Математическое моделирование критического состояния менее прочных слоев тонкостенной цилиндрической оболочки

В.Л. Дильман
Южно-Уральский государственный университет, кафедра общей математики
e-mail: dilman49@mail.ru

Т.В. Ерошкина
e-mail: etv80@mail.ru

Рассматриваются авторские математические модели напряженно-деформированного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек при нагружении их внутренним давлением и осевой силой. Предполагается, что оболочки содержат слои (прослойки) из менее прочного материала. На основе этих моделей проводится анализ критического давления в оболочках в зависимости от механических и геометрических параметров и условий нагружения.

Исследуется напряженное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки из упрочняемого материала, подверженной монотонному статическому нагружению внутренним давлением, а также осевой силой, в критический момент нагружения. Оболочка содержит слой (прослойку) из менее прочного материала, расположенный вдоль, поперек или под углом к образующей. Примером таких оболочек являются трубы большого диаметра и участки магистральных трубопроводов, содержащие в стенках продольные, спиральные (заводские) или поперечные (монтажные) сварные соединения. Под критическим моментом нагружения понимается момент начала пластического течения вследствие потери устойчивости процесса пластического деформирования материалом слоя.

Оболочка считается тонкостенной, если выполняются условия: 1) напряженное состояние предполагается постоянным по толщине оболочки (в ее однородном участке); 2) в частности, напряжения, направленные по нормали к поверхности оболочки, всюду внутри оболочки считаются равными разности внешних давлений (при их равенстве или отсутствии – равными нулю); 3) при исследовании локального участка оболочки, по площади сравнимого с ее толщиной (например, участка, содержащего менее прочный слой), кривизной оболочки можно пренебречь; 4) отношение толщины стенки к ее радиусу мало: $t \ll r$, что позволяет пренебрегать по сравнению с единицей слагаемыми, имеющими порядок t^2/r^2.

В инженерных расчетах обычно оболочку принимают тонкостенной, если у нее отношение толщины стенки к ее радиусу составляет величину около 0,05 и менее.

Критериальными величинами в критический момент нагружения удобно считать интенсивность напряжений и интенсивность деформаций, на основе которых можно получать силовые и деформационные критерии несущей способности конструкций в виде явных аналитических выражений или алгоритмов и программ. Эти критерии должны зависеть от прочностных и геометрических параметров конструкций и условий нагружения. Построение и исследование математических моделей критических напряженно-деформированных состояний тонкостенных цилиндрических оболочек из изотропных упрочняемых материалов основывается на двух принципах: 1) гипотезе П. Людвига (P. Ludwik) о "единой кривой", то есть гипотезе о независимости диаграммы деформирования от вида напряженного состояния при сложном нагружении; 2) критерии Свифта потери устойчивости процесса пластического деформирования оболочки (H.W. Swift, [1]).

Суть критерия Свифта заключается в следующем [2]. Изменение размеров (во всех направлениях) участка стенки конструкции при возрастании внешних нагрузок приводит к приращению напряжений на этом участке, которые компенсируются за счет упрочнения материала стенки, и в этом случае пластическое деформирование протекает устойчиво. Однако упрочнение происходит по закону, который на стадии развитых пластических деформаций можно аппроксимировать функцией вида

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \tag{1}$$

где σ_i и ε_i – интенсивности напряжений и деформаций, причем график f – монотонно возрастающая выпуклая вверх гладкая кривая. С другой стороны, рост напряжений за счет изменения геометрии конструкции в зависимости от деформаций происходит по экспоненте, скорость роста которой выше скорости роста выпуклой вверх функции. Поэтому в какой-то момент роста упрочнения материала оказывается недостаточно для нейтрализации роста напряжений, связанного с изменением формы. В этот момент, определяемый равенством дифференциалов двух указанных зависимостей, начинается деформирование материала с неконтролируемой скоростью при постоянных или уменьшающихся внешних нагрузках, т. е. происходит потеря устойчивости процесса пластического деформирования данного участка оболочки.

Среди большого количества известных аппроксимаций зависимости (1) выделяется простотой в использовании степенная зависимость

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n, \tag{2}$$

где A и n – константы материала. К числу недостатков аппроксимации (2) можно отнести нелинейность в логарифмических координатах реальных зависимостей для многих материалов. В работах [3, 4] предложены уточнения формулы (2), например,

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^n\, exp\,(a\varepsilon_i), \quad \sigma_i = A\varepsilon_i^n\, exp\,(a\varepsilon_i + b\varepsilon_i^2).$$

Здесь $n,\ a,\ b$ – постоянные, характеризующие свойства материала, которые могут быть получены аппроксимацией экспериментальных данных; зависимость коэффициента A от этих величин получена в [5].

Существует нескольких видов критического состояния слоя при растягивающей внешней нагрузке.

1. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении, не достигают значений максимальных напряжений в более прочном основном металле, причем приконтактные более прочные участки участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

2. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков более прочной части соединения.

3. Достижение критического состояния слоя (прослойки), при условии, что максимальные нормальные напряжения в слое, действующие в его поперечном направлении,

достигают значений максимальных напряжений в более прочном основном металле, причем приконтактные более прочные участки соединения не вовлекаются в пластическое деформирование.

4. То же, но с вовлечением в какой-то момент в пластическое деформирование приконтактных участков более прочной части соединения.

Это, а также недоопределенность возникающих при исследовании напряженного состояния менее прочного слоя краевых задач, объясняет сложность и вариативность математических моделей, описывающих критические состояния изучаемых объектов. Цель работы – получение, на основе математического моделирования напряженно-деформированного состояния менее прочного слоя тонкостенной цилиндрической оболочки в критический момент нагружения, явных аналитических зависимостей или комплексов программ для вычисления критического давления в таких оболочках. Это позволяет дать сравнительный анализ прочности продольных, спиральных и кольцевых "мягких" слоев (прослоек) в таких оболочках и несущей способности прямошовных и спиральношовных труб.

Построение математической модели напряженно-деформированного состояния менее прочного слоя тонкостенной цилиндрической оболочки в критический момент нагружения можно разбить на следующие этапы.

1. Определение критических значений напряжений и деформаций в менее прочном слое оболочки на основе критерия Свифта. Представление этих величин в явной аналитической форме при использовании теории малых деформаций и в виде итерационной зависимости при использовании теории течения [6, 7, 5, 8, и др.].

2. Построение математической модели напряженного состояния менее прочного слоя в листовом образце при двухосном нагружении, когда нагрузка действует параллельно и ортогонально направлению слоя. Вычисление в этом случае коэффициента контактного упрочнения материала слоя в явной аналитической форме [9, 10, 8, и др.].

3. Сведéние математической модели напряженного состояния менее прочного слоя в листовом образце при двухосном нагружении, когда нагрузка действует под углами, не равными нулю и $\pi/2$ к направлению слоя, к предыдущему этапу. Вычисление в этом случае коэффициента контактного упрочнения материала слоя в форме итерационной зависимости [6, 7, 5, 8, и др.].

4. На основе полученных результатов вывод итерационных (в некоторых случаях явных) аналитических зависимостей для критического давления в тонкостенной цилиндрической оболочке в зависимости от имеющихся параметров [6, 7, и др.]. К упомянутым параметрам относятся:

1) механические свойства материала слоя и основного материала, характеризуемые пределами прочности $\sigma_B^{\text{МП}}$, $\sigma_B^{\text{БП}}$ и показателем упрочнения $n = n^{\text{МП}}$, а также коэффициент механической неоднородности соединения $K = \sigma_B^{\text{БП}}/\sigma_B^{\text{МП}}$;

2) размеры оболочки: R_0 – внутренний радиус оболочки в начальный момент нагружения, t_0 – толщина стенки оболочки в начальный момент нагружения;

3) относительная толщина слоя $\varkappa = h/t$, где h – толщина слоя, t – толщина стенки оболочки;

4) угол наклона слоя к оси оболочки ν;

5) коэффициент двухосности нагружения стенки трубы $m = \sigma_1/\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 – осевое кольцевое (соответственно) напряжения в стенке оболочки.

5. Написание программ, позволяющих находить зависимости внутреннего давления от указанных параметров.

Введем обозначения:

$$B = \cos^2 \nu + m \sin^2 \nu,\ C = (1-m)\sin 2\nu,\ m = \sigma_1/\sigma_2.$$

Пусть g – коэффициент контактного упрочнения (звездочка указывает на значение величины в критический момент нагружения). Критическое давление p^* и условное расчетное кольцевое напряжение $\sigma_\varphi^{\text{усл}}$ определяются зависимостями [5, 8, и др.]:

$$p^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{\sigma_B t_0}{R_0} S, \quad \sigma_\varphi^{\text{усл}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} S\sigma_B, \quad S = \frac{g^*\left(\sqrt{B^2 + C^2(g^*)^2}\right)^{n-1}}{B^n}. \tag{3}$$

Заметим, что коэффициент g зависит от коэффициента механической неоднородности K и может быть вычислен по следующим формулам [5, 8, 10]:

$$g^* = 1 + \sigma_{\text{упр}}/2,$$

причем при условии $\varkappa_0 \le \varkappa \le \varkappa_1 = (K+1)/4$, где $\varkappa_0 = (K+1)/((K+1)^2+4)$,

$$\sigma_{\text{упр}} = \frac{(K-1)(3-K)}{2} + \frac{(K-1)(K+1-4\varkappa)(K+1-4\varkappa)}{3\varkappa(K+1)^2}, \tag{4}$$

а при условии $0 < \varkappa \le \varkappa_0$,

$$\sigma_{\text{упр}} = (K-1)(2 - 2\varkappa - (1/6)\sqrt{\varkappa}(K+1)\sqrt{K+1-4\varkappa}). \tag{5}$$

С другой стороны, этот коэффициент $K = K^{\text{нак}}$ для наклонного слоя в соответствии с формулой [5, 8, и др.]

$$K_{\text{нак}} = K\sqrt{1 + \frac{K^2-1}{K^2}\frac{(g^*)^2C^2}{B^2}} \tag{6}$$

сам зависит от g^*. Поэтому для применения формулы (3) следует сначала найти g^* как предел итеративной последовательности (с заданной точностью), взяв в качестве стартового значения для $K_{\text{нак}}$ коэффициент $K = \sigma_B^{\text{БП}}/\sigma_B^{\text{МП}}$.

На основе теоретических результатов, в частности, зависимостей (3), (4), (5) и (6), в системе компьютерной математики MATLAB разработан комплекс программ, позволяющий:

1. По заданным параметрам находить условный коэффициент механической неоднородности в зависимости от угла наклона слоя к оси оболочки $K_{\text{нак}}$.

2. По заданным параметрам находить критическое давление p^* и условное расчетное кольцевое напряжение $\sigma_\varphi^{\text{усл}}$.

3. Получать графическое изображение критического давления p^* как функцию: 1) от угла наклона менее прочного слоя; 2) от коэффициента двухосности нагружения; 3) от относительной толщины слоя; 4) коэффициента механической неоднородности.

Анализ полученных численных результатов позволил сделать следующие выводы.

1. Даже при отсутствии осевых нагрузок наклонное расположение менее прочного слоя не дает никакого преимущества, если угол наклона не превышает $0,5$ ($25^0 \ldots 30^0$). При отсутствии осевых нагрузок спиральный шов дает заметное преимущество, когда угол наклона шва равен $0,94$ ($54^0 \ldots 55^0$) – параметр, используемый при производстве спиральношовных труб. В этом случае спиральношовные оболочки оказываются равнопрочными с бесшовными.

2. Прямошовные трубы и другие тонкостенные оболочки получают преимущество при существенных осевых нагрузках, особенно при сжимающих; при наличие заметного контактного упрочнения (тонкие прослойки) это преимущество увеличивается.

3. Более высокий показатель упрочнения слоя, то есть его большая пластичность, дает преимущество спиральношовным тонкостенным оболочкам.

4. Если контактное упрочнение в слое отсутствует (например, когда толщина слоя сравнима с толщиной оболочки), то критическое давление в такой оболочке выше, чем в оболочке, изготовленной целиком из менее прочного материала. Другими словами, имеет место упрочнение, отличное от контактного, названное в работах [5, 8, и др.] конструкционным упрочнением.

Список литературы

[1] Swift H. Plastic instability under plane stress // J. Mech. and Phys. Solids. 1952. № 1. P. 1–18.

[2] Ковальчук, Г.И. К вопросу о потери устойчивости пластического деформирования оболочек / Г.И. Ковальчук // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 11–16.

[3] Дильман В.Л., Остсемин А.А. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность труб магистальных газонефтепроводов // Изв.РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 179–185.

[4] Дильман В.Л. Пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек // Изв.РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 165–175.

[5] Дильман, В.Л. Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. 202 с.

[6] Дильман В.Л., Остсемин А.А. Несущая способность спиральношовных труб большого диаметра // Хим. и нефтегаз. машиностроение. 2002. № 6. С. 11–15.

[7] Дильман В.Л. Анализ пластической устойчивости осевых и спиральных мягких прослоек в цилиндрической тонкостенной оболочке // Обозрение приклад. и пром. математики. 2007. Т. 14, вып. 4. С. 704–705.

[8] Дильман В.Л. Исследование аналитическими методами математических моделей напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек // Вест. ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". 2009. Вып. 3. №17(150). С. 36–58.

[9] Дильман, В.Л., Остсемин А.А. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии // Изв.РАН. Механика твердого тела. 2001. № 6. С. 115–124.

[10] Дильман В.Л., Остсемин А.А. Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 38–48.