Влияние характеристик тонких покрытий на демпфирующие свойства полого цилиндра*

В.А.Будугаева
Институт проблем нефти и газа СО РАН
e-mail: v.a.budugaeva@ipng.ysn.ru

2 марта 2011 г.

Рассмотрены свободные колебания двухслойного цилиндра в предположении,что внешний слой в сравнении с внутренним тоньше в 100 раз и это дает основание считать этот слой определенным полимерным покрытием. Проведен численный эксперимент, где показано влияние параметров вязкоупругого материала (внешнего слоя) на демпфирующие свойства цилиндра. Сделан вывод, что демпфирующие свойства могут быть либо улучшены, либо ухудшены за счет свойств материала-покрытия.

Анализ публикаций по динамике структурно-неоднородных вязкоупругих оболочечных конструкций с различными реологическими свойствами,в частности, выявил немонотонную зависимость их диссипативных характеристик от структурной неоднородности. В соответствие с этим представляется интересным провести исследование зависимости демпфирующих характеристик вязкоупругого цилиндра от тонкого полимерного покрытия.

Чтобы решить поставленную задачу, представляется возможным рассмотреть задачу свободных колебаниях двухслойного цилиндра, внешний слой которого достаточно мал, чтобы можно было считать его полимерным покрытием.

Уравнение свободных колебаний вязкоупругого цилиндра с учетом принципа соответствия, имеет вид :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

Здесь все величины зависят от одной пространственной координаты r, так как имеет место осевая симметрия. Кроме этого, будем считать, что цилиндр находится в условиях плоскодеформированного состояния, то есть компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{r\ z}$, $\varepsilon_{\varphi\ z}$, $\varepsilon_{z\ z}$ равны нулю. Граница тела свободна от нагрузок

$$\sigma_r(R_0) = \sigma_r(R_2) = 0 \tag{2}$$

где R_0 и R_2—радиусы внутренней и внешней поверхностей, ограничивающих цилиндр. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_\varphi(r,t)$ и радиальное смещение $u(r,t)$ связаны между собой законом Гука

*РФФИ № 09-08-98501 Математическое моделирование и разработка методов оптимального проектирования неоднородных конструкций, обеспечивающих требуемый комплекс свойств при внешних воздействиях.

$$\sigma_r = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\lambda}\frac{u}{r} \tag{3}$$

$$\sigma_\varphi = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\frac{u}{r} + \bar{\lambda}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ определены зависимостями: для упругого случая $\bar{\lambda} = \lambda = const$, $\bar{\mu} = \mu = const$, для вязкоупругого случая [1]

$$\bar{\lambda} = \lambda[1 - \Gamma_\lambda^c(\omega_R) - i\Gamma_\lambda^s(\omega_R)] \tag{5}$$

$$\bar{\mu} = \mu[1 - \Gamma_\lambda^c(\omega_R) - i\Gamma_\lambda^s(\omega_R)] \tag{6}$$

где $\Gamma_\lambda^c(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_\lambda(\tau)\cos(\omega_R\tau)d\tau$, $\quad\Gamma_\lambda^s(\omega_R) = \int\limits_0^\infty R_\lambda(\tau)\sin(\omega_R\tau)d\tau$, при этом ρ — плотность материала,R —ядро релаксации вязкоупркгого материала, ω_R—действительная часть частоты свободных колебаний цилиндра.

Таким образом, задача в постановке (1)–(6) представляет собой задачу нахождения собственной частоты ω однослойного полого вязкоупругого цилиндра.

Для этого, следуя общепринятому методу при исследованиях свободных колебаний, решение задачи ищем в виде:

$$u(r,t) = u(r)\exp(i\omega t) \tag{7}$$

где $u(r)$—непрерывная амплитуда радиального перемещения.

В результате, учитывая соотношения (2)–(4) и воспользовавшись формулами [2] для производных функций Бесселя, получаем уравнение для нахождения частоты в виде:

$$A(R_0)B(R_2) - A(R_2)B(_0) = 0 \tag{8}$$

где $A(r) = \lambda\chi J_0(\chi r) + 2\mu(\chi J_0(\chi r) - r^{-\ 1}J_1(\chi r))$

$$B(r) = \lambda(\frac{2}{\pi r J_1(\chi r)} + \chi\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi r)}Y_1(\chi r)) + 2\mu(\frac{2}{\pi r J_1(\chi r)} + \chi\frac{J_0(\chi r)}{J_1(\chi r)}Y_1(\chi r) - r^{-\ 1}Y_1(\chi r))$$

$R_0 \le r \le R_2$

Здесь J_0— функция Бесселя нулевого порядка, перого рода,
J_1— функция Бесселя первого порядка, перого рода,
Y_1— функция Бесселя первого порядка, перого рода.

при этом

$$\chi^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},\ \text{а коэффициенты } \lambda \text{ и } \mu \text{ имеют вид (5) и(6).}$$

Очевидным является тот факт, что в случае вязкоупругого цилиндра собственная частота будет иметь комплексный вид, то есть $\omega = \omega_R + i\omega_I$, где ω_I —показатель гашения собственной частоты цилиндра.

Для того, чтобы оценить уровень гашения собственной частоты цилиндра с тонким покрытием, результаты, полученные выше обобщим для цилиндра, состоящего из двух слоев, как это было сделано в работе [3], считая, что на границе раздела двух сред выполняются условия неразрывности перемещений и напряжений:

$$u(R_1 - 0) = u(R_1 + 0),\ \sigma_r(R_1 - 0) = \sigma_r(R_1 + 0),\ R_1 - \text{граница раздела двух сред(слоев).}$$

При сделанных предположениях, получим уравнение для нахождения собственной частоты двухслойного цилиндра, аналогичное (8).

В результате вычислительного вся толщина стенки полого цилиндра делилась на 100 слоев: 99 - из них заполнялись одним материалом, а один (внешний) - другим. Таким образом, мы убедились в том, что демпфирующими свойствами цилиндрической конструкции можно управлять с помощью вариации не только вязкоупругих материалов, но и толщины слоев. Следовательно, возможна постановка задачи оптимизации демпфирующих характеристик цилиндрической конструкции.

Список литературы

[1] Основы математической теории термовязкоупругости /Ильюшин А.А.,Победря Б.Е. Москва. М.:Наука, 1970. 280 с.

[2] Справочник по математике для научных работников /Корн Г.,Корн Т. Москва.М.:Наука. 1970. 720 с.

[3] Будугаева В.А. Оптимизация декремента затухания свободных колебаний вязкоупругой слоистой сферы при ограничении на массу // Прикладная механика и теоретическая физика. 2000. Т.41. № 2. С. 161–165.