

К МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ*

С. С. Кузиков

ГОУ ВПО Алтайский Государственный Университет

e-mail: kuzikov@math.asu.ru

В работе рассматриваются обратные задачи для плоских стационарных околозвуковых течений газа, т.е. задачи заключающейся в определении формы профиля обтекаемого потоком газа по заданному на его контуре распределению давления или модуля скорости.

Исследованием различных вариантов обратных задач и приближенным методам решения посвящено большое количество работ, подробный обзор которых можно найти [1], [2].

Посредством специального выбора независимых переменных и искомых функций исходная задача приводится к построению решения квазилинейной симметрической системы уравнений первого порядка.

Рассмотрим плоское установившееся безвихревое течение газа в канале D ограниченном непроницаемыми стенками $\Gamma_1 : y = f_1(x)$ и $\Gamma_2 : y = f_2(x)$, являющиеся искомыми и на которых задаются модули скорости

$$\begin{aligned} q|_{\Gamma_1} &= q_1(s) \quad \text{и} \quad s \in [0, s_1] \\ q|_{\Gamma_2} &= q_2(s) \quad \text{и} \quad s \in [0, s_2] \end{aligned} \quad (1)$$

как функции параметра длины дуги s .

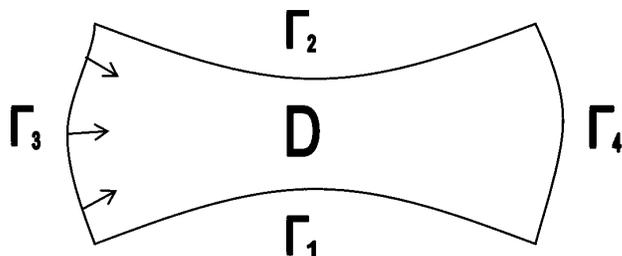


Рис. 1. Область течения

Предполагается, что функции $q_1(s)$ и $q_2(s)$ являются монотонно возрастающими и непрерывно дифференцируемыми, т.е. выполнены условия

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)" (код проекта № 2.2.2.4/4278), а также при поддержке федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

$$\frac{dq_1}{ds}(s) > 0, \frac{dq_2}{ds}(s) > 0 \quad (2)$$

Кроме того считаем, что $q_1(0) = q_2(0) = Q_0$ и $q_1(s_1) = q_2(s_2) = Q_1$. Условия (2) означают, что существуют обратные функции: $s|_{\Gamma_1} = s_1(q)$, $s|_{\Gamma_2} = s_2(q)$. Следовательно, $\frac{dq_1}{ds}(s_1(q))$ и $\frac{dq_2}{ds}(s_2(q))$ являются функциями модуля скорости q . Участки границы Γ_3 и Γ_4 являются линиями уровня модуля скорости, т.е.

$$q|_{\Gamma_3} = Q_0 \quad \text{и} \quad q|_{\Gamma_4} = Q_1 \quad (3)$$

и до решения так же неизвестны.

Пусть $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – соответственно потенциал и функция тока течения, $q = (\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y))^{\frac{1}{2}}$ – модуль скорости, θ – угол наклона вектора скорости к оси OX , $\rho = \rho(q)$ – плотность, $M = M(q)$ – число Маха, $1 - M^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dq}(q \cdot \rho)$.

Система уравнений для φ и ψ , описывающая это движение, на плоскости годографа записывается в виде [3]:

$$\varphi_\theta = \frac{q}{\rho} \psi_q, \quad \varphi_q = \frac{1 - M^2}{\rho q} \psi_\theta \quad (4)$$

Выберем в качестве независимых переменных ψ и q и преобразуем (4) к уравнениям для $\theta(q, \psi)$ и $\varphi(q, \psi)$:

$$\frac{q}{\rho} \theta_q = -\varphi_\psi, \quad \theta_\psi = -\frac{\rho k + \varphi_\psi^2}{q \varphi_q}, \quad k(q) = \frac{1 - M^2}{\rho^2} \quad (5)$$

Полагая, наконец, $\varphi_q = \frac{\rho}{uq}$, $\varphi_\psi = -\frac{v}{u}$, приходим к следующей симметрической системе уравнений для функций u и v :

$$ku_q + \frac{v}{u}v_q + \frac{\rho}{qu}v_\psi + k'u = 0, \quad \frac{v}{u}u_q - v_q + \frac{\rho}{qu}u_\psi = 0 \quad (6)$$

Система (6) эллиптическая при $q < q_{кр}(k(q) > 0)$, гиперболическая при $q > q_{кр}(k(q) < 0)$ и вырождается при $q = q_{кр}$, где $q_{кр} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ – критическая скорость, γ – показатель адиабаты.

На линиях тока $\psi = const$ имеет место соотношение $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{ds} = q \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta = q$. Отсюда для функций u и v получим следующие выражения:

$$u = \frac{\rho}{q\varphi_q} = \frac{\rho}{q \left(\frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dq}\right)} = \frac{\rho}{q^2} \frac{dq}{ds} \quad (7)$$

$$v = \frac{q}{\rho} \theta_q u = \frac{q}{\rho} \theta_s \frac{ds}{dq} u = \frac{\theta_s}{q} \quad (8)$$

Легко показать, что связь между плоскостью XOY и $qO\psi$ описывается соотношениями:

$$dz = \left(\frac{\rho}{qu} dq - \left(\frac{v}{u} - \frac{i}{\rho} \right) d\psi \right) \frac{e^{i\theta}}{q}, \quad z = x + iy \quad (9)$$

$$\theta_\psi = -\frac{ku^2 + v^2}{u}, \quad \theta_q = \frac{\rho v}{qu} \quad (10)$$

Так как кривые Γ_1 и Γ_2 являются линиями тока на которых $\psi|_{\Gamma_1} = \psi_1 = const$ и $\psi|_{\Gamma_2} = \psi_2 = const$, $\psi_1 < \psi_2$, а Γ_3 и Γ_4 линиями уровня модуля скорости (3), где $Q_0 < Q_1$, то область D в плоскости XOY посредством соотношения (9) отображается на прямоугольник $\Omega = \{(q, \psi) : Q_0 \leq q \leq Q_1, \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2\}$ плоскости $qO\psi$ с соответствующими участками границы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Считая, что $Q_0 < q_{кр} < Q_1$ в области Ω для системы уравнений (6) ставится следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u(q, \psi_1) &= \frac{\rho}{q^2} \frac{dq_1(s_1(q))}{ds} = U_1(q) \quad \text{на } \gamma_1 \\ u(q, \psi_2) &= \frac{\rho}{q^2} \frac{dq_2(s_2(q))}{ds} = U_2(q) \quad \text{на } \gamma_2 \\ v(Q_0, \psi) &= 0 \quad \text{на } \gamma_3, \quad ku^2 + v^2 \leq 0 \quad \text{на } \gamma_4 \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее условие гарантирует, что характеристики системы (6) на γ_4 не входят справа в область Ω , а это означает независимость решения в области Ω от условий справа от γ_4 . Следуя работе [4] можно показать знакоопределенность оператора задачи (6), (11). Обозначая посредством $a(q, \psi) = \frac{v}{u}$ и $b(q, \psi) = \frac{\rho}{qu}$ заметим, что на решении системы (6) из второго уравнения следует равенство $\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial \psi} = 0$, которое используется при построении разностной схемы.

Для численного решения задачи (6), (11) в области Ω строим сетку

$$\begin{aligned} \omega_{h,\tau} &= \{(q_n, \psi_m) : q_n = Q_0 + hn, \psi_m = \psi_1 + \tau m, n = 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M; \\ & \quad h = (Q_1 - Q_0)/N; \tau = (\psi_2 - \psi_1)/M\} \end{aligned}$$

Используя стандартные обозначения, запишем разностную схему аппроксимирующую дифференциальную задачу следующим образом

$$\begin{aligned} (k_{n+\frac{1}{2}}u_{n+1,m} - k_{n-\frac{1}{2}}u_{n-1,m})/2h + (a_{n+\frac{1}{2},m}u_{n+1,m} - a_{n-\frac{1}{2},m}u_{n-1,m})/2h + \\ + (b_{n,m+\frac{1}{2}}v_{n,m+1} - b_{n,m-\frac{1}{2}}v_{n,m-1})/2\tau + \frac{1}{2}k'_n u_{n,m} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{n+\frac{1}{2},m}u_{n+1,m} - a_{n-\frac{1}{2},m}u_{n-1,m})/2h - (v_{n+1,m} - v_{n-1,m})/2h + \\ + (b_{n,m+\frac{1}{2}}u_{n,m+1} - b_{n,m-\frac{1}{2}}u_{n,m-1})/2\tau = 0, \end{aligned}$$

$$1 \leq n \leq N - 1; \quad 1 \leq m \leq M - 1$$

$$\begin{aligned} (a_{n+\frac{1}{2},0}u_{n+1,0} - a_{n-\frac{1}{2},0}u_{n-1,0})/2h + (v_{n+1,0} - v_{n-1,0})/2h + \\ + (b_{n,\frac{1}{2}}u_{n,1} - b_{n,0}u_{n,0})/\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{n+\frac{1}{2},M}u_{n+1,M} - a_{n-\frac{1}{2},M}u_{n-1,M})/2h - (v_{n+1,M} - v_{n-1,M})/2h + \\ + (b_{n,M}u_{n,M} - b_{n,M-\frac{1}{2}}u_{n,M-1})/\tau = 0, \end{aligned}$$

$$1 \leq n \leq N - 1$$

$$\begin{aligned}
& (k_{\frac{1}{2}}u_{1,m} - k_0u_{0,m})/h + (a_{\frac{1}{2},m}u_{1,m} - a_{0,m}u_{0,m})/h + \\
& + (b_{0,m+\frac{1}{2}}v_{0,m+1} - b_{0,m-\frac{1}{2}}v_{0,m-1})/2\tau + \frac{1}{2}k'_0u_{0,m} = 0, \\
& (k_Nu_{N,m} - k_{N-\frac{1}{2}}u_{N-1,m})/h + (a_{N,m}u_{N,m} - a_{N-\frac{1}{2},m}u_{N-1,m})/h + \\
& + (b_{N,m+\frac{1}{2}}v_{N,m+1} - b_{N,m-\frac{1}{2}}v_{N,m-1})/2\tau + \frac{1}{2}k'_Nu_{N,m} = 0, \\
& (a_{N,m}u_{N,m} - a_{N-\frac{1}{2},m}u_{N-1,m})/h - (v_{N,m} - v_{N-1,m})/h + \\
& + (b_{N,m+\frac{1}{2}}u_{N,m+1} - b_{N,m-\frac{1}{2}}u_{N,m-1})/2\tau = 0, \\
& 1 \leq m \leq M - 1 \\
& (a_{N,1}u_{N,1} - a_{N-\frac{1}{2},1}u_{N-1,1})/h - (v_{N,1} - v_{N-1,1})/h + \\
& + (b_{N,\frac{3}{2}}u_{N,2} - b_{N,1}u_{N,1})/2\tau = 0, \\
& (a_{N,M}u_{N,M} - a_{N-\frac{1}{2},M}u_{N-1,M})/h - (v_{N,M} - v_{N-1,M})/h + \\
& + (b_{N,M}u_{N,M} - b_{N,M-\frac{1}{2}}u_{N,M-1})/2\tau = 0, \\
& u_{n,0} = U_1(q_n), \quad u_{n,M} = U_2(q_n), \quad v_{0,m} = 0, \\
& 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq m \leq M
\end{aligned} \tag{12}$$

Алгебраическая система (12) сохраняет свойства знакоопределенности оператора, т.е. матрица этой системы знакоопределена, это позволило применить для ее решения известный итерационный метод вариационного типа – метод минимальных невязок. В качестве иллюстрации проведенных расчетов приведены рисунки 2 и 3. кривые на этих рисунках соответствуют линиям тока и линиям уровня модуля скорости. Течение предполагалось симметричным и поэтому краевое условие на γ_1 ставилось как $v(q, \psi_1) = 0$. В обоих случаях $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 1$, $Q_0 = 0,5$, $Q_1 = 1,5$ на рис. 2 $s = 2q$ на Γ_2 , а на рис.3 $s = 4q$ на Γ_2 .

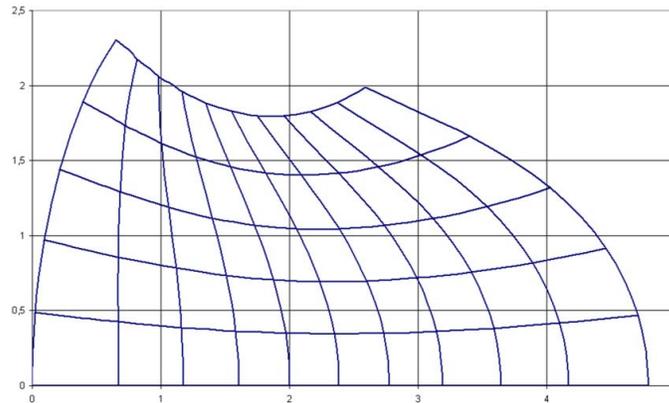


Рис. 2. Линии тока и линии уровня модуля скорости

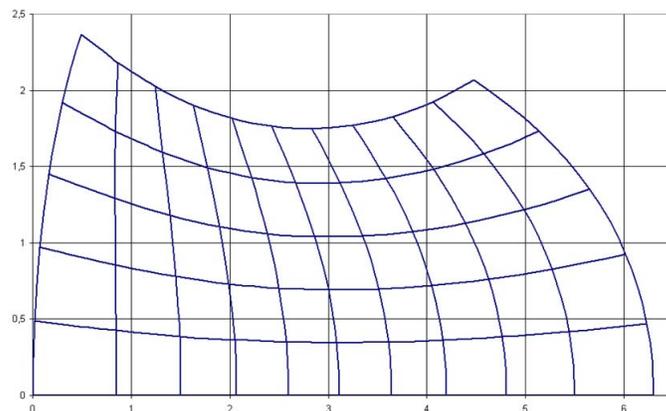


Рис. 3. Линии тока и линии уровня модуля скорости

Список литературы

- [1] ЕЛИЗАРОВ А.М. Обратные краевые задачи аэродинамики / А.М. Елизаров, Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев. – Москва, 1994.
- [2] ЕЛИЗАРОВ А.М. Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. / А.М. Елизаров, Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев, Г.Ю. Степанов. // Труды Математического центра Н.И. Лобачевского. – 2001. – т.10.
- [3] БЕРС Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. – Москва. 1961.
- [4] КУЗИКОВ С.С. Об одном методе расчета околозвуковых течений в плоских соплах. // Динамика сплошной среды. – 1976. – т.25, Новосибирск.