Численное моделирование неустановившихся гидротермических процессов в водных объектах *

А. Ф. Воеводин, В. С. Никифоровская
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: voevodin@hydro.nsc.ru

1.03.2011

Аннотация

Математическая модель разработана на основе комбинированных 0D, 1D и 2D моделей гидравлики открытых русел. Одномерные модели строятся на основе уравнений гидродинамики, осредненных по поперечному сечению русла, двумерные - на основе уравнений гидродинамики, осредненных по ширине русла.

Численная модель системы разработана на основе абсолютно устойчивых неявных разностных схем и специальных алгоритмов для решения неявных разностных уравнений.

Наряду с гидродинамическими параметрами проводится расчет температурных полей с учетом теплообмена с окружающей средой и изменения плотности воды в зависимости от температуры.

Mathematical model has worked based of combined 0D, 1D and 2D models hydraulics open channels. The one-dimensional models have based of the hydrodynamics equations averaged on the cross-sections, the two-dimensional models have constructed on the basis of the same equations but averaged on the channel width.

The numerical model is worked on the basis of absolute stable implicit difference schemes and special algorisms for the solutions of the systems of equations.

Calculate examples of the hydrodynamic parameters and temperature fields with the account of a heat exchange with environment and water density exchange at a temperature function.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется большое количество работ (монографий, препринтов, статей и др.) в отечественной и зарубежной литературе, посвященных разработке математических моделей для расчета гидротермических процессов в открытых потоках в постановках различной степени сложности и размерности. При этом задачи решаются в какой-либо одной из постановок: одномерной (1D), двумерной (2D - плановой, продольно-вертикальной) или трехмерной (3D). Использование сложности той или иной постановки и размерности, как правило, диктуется целями и требованиями задачи с одной стороны; наличием отвечающего этим требованиям средств моделирования и соответствующего математического аппарата - с другой. При этом немаловажную роль играет структура объекта моделирования, которая в свою очередь подсказывает вариант выбора математической модели. Это вполне оправданно, когда исследуемые процессы происходят в гидравлических системах с соразмерными по морфометрическим масштабам водотоками. Однако природные объекты в общем

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 4.7 Программы фундаментальных исследований Президиума РАН, гранта РФФИ № 09-01-98001 Р-Сибирь-а.

случае часто представляют собой взаимосвязанные проточные (либо слабопроточные) разновеликие водотоки и водоемы: узкие и широкие, мелководные и глубокие. Изучение гидротермических процессов с помощью численного моделирования в таких комбинированных по составу водных системах по какой-то лишь одной (1D, 2D либо 3D) математической модели хоть и возможно, но с точки зрения вычислительных затрат неэффективно и неэкономично.

ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

В работе предлагается сопряженная модель, представляющая собой соединение двух типов математических моделей: одномерных и двумерных (продольно-вертикальных) моделей. Соединение двумерных плановых моделей с одномерными подробно рассмотрено в [7]. Как отмечалось выше, исследуемая водохозяйственная система может включать в себя в общем случае сильно разнящиеся друг от друга по морфометрическим и гидравлическим характеристикам объекты (водоемы, водотоки с прилегающими к ним поймами и др.), что является основной трудностью при проведении математического моделирования. С точки зрения теории систем и системного анализа системы водотоков и водоемов могут быть рассмотрены как динамические системы с сосредоточенными и распределенными параметрами. В таких системах элементами с распределенными параметрами являются: речные русла (протоки), параметрами состояния которых являются уровень воды, расход (глубина, средняя скорость), и глубокие водотоки (водоемы), имеющие в качестве параметров состояния продольные и вертикальные скорости, отметку свободной поверхности. Элементами с сосредоточенными параметрами являются входные и выходные створы, места слияния русел и водотоков, сосредоточенные емкости. Параметрами состояния этих элементов являются расходы и уровни воды. Топологическая структура такой системы описывается графом. Вершинами этого графа являются элементы с сосредоточенными параметрами, а ребра с распределенными параметрами. Ниже формулируются уравнения для определения параметров элементов системы и условия сопряжения для сосредоточенных и распределенных параметров.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

1.1 Одномерные математические модели для численного моделирования гидрологических процессов в гидравлических системах открытых русел. Теоретической основой разработанных математических моделей для исследования волновых процессов, возникающих при неустановившихся течениях воды в открытых руслах и их системах, являются одномерные уравнения Сен-Венана, записанные в обобщенной форме [1, 4, 5, 7]:

а) уравнение неразрывности

$$B\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \tag{1}$$

б) уравнение движения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{\omega}\right) + g\omega\frac{\partial Z}{\partial x} = G. \tag{2}$$

Здесь

$$G = -g\omega\frac{Q|Q|}{K^2} - \frac{\omega}{\rho}\frac{\partial P_a}{\partial x} + \zeta B W_l|W|,$$

где $t-$ время, $x-$ координата, отсчитываемая вдоль оси русла, $Z(x,t)-$ уровень свободной поверхности, $Q(x,t)-$ расход воды, $q(x,t)-$ заданный распределенный боковой приток, $B(h,x)-$ ширина свободной поверхности потока, $\omega(h,x)-$ площадь поперечного сечения потока, $K(h,x)-$ модуль расхода, $h-$ глубина потока, P_a- атмосферное давление, W_l- компонента скорости ветра вдоль оси русла, $|W(x,t)|-$ модуль скорости ветра, $\rho-$ плотность воды, $\zeta-$ коэффициент ветрового напряжения, $g-$ ускорение силы тяжести. Основными неизвестными в уравнениях (1), (2) считаются функции $Z(x,t)$ и $Q(x,t)$. Остальные неизвестные $h, \nu = Q/\omega$, определяются по заданным морфометрическим данным.

1.2. Двумерная математическая модель неустановившихся течений в глубоких водоемах (продольно-вертикальная модель). Математическая модель разработана для расчета гидродинамических процессов в системах глубоких водотоков вытянутой формы. Основой этой модели являются двумерные уравнения, полученные путем осреднения по ширине русла или водотока трехмерных уравнений и предположения о гидростатическом законе давления [2, 3, 8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = -g\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi + \frac{1}{\rho_0}\int\limits_{z_\partial}^{\xi}\rho dz\right) + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(b\nu_t\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{k_0}{b}\tau, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(bu)}{\partial x} + \frac{\partial(bw)}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

где

$$k_0 = \sum_{i=1}^{2}\left[1 + \left(\frac{\partial b_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial b_i}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \tau = \frac{\lambda}{8}|u|u; \quad \rho = \rho(T,S).$$

Здесь $t-$ время; $x, z-$ продольная (горизонтальная) и вертикальная декартовы координаты; $u(x,z,t), w(x,z,t)-$ горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно; $\xi(x,t)-$ уровень свободной поверхности; $b(x,t)-$ ширина русла; $\rho(T,S)-$ плотность жидкости; ρ_0- характерное значение плотности; ν_t- коэффициент турбулентной вязкости; $\tau-$ сопротивление трения (касательное напряжение) на боковых поверхностях; $\lambda-$ коэффициент трения; $g-$ ускорение силы тяжести. Необходимый для решения системы (3–4) коэффициент турбулентной вязкости определялся согласно теории турбулентных течений Прандтля [8]. Для вычисления плотности используется уравнение состояния $\rho = \rho(T,S)$ [2].

Одномерные модели, сформулированные на базе уравнений Сен-Венана, используются для исследования волновых процессов в мелководных системах русел и каналов [1, 4, 5, 7]. Двумерные (продольно-вертикальные) модели, сформулированные на базе трехмерной гидродинамической модели, осредненной по ширине русла, могут быть применены к системам глубоких проточных и слабопроточных водоемов вытянутой формы (водохранилища, горные озера) и водотоков [2, 3, 8].

При построении моделей, как одномерных, так и двумерных, учитываются реальные морфометрические и гидравлические характеристики русла и прилегающих к нему пойменных массивов, их взаимодействие, а также воздействие метеорологических факторов (ветер, атмосферное давление) на волновые процессы [4].

С математической точки зрения решение рассматриваемых задач сводится к решению начально-краевых задач для эволюционных квазилинейных уравнений в областях сложной структуры (одномерно-двумерный комплекс), включающей одномерные и двумерные области (в любой последовательности) со свободной границей.

Для однозначного определения искомых параметров течения необходимо задание начальных и граничных условий, а также условий сопряжения элементов системы.

2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

2.1. Начальные условия. Начальные условия обычно задаются в виде распределения искомых функций в начальный момент по длине каждого участка системы $Q(x,t_0), Z(x,t_0)$. Для *двумерных* областей, кроме указанных функций, также задаются функции распределения вертикальных и горизонтальных скоростей: $w = w(x,z,t_0)$ и $u = u(x,z,t_0)$ соответственно.

2.2. Граничные условия. Для решения задачи предусмотрен следующий набор граничных условий [1, 3, 4, 5, 7].

1) для *одномерной* (1D) и для *двумерной* (2D) моделей:

во *входных* и *выходных* створах задаются: расход или уровень воды как функция времени, или кривая связи, т.е. расход как функция от уровня воды (глубины потока):

$$Q(l,t) = f_1(t), \text{ или } Z(l,t) = f_2(t), \text{ или } Q(l,h) = f_3(h(t)),$$

здесь $l-$ координата входных или выходных створов.

2) для *двумерной* модели помимо вышеупомянутых условий:

а) на *свободной* поверхности задаются динамическое и кинематическое условия:

$$\text{при } z = \xi \quad \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x};$$

б) на *дне* - условия проскальзывания и непротекания:

$$\text{при } z = z_\partial \quad \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = K_b|u|u, \quad w = u\frac{\partial z_\partial}{\partial x};$$

в) на *входе* в глубокий водоем - (кроме расхода) задается закон распределения горизонтальной скорости по вертикали $u = f(l,z,t)$ [6].

2.3. Условия сопряжения. Для сопряжения потоков при слиянии водотоков и водоемов в узлах слияния формулируются так называемые условия сопряжения, которые включают в себя *балансовые соотношения* и *условия примыкания. Балансовые соотношения* являются следствием закона сохранения объёма (массы). Они связывают расходы для всех примыкающих к узлу элементов с учетом возможного наличия в узле сосредоточенных притоков (оттоков) и емкости. *Условия примыкания* используются для учёта местных сопротивлений при наличии каких-либо технических устройств с параметрами, характеризующими их работу, например, гидротехнических сооружений. Они служат для связи распределенных параметров на концах элементов с сосредоточенными параметрами в узле. Отсутствие каких-либо технических средств (гидротехнических сооружений) на концах водотоков означает равенство уровней на концах элементов, примыкающих к узлу.

Условия сопряжения *одномерных* потоков в узлах слияния [4,5]:

а) равенство уровней воды на концах участков, примыкающих к $j-$ тому узлу

$$Z_i = Z_j^*, \quad i \in \gamma_j \quad \left(\gamma_j = \gamma_j^+ + \gamma_j^-\right);$$

Здесь γ_j^+- множество номеров концов участков системы, примыкающих к $j-$тому узлу справа, $\gamma_j^- -$ множество номеров концов участков, примыкающих к $j-$тому узлу слева;

б) баланс расходов в узле слияния

$$\sum_{i\in\gamma_j^+} Q_i - \sum_{i\in\gamma_j^-} Q_i = Q_j, \tag{5}$$

где $Q_j = Q_j^* - \Omega_j^*(Z_j^*)\frac{dZ_j^*}{dt}$,

Q_j- расход в $j-$том узле; $Q_j^* = f_1(t)-$ сосредоточенный приток (отток) в узле; $\Omega_j^* = f_2(Z_j^*)-$ площадь зеркала сосредоточенной ёмкости в $j-$том узле. При отсутствии сосредоточенной ёмкости и притока (оттока) в узле, т.е. $\Omega_j^* = 0$, $Q_j^* = 0$, соотношение (5) моделирует простое слияние нескольких участков.

Условия сопряжения *двумерных* потоков с *одномерными* (и наоборот):

$$\xi(l,t) = Z(l,t),$$

$$\int_{z_\partial}^{\xi} b\cdot u(l,z,t) = Q(l,t).$$

Здесь $x = l$ координата места слияния потоков; $Z(l,t), Q(l,t)-$ уровень и расход воды одномерного потока; $\xi(l,t), u(l,z,t)-$ отметка свободной поверхности и горизонтальные скорости в месте слияния потоков.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Для расчета температурных полей кроме уравнений гидродинамики привлекаются уравнения теплового баланса.

Так в случае 1D модели рассматривается уравнение

$$\omega\frac{\partial T}{\partial t} + Q\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega E\frac{\partial T}{\partial x}\right) + k_1 B(T_E - T) + q(T_q - T),$$

а в случае 2D модели - уравнение

$$b\frac{\partial T}{\partial t} + bu\frac{\partial T}{\partial x} + bw\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(bK_T\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{b}{\rho_0 c_0}\left(Q_T - \frac{k}{b}q_n\right),$$

где $T-$ температура воды; T_q- температура воды, поступающей с распределенным притоком q; T_E- равновесная температура; k_1- коэффициент теплообмена с окружающей средой; $E-$ коэффициент продольной дисперсии, K_T- коэффициент турбулентной температуропроводности; Q_T- поступление тепла от источника; q_n- поток тепла через боковую поверхность.

С соответствующими начальными и граничными условиями и условиями сопряжения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ и сравнение результатов численного моделирования гидродинамических режимов в реальном объекте по комбинированной (двумерно-одномерной) модели с результатами, полученными по двумерной модели, показал возможность использования разработанной математической модели, ее экономичность и эффективность для исследования волновых процессов в системах водоемов и водотоков сложной структуры.

Список литературы

[1] Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках // М: Наука, 1970, 112с.

[2] Астраханцев Г.П., Руховец Л.А. Дискретная гидродинамическая модель климатической циркуляции глубокого озера // Вычислительные процессы и системы,1986, т. 4, с.135-178.

[3] Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С. Численное моделирование температурно-стратифицированных течений в системах глубоких водоемов // Вычислительные технологии, 2005, т. 10, № 5, с. 29-38.

[4] Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С., Овчарова А.С. Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек // В: Тр. Аркт. и Антаркт. Науч.-Исслед. Ин-та (ААНИИ), 1983, том 378, Издательство "Гидрометеоиздат", Санкт-Петербург, с. 23-34.

[5] Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем // Новосибирск: Наука, 1993, 368с.

[6] Караушев А.В. Проблемы динамики естественных водных потоков // Л.: Гидрометеоиздат, 1960. - 392с.

[7] Шугрин С.М. Соединение одномерной и двумерной (плановой) моделей течения воды // Водные ресурсы. 1987, № 5, с.15-15.

[8] Blumberg A.F. Numerical model of estuarial circulation // J. Hydraulic Division ASCE. 1977. Vol. 103, № 3, pp. 295-310.