Построение точных решений трехмерных задач конвекции *

О.Н. Гончарова
Алтайский государственный университет, Барнаул
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

В.В. Пухначёв
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: pukhnachev@gmail.com

Изучаются точные решения трехмерных задач конвекции на основе классических уравнений Обербека-Буссинеска. Решения являются трехмерным обобщением известного точного решения (Бирих, 1966). Исследуется групповая природа решений, обсуждается корректность постановок начально-краевых задач. Одной из рассмотренных задач является конвекция двух несмешивающихся, вязких, несжимаемых жидкостей в бесконечном канале с прямоугольным поперечным сечением под действием продольного градиента температуры и поперечно направленной силы тяжести. При численном исследовании стационарной задачи осуществляется редукция к двумерным постановкам. Приводятся примеры течений с границей раздела в канале с теплоизолированными твердыми стенками.

1. Введение

Изучается точное решение трехмерной, стационарной задачи конвекции двух несмешивающихся, вязких, несжимаемых жидкостей в канале с прямоугольным поперечным сечением при наличии границы раздела. Конвективное движение жидкостей описывается системой уравнений Обербека-Буссинеска. На термокапиллярной границе раздела выполняются кинематическое и динамические условия, а также условия непрерывности скорости, температуры и тепловых потоков. Решение является трехмерным обобщением известного точного решения в горизонтальной полосе [1]. Экспериментальными и численными методами в [2] исследовалась задача о конвекции в длинной горизонтальной кювете при постоянном перепаде температуры на боковых границах, и решение Бириха [1] было подтверждено. Конвективные движения двух несмешивающихся жидкостей с недеформируемой границей изучались в [3]. Обзор двумерных решений, описывающих двухслойные течения при дополнительном условии замкнутости потока, дан в [4]. Точные решения, построенные на основе уравнений Обербека-Буссинеска и Навье-Стокса и удовлетворяющие всем условиям на границе раздела, изучались в [5].

Моделирование трехмерной конвекции, в том числе, и построение точных решений, приобретает в последнее время особую актуальность в связи с возможностью описывать

*Работа выполнена в рамках совместного Интеграционного проекта СО РАН, УрО РАН и ДВО РАН № 116 "Моделирование, оптимизация и устойчивость конвективных течений" и при финансовой поддержке Грантов РФФИ № 10-01-00007, № 09-08-01127 и Федеральной целевой программы "Кадры"(контракт № 14.740.11.0355).

реальные течения жидкостей с границами раздела. Подготовка и проведение экспериментов в условиях земной и пониженной гравитации [6, 7] и связанных с изучением конвективных и других процессов в жидкости и газе, предоставляют возможность физической интерпретации точных решений классических уравнений конвекции. Обобщение плоского течения на случай движения в цилиндрическом канале произвольного поперечного сечения дано в [8]. Там же предложена интерпретация построенного решения для описания переноса пассивной примеси на большие расстояния вдоль трубы при совместном действии продольного градиента температуры и поперечной силы тяжести. В [9] рассматривается конвекция во вращающейся круглой трубе, возбуждаемая взаимодействием центробежной силы и теплового потока вдоль оси трубы. Построение решений в задаче конвекции в двух- и многослойных системах коаксиальных цилиндров с недеформируемыми границами проводится в [10].

В данной работе изучается конвекция в бесконечном канале с прямоугольным поперечным сечением под действием продольного градиента температуры. Поле скоростей имеет три ненулевые компоненты, представляющие собой функции, зависящие от поперечных координат. Температура и давление также имеют аналогичные составляющие. (При изучении нестационарных задач следует учитывать зависимость от времени.) Осуществляется редукция к двумерным постановкам. При построении численного алгоритма вводятся новые искомые функции: вместо поперечных компонент скорости введены функция тока и завихренность. Проводится безразмерный анализ задачи. Приведены примеры конвективных течений в канале в условиях гравитации и микрогравитации в случае, когда твердые стенки теплоизолированы.

2. Постановка задачи. Построение точных решений

Классические уравнения Обербека-Буссинеска применяются для изучения тепловой гравитационной конвекции жидкости [11, 12]:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta T\mathbf{g},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\ T_t + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi\Delta T. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости жидкости, p — давление (отклонение давления от гидростатического), T — температура, ρ — плотность, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент температуропроводности, β — коэффициент теплового (объемного) расширения. Предполагается, что система координат выбрана таким образом, что вектор ускорения силы тяжести направлен против оси Ox: $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$.

Обобщение решений Бириха для трехмерных задач конвекции основано на том факте, что решения, построенные в [1], являются инвариантными решениями системы уравнений Обербека-Буссинеска (1) относительно трехпараметрической группы Ли, порожденной инфинитезимальными операторами ∂_t, ∂_y и $Z = -A^{-1}\,\partial_z + \rho\,\beta\,g\,x\,\partial_p + \partial_T$. Все инвариантные $Z-$решения системы (1) имеют представление [8]:

$$u = u(x,y,t), v = v(x,y,t), w = w(x,y,t), p = -A\rho\beta gxz + q(x,y,t), T = -Az + \Theta(x,y,t), \tag{2}$$

где функции u, v, w, q, Θ будут удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений с тремя независимыми переменными t, x, y. Эта система уравнений является следствием системы (1), а по своей структуре похожа на систему уравнений Навье-Стокса в плоском случае, дополненную двумя параболическими уравнениями. При постановке начально-краевых задач для нахождения функций u, v, w, q, Θ следует исходить из заданного начального состояния и граничных условий: условий прилипания для скорости на твердых непроницаемых границах и заданного теплового режима (теплового потока или температуры). Вопросы корректности постановки задач могут быть успешно исследованы.

2.1 Построение стационарного решения при наличии границы раздела

Пусть две несмешивающиеся жидкости (либо жидкость и газ) заполняют бесконечный горизонтальный канал, имеют недеформируемую границу раздела, определяемую уравнением $x = 0$. Заметим, что случай неплоской границы раздела заслуживает быть рассмотренным позднее. Для построения решения вида (2) системы уравнений (1), применяемых для описания конвекции в обеих жидкостях, в стационарном случае перейдем к безразмерной формулировке. Тогда

$$u = u(x,y), v = v(x,y), w = w(x,y), p = -\tilde{T}\frac{Gr}{Re^2}xz + q(x,y), T = -\tilde{T}z + \Theta(x,y),$$

$$u^g = u^g(x,y), v^g = v^g(x,y), w^g = w^g(x,y), p^g = -\tilde{T}\bar{\rho}\bar{\beta}\frac{Gr}{Re^2}xz + q^g(x,y), T^g = -\tilde{T}z + \Theta^g(x,y). \quad (3)$$

Здесь индекс g определяет искомые функции верхней (легкой) жидкости (или газа), $\tilde{T} = Ah/T_*$, h — характерный размер, T_*— характерная температура, $\bar{\rho}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\beta}$ — отношения плотностей и коэффициентов кинематической вязкости, температуропроводности, температурного расширения верхней (легкой) и нижней жидкости, $\bar{u}$ отношение двух характерных скоростей задачи (продольной и поперечной u_* характерных скоростей), $Gr = \beta T_* g h^3/\nu^2$ — число Грасгофа, $Re = u_* h/\nu$ — число Рейнольдса.

Задача нахождения поперечных компонент скорости u, v и u^g, v^g может быть сформулирована в терминах новых искомых функций: функции тока ψ, ψ^g и завихренности ω, ω^g. Данные функции удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:

$$\Delta\psi = -\omega,\ u\,\omega_x + v\,\omega_y = \frac{1}{Re}\Delta\omega - \frac{Gr}{Re^2}\Theta_y, \quad (4)$$

$$\Delta\psi^g = -\omega^g,\ u^g\,\omega^g_x + v^g\,\omega^g_y = \frac{\bar{\nu}}{Re}\Delta\omega^g - \bar{\beta}\frac{Gr}{Re^2}\Theta^g_y \quad (5)$$

в областях $\widetilde{\Omega} = \{(x,y,z) : -\underline{x} < x < 0,\ 0 < y < 1,\ z = z_0\}$ и $\widetilde{\Omega}_g = \{(x,y,z) : 0 < x < \overline{x},\ 0 < y < 1,\ z = z_0\}$, соответственно. Здесь

$$u = \psi_y,\ v = -\psi_x,\ u^g = \psi^g_y,\ v^g = -\psi^g_x. \quad (6)$$

Функции ψ, ψ^g, ω, ω^g удовлетворяют граничным условиям: $\psi = 0$, $\psi^g = 0$ всюду на границах $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Omega}_g$. Кроме того, $\psi_x = 0$ при $x = -\underline{x}$, $\psi^g_x = 0$ при $x = \overline{x}$, $\psi_y = 0, \psi^g_y = 0$ при $y = 0$ и $y = 1$. Динамические условия на границе раздела $x = 0$ формулируются в виде:

$$\omega - \bar{\rho}\bar{\nu}\omega^g = -\frac{Ma}{RePr}\Theta_y,\ 2(\psi_{yx} - \bar{\rho}\bar{\nu}\psi^g_{yx})_y = (\bar{\rho}-1)Re\psi_x\psi_{xy} + \omega_x - \bar{\rho}\bar{\nu}\omega^g_x. \quad (7)$$

Функции w, w^g, определяющие третьи, продольные, компоненты скорости, представляют собой решение следующих дифференциальных уравнений

$$u\,w_x + v\,w_y = \tilde{T}\bar{u}\frac{Gr}{Re^2}x + \frac{1}{Re}(w_{xx} + w_{yy}),\ u^g\,w^g_x + v^g\,w^g_y = \bar{\beta}\tilde{T}\bar{u}\frac{Gr}{Re^2}x + \frac{\bar{\nu}}{Re}(w^g_{xx} + w^g_{yy}), \quad (8)$$

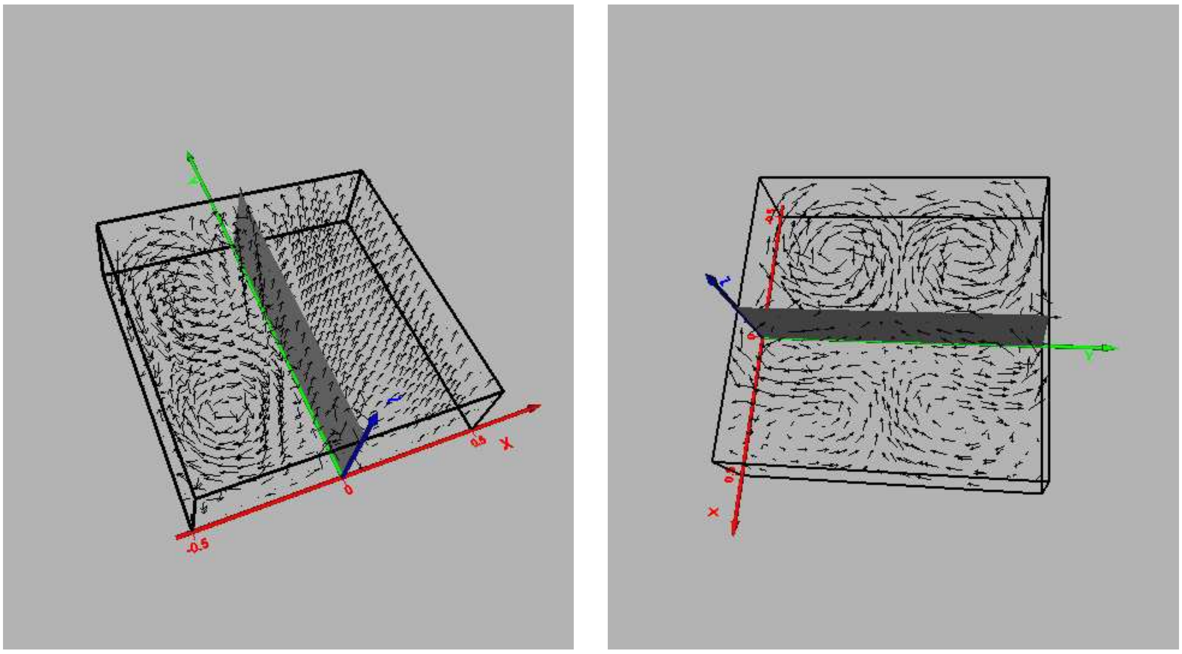


Рис. 1. Поле скоростей, $Gr = 10000$, $\tilde{T} = 10$: $\bar{u} = 1$ (слева); $\bar{u} = 0.1$ (справа)

удовлетворяющие условию непрерывности скорости и динамическому условию на границе раздела (при $x = 0$)

$$w|_{x=0} = w^g|_{x=0}, \quad w_x - \bar{\rho}\bar{\nu} w_x^g = \tilde{T}\bar{u}\frac{Ma}{RePr} \tag{9}$$

и условиям прилипания

$$w|_{x=-\underline{x}} = 0, \quad w^g|_{x=\overline{x}} = 0, \quad w_{y=0} = 0, \quad w_{y=1} = 0, \quad w^g_{y=0} = 0, \quad w^g_{y=1} = 0. \tag{10}$$

Составляющие температуры в обеих фазах Θ и Θ^g, зависящие от поперечных координат x, y, определяются уравнениями

$$u\,\Theta_x + v\,\Theta_y = \frac{\tilde{T}}{\bar{u}} w + \frac{1}{RePr}(\Theta_{xx} + \Theta_{yy}), \; u^g\,\Theta^g_x + v^g\,\Theta^g_y = \frac{\tilde{T}}{\bar{u}} w^g + \frac{\bar{\chi}}{RePr}(\Theta^g_{xx} + \Theta^g_{yy}) \tag{11}$$

и граничными условиями, которые представляют собой условия непрерывности температуры и тепловых потоков на границе раздела

$$\Theta|_{x=0} = \Theta^g|_{x=0}, \; \Theta_x|_{x=0} = \bar{\kappa}\Theta^g_x|_{x=0}, \tag{12}$$

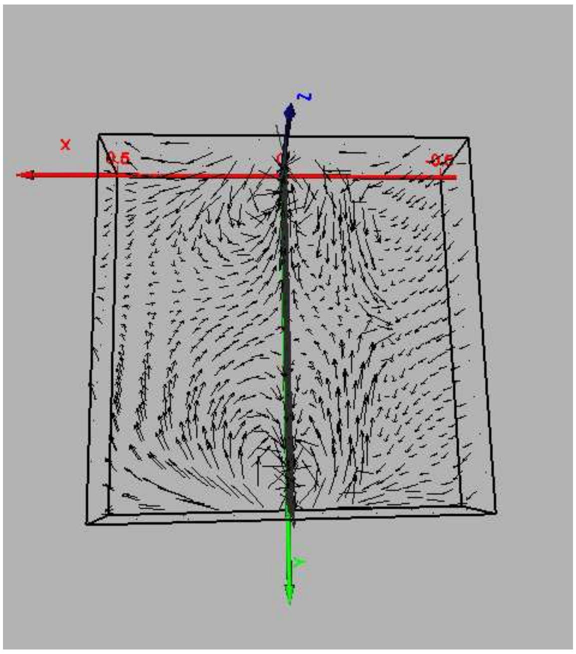
а также условиями теплового режима на твердых границах. Ограничимся рассмотрением условий их теплоизоляции

$$\Theta_x|_{x=-\underline{x}} = \Theta^g_x|_{x=\overline{x}} = 0, \; \Theta_y|_{y=0} = \Theta^g_y|_{y=1} = 0. \tag{13}$$

Отметим, что введены следующие обозначения: $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, $Ma = \sigma_T T_* h/(\rho\nu\chi)$ — число Марангони, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения (предполагается линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры), $\bar{\kappa}$ — отношение коэффициентов теплопроводности газа и жидкости.

2.2 Численное исследование. Результаты

Численные методы, разработанные для исследования задач конвекции в областях с твердыми и свободными границами [12], применяются для решения двумерных задач.



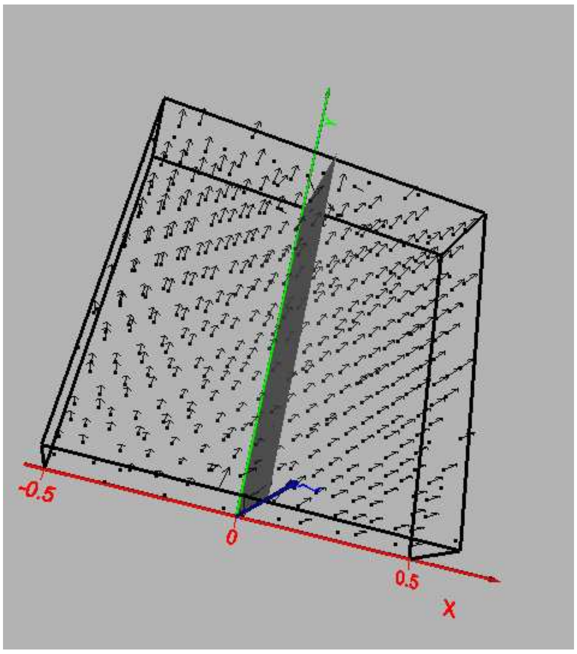


Рис. 2. Поле скоростей: $Gr = 10000$, $\tilde{T} = 0.5$, $\bar{u} = 0.1$ (слева); $Gr = 1$, $\tilde{T} = 10$, $\bar{u} = 1$ (справа)

Численный алгоритм базируется на продольно-поперечной конечно-разностной схеме, известной, как метод переменных направлений [13]. Разностные условия для вихря (условия Тома [11, 12]) формулируются на твердых непроницаемых границах областей $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Omega}_g$.

Общая схема решения стационарной задачи состоит в организации итерационного процесса при последовательном осуществлении следующих этапов. (I): Исходим из заданного состояния, предполагая, что компоненты скорости u, v, u^g, v^g найдены. С заданными u, v, u^g, v^g решаем численно задачи (8)-(10) и находим третьи компоненты векторов скорости w и w^g. (II): Для нахождения неизвестных компонент температуры Θ и Θ^g численно решаем уравнения (11) с условиями (12) на границе раздела и условиями (13) на твердых границах. (III): Следующим этапом является решение системы уравнений и граничных условий (4)-(7). (IV): Компоненты u, v, u^g, v^g векторов скорости вычисляются, согласно (6). (V) Возвращение к этапу (I). Итерационный процесс организован с применением критериев сходимости [12].

Численные исследования проведены для жидкостей типа этанол и азот [6]. При этом, имеют место следующие значения безразмерных параметров: $\bar{\rho} \sim 10^{-3}$, $\bar{\nu} \sim 10$, $\bar{\chi} \sim 100$, $\bar{\beta} \approx 4$, $\bar{\kappa} \approx 6$, $Pr = 10$ $Ma = 10^4$, $Re = 1$. Расчеты проводятся для значений числа Грасгофа $Gr = \{10^4, 10^2, 1\}$, соответствующих условиям нормальной гравитации $g = g_0 = 10^3$ cm/s^2, слабой гравитации или микрогравитации 10 cm/s^2 $(10^{-2}g_0)$, 10^{-1} cm/s^2 $(10^{-4}g_0)$, соответственно. Исследуются особенности течений, определяемые эффектами гравитации (см. Рис. 1 (слева), Рис. 2 (справа)), различной интенсивностью продольного градиента температуры (см. Рис. 1 (справа), Рис. 2 (слева)) при разных значениях параметра $\bar{u}$ (см. Рис.1). Значение безразмерного параметра $\tilde{T} = 10$ соответствует размерному значению параметра $A = 10$ K/cm (см. (2), (3)), значение $\tilde{T} = 1$ соответствует $A = 1$ K/cm, значение $\tilde{T} = 0.5$ соответствует $A = 0.5$ K/cm.

3. Заключение

Построено точное решение трехмерной задачи конвекции при наличии продольного градиента температуры и поперечной силы тяжести. Численно исследованы трехмерные эффекты в случае теплоизоляции твердых границ. Течение двух несмешивающихся жидкостей в канале прямоугольного сечения существенно зависит, как от величины градиента температуры, так и от интенсивности гравитационного поля. Наблюдаются отличия не только во вращательном характере движения обеих жидкостей. Поступательно-вихревое движение нижней (более тяжелой) жидкости может сопровождаться продольно-поступательным движением верхней.

Изучен пример стационарного течения в цилиндрической трубе, обладающего четырехячеистой структурой при спиралеобразном характере траекторий жидких частиц.

Список литературы

[1] Бирих Р.В. О термокапилярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.

[2] Кирдяшкин А.Г., Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла // ПМТФ. 1983. № 6. С. 122–128.

[3] Napolitano L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronautica. 1980. No 2. P. 461–478.

[4] Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. Красноярск. 2010 (Монография. Мин. обр. и науки РФ. Сибирский фед. ун-т. СО РАН. Ин-т вычисл. моделирования).

[5] Goncharova O., Kabov O. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53. P. 2795–2807.

[6] Iorio C.S., Goncharova O., Kabov O. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // Microgravity Sci. Technol. 2009. No 21(1). P. 313–320.

[7] Goncharova O.N., Kabov O.A., Pukhnachov V.V. Exact solutions of the three dimensional problems of convection based on the classical mathematical // Fifth International Topical Team Workshop on TWO-PHASE SYSTEMS FOR GROUND AND SPACE APPLICATIONS. September 26-29, 2010, Kyoto, Japan.

[8] Пухначёв В.В. Теоретико-групповая природа решения Бириха и их обобщения. Симметрии и дифференциальные уравнения // Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. моделирования. Красноярск. 2000. С. 180–183.

[9] Бирих Р.В., Пухначёв Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Доклады АН. 2010.

[10] Briskman V.A., Zuev A.L., Lyubimova T.P., Nepomnyaschy A.A Thermocapillary flows and deformations of the surface in the systems of fluid layers with the longitudinal temperature gradient in microgravity // Microgravity Sci. Technol. 1991. No VI(2). P. 98–99.

[11] Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 616 с.

[12] Современные математические модели конвекции / В.К. Андреев, Ю.В. Гапоненко, О.Н. Гончарова, В.В. Пухначёв. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

[13] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.