# ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

А.Ж.Тасмамбетова

Ж.Н.Тасмамбетов
*Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова*
*E-mail: tasmam@rambler.ru*

# THE CONSTRUCTION OF DECISIONS OF SPECIAL SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULAR FEATURES

A.Tasmambetova, Zh.Tasmambetov
*K.Zhubanov Aktobe State University, Aktobe*

The particular curves of one special system are defined in this work. The possibilities of construction of the regular decisions close to established features are shown. Such systems come across in problems of mathematical physics and aerodynamics.

**Введение.** Изучая обыкновенные дифференциальные уравнения, известные математики прошлого, такие как Л. Фукс, Г. Фробениус, К. Гаусс, Б. Риман, К. Вейерштрасс, А. Пуанкаре и др., занимались построением аналитических решений в окрестности особых точек. Характер аналитической функции, определяющей аналитическое решение уравнений, вполне определяется ее особыми точками. Поэтому, чтобы знать такие аналитические функции, надо знать их расположение и поведение функции в области особых точек. Классификация особых точек однозначных функций комплексного переменного и названия их были предложены Вейерштрассом в 1876 г. Л. Фукс определил подвижные и неподвижные классы особых точек. Введение термина "регулярное решение"связано с именем Л. Томе. К.Я. Латышева определяет регулярность и иррегулярность особых точек с помощью понятия ранга $p = 1 + k$ ($k$ – подранг), введенного А. Пуанкаре и антиранга $m = 1 + \lambda$ ($\lambda$ – антиподранг),введенного Л. Томе.

Обобщение понятия особых точек на функции многих переменных также было дано Вейерштрассом в 1880 г. В отличие от случая одного комплексного переменного, аналитическая функция двух и более переменных не может иметь изолированные особые точки. Малоизученными остаются особенности системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, где особенностями являются не изолированные особые точки, а особые линии или пересечения нескольких особых кривых. В работе для изучения систем выбран обобщенный метод Фробениуса-Латышевой [1].

**Постановка задачи.**Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с регулярной особенностью

$$\begin{cases} x^2p_0(x,y)\cdot Z_{xx} + yp_1(x,y)\cdot Z_y + p_2(x,y)\cdot Z = 0, \\ y^2g_0(x,y)\cdot Z_{yy} + xg_1(x,y)\cdot Z_x + g_2(x,y)\cdot Z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_i = p_i(x,y)$ и $g_i = g_i(x,y)$ $(i=0,1,2)$ – аналитические функции или многочлены двух переменных.

Целью данной работы является определение основных особых кривых системы (1) и построение вблизи установленных особенностей соответствующих им регулярных решений.

Допустим, что система совместная. Тогда, согласно общей теории таких систем, общее решение системы (1) запишется в виде

$$Z(x,y) = C_1 \cdot Z_1 + C_2 \cdot Z_2 + C_3 \cdot Z_3 + C_4 \cdot Z_4, \tag{2}$$

то есть система (1) может иметь до четырех линейно-независимых решений $Z_j = Z_j(x,y)$ $(j = 1,2,3,4)$ в виде нормальных и поднормальных рядов, нормально-регулярных и конечных решений в зависимости от вида особенностей.

**Установление особых кривых и построение решений вблизи этих особых кривых.**

Особые кривые системы (1) определяются приравниванием к нулю коэффициентов при вторых частных производных $Z_{xx}$ и $Z_{yy}$ .Однако, они определяются в зависимости от формы задания коэффициентов $p_0(x,y)$ и $g_0(x,y)$ .Поэтому, рассмотрим несколько различных случаев.

1. Пусть коэффициенты системы (1) аналитические функций двух переменных

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a^{(i)}_{\mu,\,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (a^{(i)}_{00} \neq 0), \\ g_i(x,y) &= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} b^{(i)}_{\mu,\,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (b^{(i)}_{00} \neq 0). \qquad (i=0,1,2) \end{aligned} \tag{3}$$

В этом случае система (1) имеет только регулярную особенность

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow (x=0; y=0)$$

Для построения решения вблизи этой особенности, согласно методу Фробениуса-Латышевой, подставляя $Z = x^{\rho} \cdot y^{\sigma}$ в систему (1), с учётом коэффициентов (3), получаем систему характеристических функций

$$\begin{aligned} Z_j[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}] \equiv x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \Big\{ & f^{(j)}_{00}(\rho,\sigma) + f^{(j)}_{10}(\rho,\sigma) \cdot x + f^{(j)}_{01}(\rho,\sigma) \cdot y + f^{(j)}_{11}(\rho,\sigma) \cdot xy + ...+ \\ & + f^{(j)}_{n0}(\rho,\sigma) \cdot x^n + f^{(j)}_{0n}(\rho,\sigma) \cdot y^n + ... \Big\}, \quad (j=1,2) \end{aligned} \tag{4}$$

В дальнейшем, полученную систему характеристических функций будем связывать с конечными особенностями, в частности с особенностью $(0;0)$. Отсюда определяются неизвестные показатели $\rho$ и $\sigma$, а также неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,...)$, решения в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по возрастающим степеням независимых переменных $x$ и $y$ :

$$Z_i = x^{\rho_k} \cdot y^{\sigma_k} \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} A^{(k)}_{\mu,\,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (A_{0,0} \neq 0) \tag{5}$$

вблизи особенности $(0;0)$.

Неизвестные $\rho_k, \sigma_k$ решения (5) находятся из системы определяющих уравнений

$$\begin{cases} f^{(1)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv a^{(0)}_{00} \cdot \rho \cdot (\rho - 1) + a^{(1)}_{00} \cdot \sigma + a^{(2)}_{00} = 0, \\ f^{(2)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv b^{(0)}_{00} \cdot \sigma \cdot (\sigma - 1) + b^{(1)}_{00} \cdot \rho + b^{(2)}_{00} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

относительно особенности $(0;0)$.

Система (6) имеет до четырех пар корней $(\rho_k, \sigma_k)$ $(k = 1,2,3,4)$. Поэтому система (1) в этом случае имеет до четырех линейно-независимых частных решений вида (5). Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,...)$ находим из системы рекуррентных уравнений.

Если $a_{00}^{(0)} \neq 0$ и $b_{00}^{(0)} \neq 0$, то особенность $(0;0)$ регулярная и ряд (5) является сходящимся. Сходимость ряда можно доказать методом Горна [2].

2. Особенностями также являются точки на бесконечности. Действительно, пусть задана система (1) с коэффициентами вида

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (a_{00}^{(i)} \neq 0), \\ g_i(x,y) &= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (b_{00}^{(i)} \neq 0;\;\; i = 0,1,2) \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда, система характеристических функций имеет вид

$$\begin{aligned} Z_j[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \Big\{ & \varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + \tfrac{\varphi_{10}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} + \tfrac{\varphi_{01}^{(j)}(\rho,\sigma)}{y} + \tfrac{\varphi_{11}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} + ... + \\ & + \tfrac{\varphi_{n0}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x^n} + \tfrac{\varphi_{0n}^{(j)}(\rho,\sigma)}{y^n} + ... \Big\} \;\; (j = 1,2). \end{aligned} \tag{8}$$

Особенность $(\infty;\infty)$ регулярная. Решение системы построим в виде обобщенного степенного ряда двух переменных по убывающим степеням независимых переменных $x$ и $y$:

$$Z_k = x^{\rho_k} \cdot y^{\sigma_k} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu}^{(k)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (B_{00}^{(k)} \neq 0), \tag{9}$$

где $(\rho_k, \sigma_k)$ и $B_{\mu,\nu}^{(k)}$ $(\mu,\,\nu = 0,1,2,...;\;\; k = 1,2,3,4)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить.

Неизвестные $\rho_k$ и $\sigma_k$ находятся из системы определяющих уравнений

$$f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) = \varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) = 0, \tag{10}$$

то есть в этом случае системы определяющих уравнений относительно особенностей $(0,0)$ и $(\infty,\infty)$ совпадают. Она также определяет четыре пары корней $(\rho_k, \sigma_k)$ $(k = 1,2,3,4)$. Однако, решения находятся в виде (8).

Для рассмотренных случаев справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Для того, чтобы система с регулярной особенностью (1) с коэффициентами (3) имела решение вида (5) вблизи особенности $(0,0)$, необходимо, чтобы пара $(\rho,\sigma)$ была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ вида (6), где $f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma)$ $(j = 1,2)$ есть коэффициенты при наименьших степенях системы характеристических функций (4).

Теорема 2. Для того, чтобы система с регулярной особенностью (1) с коэффициентами (7) имела решение вида (9), необходимо, чтобы пара $(\rho,\sigma)$ была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности $(\infty,\infty)$ вида (10), где $\varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma)$ $(j = 1,2)$ есть коэффициенты при наибольших степенях системы характеристических функций (8).

Особый интерес вызывают случаи, когда коэффициенты системы (1) многочлены двух переменных. В этом случае особыми кривыми являются пары прямых, точки их пересечения, также линии второго порядка.

3. Допустим, что коэффициенты системы (1)-многочлен вида

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= a^{(i)}_{00} + a^{(i)}_{10}\cdot x + a^{(i)}_{01}\cdot y + a^{(i)}_{11}\cdot xy, \\ g_i(x,y) &= b^{(i)}_{00} + b^{(i)}_{10}\cdot x + b^{(i)}_{01}\cdot y + b^{(i)}_{11}\cdot xy \qquad (i=0,1,2). \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда, особые кривые заданной системы определяются из системы

$$\begin{cases} x^2\left(a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10}\cdot x + a^{(0)}_{01}\cdot y + a^{(0)}_{11}\cdot xy\right) = 0, \\ y^2\left(b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{10}\cdot x + b^{(0)}_{01}\cdot y + b^{(0)}_{11}\cdot xy\right) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

полученной приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных $Z_{xx}$ и $Z_{yy}$ системы (1) с коэффициентами вида (12). Покажем, как определяются особые кривые системы (12). Рассмотрим ряд частных случаев.

а) Как и в предыдущих двух случаях, при

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{получим особенность} \qquad (x=0;\ \ y=0).$$

Она регулярная и при выполнении условия теоремы 1 система (1) с коэффициентами (11) вблизи особенности $(0,0)$ имеет регулярное решение вида (5).

б) Совместно решается система

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{10}\cdot x + b^{(0)}_{01}\cdot y + b^{(0)}_{11}\cdot xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{особенность} \qquad \left(x=0;\ \ y=-b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}\right).$$

в) Этот случай рассматривается аналогично предыдущему и система

$$\begin{cases} a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10}\cdot x + a^{(0)}_{01}\cdot y + a^{(0)}_{11}\cdot xy = 0, \\ y^2 = 0 \end{cases}$$

определяет особенность $\left(x=-a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{10};\ \ y=0\right)$.

В этих двух случаях решения системы определяются в виде (5)

г) Совместно решается система

$$\begin{cases} a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10}\cdot x + a^{(0)}_{01}\cdot y + a^{(0)}_{11}\cdot xy = 0, \\ b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{10}\cdot x + b^{(0)}_{01}\cdot y + b^{(0)}_{11}\cdot xy = 0 \end{cases}$$

и особенности системы определяются в виде решения квадратных уравнений относительно $x$ и $y$. Следует различать три случая дискриминанта квадратных уравнений: $D_j > 0$, $D_j = 0$ и $D_j < 0$ $(j=1,2)$. В зависимости от найденных значений будут построены решения системы.

Кроме этого добавляются особенности на бесконечности: $(0;\infty)$, $(\infty;0)$, $\left(\infty;-b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}\right)$, $\left(-a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{10};\infty\right)$, $(\infty;\infty)$ и др.

Если учитывать то, что вблизи каждой особенности можно построить до четырех линейно-независимых решений, то требуется построить вблизи вышеприведенных восьми особенностей до 32 частных решений.

Система характеристических функций (8) в этом случае принимает вид

$$Z_j[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^\rho \cdot y^\sigma \left\{ f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + f_{10}^{(j)}(\rho,\sigma)\cdot x + f_{01}^{(j)}(\rho,\sigma)\cdot y + f_{11}^{(j)}(\rho,\sigma)\cdot xy \right\} \quad (j=1,2) \tag{13}$$

или

$$\begin{aligned} Z_j[x^\rho \cdot y^\sigma] \equiv x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma+1} \left\{ f_{11}^{(j)}(\rho,\sigma) + \tfrac{f_{01}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} + \tfrac{f_{10}^{(j)}(\rho,\sigma)}{y} + \tfrac{f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} \right\} = \\ = x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma+1} \left\{ \varphi_{00}^{(j)}(\rho,\sigma) + \tfrac{\varphi_{10}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} + \tfrac{\varphi_{01}^{(j)}(\rho,\sigma)}{y} + \tfrac{\varphi_{11}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} \right\} \qquad (j=1,2). \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) система определяющих уравнений относительно особенностей $(0;0)$ определится в виде (6). Тогда, на основании теоремы 1 система (1) с коэффициентами вида (11) имеет решения вида (5).

Аналогично, из (14) определим системы определяющих уравнений относительно особенности $(\infty;\infty)$ :

$$\begin{cases} f_{11}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv \varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) = a_{11}^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1) + a_{11}^{(1)}\cdot\sigma + a_{11}^{(2)} = 0, \\ f_{11}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv \varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) = b_{11}^{(0)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1) + b_{11}^{(1)}\cdot\rho + b_{11}^{(2)} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Определяя $(\rho_k,\sigma_k)$ $(k=1,2,3,4)$ из этой системы, на основании теоремы 2 устанавливаем, что изучаемая система имеет решения вида (9). Следует отметить, что при

$$\begin{aligned} &\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv a_{11}^{(2)} \neq 0, \qquad \varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv b_{11}^{(2)} \neq 0, \\ &\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv a_{11}^{(2)} \neq 0, \qquad \varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv b_{11}^{(2)} = 0, \\ &\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv a_{11}^{(2)} = 0, \qquad \varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv b_{11}^{(2)} \neq 0, \end{aligned}$$

то есть тогда, когда правые части (15) равны постоянным или нулю, заданная система не имеет решение вида (9) вблизи особенности $(\infty,\infty)$.

**Пример 1.** Пусть задана система Эйлера вида

$$\begin{cases} x^2\cdot Z_{xx} + 2y\cdot Z_y - 2 = 0, \\ y^2\cdot Z_{yy} + 2x\cdot Z_x - 2 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Построим решения системы методом Фробениуса-Латышевой. С этой целью составляем систему характеристических функций

$$\begin{aligned} L_1[x^\rho\cdot y^\sigma] &\equiv x^\rho\cdot y^\sigma \left\{\rho\cdot(\rho-\sigma) + 2\sigma - 2\right\}, \\ L_2[x^\rho\cdot y^\sigma] &\equiv x^\rho\cdot y^\sigma \left\{\sigma\cdot(\sigma-1) + 2\rho - 2\right\}. \end{aligned}$$

Система определяющих уравнений запишется в следующем виде

$$\begin{cases} f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv \varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) = \rho\cdot(\rho-1) + 2\sigma - 2 = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv \varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) = \sigma\cdot(\sigma-1) + 2\rho - 2 = 0, \end{cases} \tag{17}$$

то есть системы определяющих уравнений относительно особенностей $(0;0)$ и $(\infty;\infty)$ совпадают. Решая (17), находим четыре пары корней. Два из них $(x_1 = 1;\ y_1 = 1)$ и $(x_2 = -2;\ y_2 = -2)$ действительные и соответствующие этим показателям частные решения имеют вид

$$Z_1(x,y) = x\cdot y, \qquad Z_2(x,y) = x^{-2}\cdot y^{-2} = \frac{1}{x^2\cdot y^2}.$$

Первые из них не имеет особенностей, особенность второго решения $(x = 0;\ y = 0)$.

**Пример 2.** Методом Фробениуса-Латышевой построим решения системы

$$\begin{cases} x^2 \cdot Z_{xx} - x \cdot y \cdot Z_y + \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + x - 6\right) \cdot Z = 0, \\ y^2 \cdot Z_{yy} - x \cdot y \cdot Z_y + \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot xy + y - 6\right) \cdot Z = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Решение. Система характеристических функций этой системы

$$\begin{aligned} L_1[x^\rho \cdot y^\sigma] &\equiv x^\rho \cdot y^\sigma \left\{[\rho \cdot (\rho - 1) - \sigma] + (1 - \sigma) \cdot x + \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}x^2\right\}, \\ L_2[x^\rho \cdot y^\sigma] &\equiv x^\rho \cdot y^\sigma \left\{[\sigma \cdot (\sigma - 1) - \sigma] + (1 - \rho) \cdot y + \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}y^2\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Система определяющих уравнений относительно особенности $(0; 0)$:

$$\begin{cases} f_{00}^{(1)}(\rho, \sigma) = \rho \cdot (\rho - 1) - 6 = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho, \sigma) = \sigma \cdot (\sigma - 1) - 6 = 0 \end{cases}$$

имеет пары корней:

$$(\rho_1 = -2;\ \sigma_1 = -2),\ (\rho_1 = -2;\ \sigma_2 = 3),\ (\rho_2 = 3;\ \sigma_1 = -2),\ (\rho_2 = 3;\ \sigma_2 = 3). \tag{20}$$

Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, ...)$ решения (5) определяются из системы рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} A_{10} \cdot [(\rho + 1) \cdot \rho - 6] + A_{00} \cdot (1 - \sigma) = 0, \\ A_{01} \cdot [(\sigma + 1) \cdot \sigma - 6] + A_{00} \cdot (1 - \rho) = 0, \\ A_{11} \cdot [(\rho + 1) \cdot \rho - 6] + A_{01} \cdot [1 - (\sigma + 1)] + \frac{1}{2} \cdot A_{00} = 0, \\ A_{11} \cdot [(\sigma + 1) \cdot \sigma - 6] + A_{10} \cdot [1 - (\rho + 1)] + \frac{1}{2} \cdot A_{00} = 0, \\ A_{20} \cdot [(\rho + 2) \cdot (\rho + 1) - 6] + A_{10} \cdot (1 - \sigma) + \frac{1}{3} \cdot A_{00} = 0, \\ A_{02} \cdot [(\sigma + 2) \cdot (\sigma + 1) - 6] + A_{01} \cdot (1 - \rho) + \frac{1}{3} \cdot A_{00} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{21}$$

Подставляя значения пары корней в систему (21) последовательно определим решения вида (5), соответствующие этим показателям. Так, решение, соответствующее показателю $(\rho_2 = 3;\ \sigma_2 = 3)$ имеет вид

$$Z_1 = x^3 \cdot y^3 \cdot \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y + \frac{1}{2 \cdot 3!} \cdot xy + \frac{1}{7 \cdot 3!} \cdot x^2 + \frac{1}{7 \cdot 3!} \cdot y^2 + ...\right\}. \tag{22}$$

Однако, не все решения удается построить. Действительно, из трех оставшихся решений удается построить решение, соответствующее показателю $(\rho_1 = -2;\ \sigma_1 = -2)$:

$$Z_2 = x^{-2} \cdot y^{-2} \cdot \left\{1 + \frac{3}{2 \cdot 2!} \cdot x + \frac{3}{2 \cdot 2!} \cdot y + \frac{1}{2!} \cdot xy + \frac{31}{3 \cdot 4!} \cdot x^2 + \frac{31}{3 \cdot 4!} \cdot y^2 + ...\right\}, \tag{23}$$

а в остальных случаях коэффициенты определяются неоднозначно.

Особенность $(x = 0;\ y = 0)$ регулярная, а $(x = \infty;\ y = \infty)$ – иррегулярная. Сходимость построенных решений (22)–(23) вблизи $(x = 0;\ y = 0)$ доказывается методом Горна [2]. По виду системы характеристических функций (19) убеждаемся, что систему определяющих уравнений относительно особенности $(\infty;\ \infty)$ определить не удается.

Они равны постоянным. Поэтому, система (18) не имеет решение вида (9). Общее решение системы (18) на основании (2) запишется в виде

$$Z(x,y) = C_1 \cdot Z_1(x \cdot y) + C_2 \cdot Z_2(x \cdot y),$$

где $Z_1(x \cdot y)$ и $Z_2(x \cdot y)$ определены в виде (22) и (23).

Решениями системы (1) являются и специальные функции двух переменных, в частности функции Уиттекера двух переменных. Аналитическая теория таких систем недостаточна развита. Поэтому, изучение их представляет особый интерес.

## Список литературы

**1. Тасмамбетов Ж.Н.** Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обощенным методом Фробениуса, (Препр. АН УССР. Институт математики: 90.21), Киев, 1990. - 44 с.

**2. Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. ч I. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. - М.: Наука, 1965. - 294 с.