К построению аналога производной интервальных величин

Л.С. Терехов
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: `lev.terekhov@gmail.com`

Показано, что вещественное число – инструмент математики – не всегда подходящий для отображения величин физики. На основе соотношения неопределённостей предложен алгоритм вычисления отношения разностей данных натурных измерений с наименьшей неопределённостью.

В математическом анализе понятие первой производной как предела отношения разностей основано на постулате о непрерывности числовой оси и существовании вещественного, точечного числа. Предел отношения разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$, если он существует, определяет производную функции $y = f(x)$ по x в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{1}$$

В выражении (1) все соответствующие символам числа принадлежат области вещественных чисел. Определение интервальной производной, можно говорить, имеет прототипом производную Фреше, также основанную на понятии вещественного числа [1; 2]. Отличие вещественных чисел от величин, представляющих сомножители соотношения неопределённостей (СН) классической физики или адекватные им неопределённости результатов натурных измерений, состоит, в частности, в том, что приращение аргумента Δx и соответствующее приращение функции Δy чисел вещественных, могут иметь одновременное стремление к нулю. Иначе в физике: для пары величин, например, для частоты f и времени t, неопределённости измерений которых соответственно равны Δf и Δt и удовлетворяют СН:

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq 1, \tag{2}$$

возможность их одновременного уменьшения исключена. Что, в свою очередь, исключает построение классической производной как предела отношения приращений функции Δf и аргумента Δt. Составляя из сомножителей СН (2) отношение $\frac{\Delta f}{\Delta t} \geq \frac{1}{(\Delta t)^2}$, получаем, независимо от вида зависимости $f = f(t)$, расходимость

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \to \infty. \tag{3}$$

Расходимость (3) указывает на качественное различие результатов предельного перехода для чисел вещественных (включая интервальные) и величин, представляющих данные натурных измерений.

Несовместимость определений пределов в математике (1) и физике (3) приводит к проблеме построения оценки первой производной по данным натурных измерений.

2. Понятие погрешности используется в настоящей работе в общепринятом смысле. Неопределённость же, с целью необходимого в настоящей работе чёткого разграничения

понятий ”погрешность” и ”неопределённость”, понимается уже вводимого сейчас в метрологии её расширения, то есть – только как неопределённость сомножителей СН [3].

В настоящей работе ищется аналог производной как отношение сомножителей обобщённого СН. Обобщение СН проведено на основе его радиолокационной формы [4], отличающейся от формы (2) большей общностью: учитываются отношение μ сигнала к шуму по мощности и форма сигнала α:

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}. \tag{4}$$

Для простого сигнала, рассматриваемого в настоящей работе, $\alpha \sim 1$. Область применимости формы СН (4) – явления макроскопического масштаба.

Обобщение СН проведено на примере зависимости частоты от времени на модели гладкой кривой: $f = f(t)$, $f \neq const$, $\frac{df}{dt} \neq \infty$. Обобщённое СН рассмотрено для полной погрешности измерения частоты $\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t))$ и представлено суммой компонентов: известного случайного $\Delta f_r = \frac{1}{2\cdot\alpha\sqrt{\mu}\cdot\Delta t}$ и вновь введённого детерминированного компонента $\Delta f_s = \frac{f'(t)\cdot\Delta t}{2}$ [3]:

$$\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t)) = \frac{1}{2\cdot\alpha\sqrt{\mu}\cdot\Delta t} + \frac{f'(t)\cdot\Delta t}{2}. \tag{5}$$

В обобщённом соотношении неопределённостей (5) и далее рассматривается предельный случай СН, которому соответствует знак равенства. Минимизируя целевую функцию $\Delta f(\mu, \Delta t, f'(t))$ по переменной Δt, находим оптимальное время $\Delta t^*(\mu, f'(t))$ и соответствующую ему минимальную погрешность $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t))$. Их перемножение даёт обобщённое СН в ”свёрнутом” по сравнению с (5) виде:

$$\Delta t^*(\mu, f'(t)) \cdot \Delta f_{min}(\Delta t^*(t)) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\mu}}. \tag{6}$$

Качественное отличие обобщённого СН (6) от известных форм (2) и (4) состоит в том, что обобщённое СН выполняется только для квантованных его сомножителей $\Delta t^*(\mu, f'(t))$ и $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t))$. Измерение является лишь частной, упорядоченной человеком последовательностью физических явлений. Поэтому СН (6) остаётся верным и в общем случае, для совокупности физических явлений, к упорядочению которой человек не причастен: обобщённое СН (6) позволяет говорить о выявленном в макроскопической физике явлении – квантовании, область действия которого, в отличие от микрофизики, ограничена лишь ”собственным” квантованием параметров в ходе конкретного макроскопического физического процесса. Если в микромире квантование можно назвать фундаментальной ”разметкой” параметра физического объекта константами физики, например, уровнями энергии атома водорода, то макроскопическое квантование (6) – это ”разметка” преходящая, ограниченная пределами частного макроскопического процесса.

Одномерная сетка в общем случае неравноотстоящих узлов t_i, соответствующих отсчётам, генерируется в адаптивном процессе измерения. Шаг экстраполяции полагается равным интервалу $\Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i))$, что приводит к рекуррентному соотношению:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i)). \tag{7}$$

Начальный шаг сетки $\Delta t = t_1 - t_0$ устанавливается вручную, исходя из ожидаемых характерных времён измеряемой величины. Далее рекурсия использована в определении собственно интервала $\Delta t_i^*(\mu_i, f'(t_i))$:

$$\Delta t_i^*(\mu, f, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\mu_{i-1}} \cdot |\frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})}|}}. \tag{8}$$

Интервал $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ определяется такими же параметрами, что и интервал (8):

$$\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)) = \sqrt{\frac{1}{\alpha\sqrt{\mu_{i-1}}} \cdot |\frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})}|}. \tag{9}$$

Минимальная неопределённость измерения частоты $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ достигается при выполнении измерительных и вычислительных операций в последовательности (8), (7), (9), составляющих алгоритм, управляющий процессом пошаговой адаптации измерительного интервала $\Delta t_i^*(\mu, f, t)$ к измеряемым параметрам сигнала.

Искомый аналог производной $F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i))$ имеет простой вид, представляющий её вычисление непосредственно через отсчёты величин f и t:

$$F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i)) = \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})} = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \tag{10}$$

Однако правая часть (10) удовлетворяет определению аналога производной $F(\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i)), \Delta t^*(t_i))$ лишь тогда, когда разности – суть интервалы минимальной неопределённости измерения частоты $\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_i))$ и оптимального времени измерения частоты $\Delta t_i^*(\mu_{i-1}, \frac{\Delta f_{min}(\Delta t^*(t_{i-1}))}{\Delta t^*(t_{i-1})})$. При указанных условиях нахождение производной (10) защищено от получения огреха, подобного в иллюстративном примере (3). Выражения (5) и (6), содержащие первую производную в её классической форме, можно считать, таким образом, лишь нулевой итерацией. Переход к следующей итерации состоит в замене классической формы производной в (5) и (6) её формой (10).

3. Испытанием предложенного подхода к конструкции аналога производной выбрано сравнение накопленной погрешности по области численного интегрирования предложенного и известного методов. Для численного интегрирования выбран интеграл

$$I = \int_{e^{-p}}^{1} \frac{dx}{x} = p. \tag{11}$$

значение которого известно точно, что позволяет использовать его величину как опорную при сравнении.

Накопленная погрешность интегрирования (Er) методом трапеций с постоянным оптимальным шагом находится как модуль разности вычисляемого значения интеграла I_n с точным его значением p: $Er(I_n) = |I_n - p|$. Оптимальный, но постоянный по всей области интегрирования шаг, находится простой дихотомией, как обеспечивающий минимум накопленной погрешности по всей области интегрирования (11).

Накопленная погрешность по предложенному алгоритму находится как модуль разности $Er(I^*) = |I^* - p|$ с шагом, адаптируемом при каждом шаге. Здесь I^* – численное значение интеграла с адаптируемым шагом. Численное интегрирование с адаптацией выполнено также методом трапеций, что обеспечивает при одном и том же ”базовом” методе трапеций чистое различие результатов обоих вычислений.

Результаты сравнения показывают уменьшение числа узлов n^* по предлагаемому методу сравнительно с числом узлов n ”оптимизированного” метода трапеций более, чем в 3 раза ($n = 300 \times 10^3$; $n^* = 92 \times 10^3$); накопленная погрешность соответственно меньше более, чем на 2 порядка: $\frac{Er(I_n)}{Er(I^*)} = 148$; вычисления проведены для показателя степени $p \approx 9.19$ и разрядности вычислений 16.

Выражаю благодарность Н.В. Кузьминой за численные расчёты, проведённые ею при выполнении дипломной работы в ОмГТУ.

Список литературы

[1] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.

[2] Schr’der G. Differentiation of interval functions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1972. Vol. 36, № 2. P. 485-490.

[3] Терехов Л.С. Оценка производной на основе обобщённого соотношения неопределённостей // Изв. вузов. Физика. 2008. № 9/2. С. 84-89.

[4] Сколник М. Введение в технику радиолокационных систем. М.: Мир, 1965. 520 с.

[5] Терехов Л.С. О квантовании неопределенности измеряемых величин // Всероссийское (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям ”Интервал-06”. Россия, Петергоф, 1-4 июля 2006 г.: Расшир. тезисы докладов / СПбГУ. СПб, 2006. С. 123-125.