отображаются в области  $I'$ ,  $II'$ ,  $III'$  (рис. 4) положительных значений  $M$  и  $Q$ . Возьмем сначала точку  $(M_1, Q_1) \in I' \subset R_m^2$ . Используя результаты, приведенные выше, находим, что для этих значений уравнения равновесия имеют только одно решение (точка  $(M_1, Q_1)$  имеет в  $R_s^2$  один прообраз, расположенный в области  $I$ ). Отображая сетку узлов из  $I$  в  $R_m^2$ , находим тот узел, образ которого наиболее близок к точке  $(M_1, Q_1)$ . Координаты данного узла принимаем за начальное приближение  $x_0^1$ . Реализуя затем схему (5) находим

$x_1^* = (c_1^*, a_1^*)$  — решение уравнений (1) и (2).

Пусть теперь точка  $(M_2, Q_2) \in II' \subset R_m^2$ . Она имеет в  $R_s^2$  три прообраза (уравнения равновесия имеют три решения). Отображая сетку узлов из  $I$  в  $R_m^2$ , находим тот узел, образ которого наиболее близок к точке  $(M_2, Q_2)$  и берем его координаты за первое начальное приближение. Аналогичную операцию проделываем, используя сетки узлов в областях  $II$  и  $III \in R_s^2$ , и получаем еще два начальных приближения. Далее по итерационной процедуре (5) вычисляем все три решения уравнений равновесия.

Наконец, если известны параметры  $(c^*, a^*)$ , то известно и распределение деформаций по высоте балки и по диаграмме деформирования определяется и распределение напряжений.

Отметим, что расчеты показали сходимость метода Ньютона–Канторовича при таком выборе начальных приближений и достаточную точность решения уравнений равновесия.

## Список литературы

- [1] Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 192 с.
- [2] Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.
- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
- [4] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
- [5] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.