

О ПОВЫШЕНИИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА*

В.В. ШАЙДУРОВ

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Г.И. ЩЕПАНОВСКАЯ

e-mail: gi@icm.krasn.ru

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения уравнений Навье-Стокса для одномерного движения вязкого теплопроводного газа, в основе которого лежит метод конечных элементов для решения модифицированных уравнений, обеспечивающих повышение точности приближенного решения. Проведены тестовые расчеты. Реализована задача о распространении теплового импульса в газе. Апробированная компьютерная модель используется для изучения одномерных геодинамических процессов.

1. Дифференциальные уравнения. Выпишем дифференциальные уравнения одномерного вязкого теплопроводного газа в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и уравнения для внутренней энергии [1]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \frac{\partial u}{\partial x} = Q_t - \frac{\partial q_x}{\partial x} + \Phi, \quad (3)$$

$$P = P(\rho, e), \quad \mu = \mu(\rho, e). \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, u – проекция вектора скорости на ось x , P – давление, μ – динамический коэффициент вязкости, e – внутренняя энергия, Q – внешний поток тепла от внешних источников; тензор напряжений τ_{xx} , проекция теплового потока q_x и диссипативная функция Φ выражаются следующим образом:

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_x = -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad \Phi = \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad (5)$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, $\gamma = 1.4$.

2. Модифицированные уравнения. Преобразуем уравнения (1) и (3) к новому виду. Для этого, учитывая неотрицательность плотности и внутренней энергии, введем следующие функции:

$$\rho = \sigma^2, \quad (6)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00621), проекта № 89 СО РАН со сторонними научными организациями.

$$e = \varepsilon^2. \quad (7)$$

Подставим (6) в уравнение неразрывности (1) и получим

$$\frac{d(\sigma^2)}{dt} + \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Дифференцируя по t , имеем

$$2\sigma \frac{d\sigma}{dt} + \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Далее, сокращая последнее уравнение на 2σ , получим

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Проведем аналогичную процедуру для уравнения внутренней энергии (3), то есть, преобразуем уравнение (3) к новому виду с учетом (7). Для этого подставим выражение (7) в (3), в результате получим

$$\rho \frac{d(\varepsilon^2)}{dt} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} - P \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi. \quad (10)$$

Преобразуем (10) следующим образом:

$$\rho 2\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} - P \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi. \quad (11)$$

Далее сократим последнее уравнение на 2ε и получим

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{P}{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\varepsilon} \Phi. \quad (12)$$

Подставим (7) в выражение для теплового потока q_x из (5) и возьмем производную по x , получим

$$q_x = -\frac{2\gamma}{\text{PrRe}} \mu \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x},$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\frac{2\gamma}{\text{PrRe}} \left(\mu \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right). \quad (13)$$

С учетом (13) и выражения для диссипативной функции Φ из (5) уравнение (12) примет вид:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \left[\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{2\varepsilon} Q_t - \frac{P}{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (14)$$

Замечание. Обратим внимание на появившиеся множители μ/ε и P/ε в уравнении (14), которые, как показывают расчеты, являются естественными "регуляризаторами". Например, для совершенного газа уравнение состояния (4) запишется как

$$P = \rho(\gamma - 1)e \quad \text{или} \quad P = \sigma^2(\gamma - 1)\varepsilon^2. \quad (15)$$

Поскольку внутренняя энергия всегда положительна и больше единицы по отношению к ее величине на бесконечности, то множитель $1/\varepsilon$ "гасит" растущее как ε^2 давление.

Аналогичные рассуждения относительно μ/ε . Для совершенного газа, как следует из формулы Сазерленда, динамический коэффициент вязкости является степенной функцией от внутренней энергии.

Будем решать систему уравнений, преобразованную к следующему виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \left[\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{2\varepsilon} Q_t - \frac{P}{2\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (18)$$

Замыкают систему уравнений (16)-(18) алгебраические соотношения для давления и динамического коэффициента вязкости совершенного газа

$$P = P(\sigma, \varepsilon), \quad \mu = \mu(\sigma, \varepsilon). \quad (19)$$

3. Дискретизация методом Бубнова-Галеркина. [3] В качестве расчетной области возьмем единичный отрезок $\bar{\Omega} = [0, 1]$ с границей Γ , состоящей из концов отрезка. Введем равномерную сетку $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ с шагом $h = 1/n$ ($n \geq 2$).

Обозначим множество узлов области $\bar{\Omega}$

$$\bar{\Omega}_h = \{S_i = (x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n\},$$

введем множество внутренних узлов

$$\Omega_h = \{S_i = (x_i), \quad i = 1, \dots, n-1\}$$

и два граничных узла

$$\Gamma_h = \{S_i = (x_i), \quad i = 0, n\}.$$

В результате расчетная область $\bar{\Omega}$ разбилась на n интервалов.

Для каждого узла $S_i \in \bar{\Omega}_h$ введем базисную функцию $\varphi_i(x)$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x_i - x|}{h}\right), & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases} \quad (20)$$

которая равна единице в S_i и равна нулю во всех остальных узлах $\bar{\Omega}$.

Будем искать приближенное решение в виде:

$$\sigma^h(t, x) = \sum_{i=0}^n \sigma_i(t) \varphi_i(x), \quad (21)$$

$$u^h(t, x) = \sum_{i=0}^n u_i(t) \varphi_i(x), \quad (22)$$

$$\varepsilon^h(t, x) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(t) \varphi_i(x). \quad (23)$$

4. Дискретный аналог уравнения неразрывности.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d\sigma_l}{dt} + \frac{1}{4h} \sigma_l (u_{l+1} - u_l) &= 0, \quad l = 0, \\ \frac{d\sigma_l}{dt} + \frac{1}{4h} \sigma_l (u_{l+1} - u_{l-1}) &= 0, \quad l = 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2} \frac{d\sigma_l}{dt} + \frac{1}{4h} \sigma_l (u_l - u_{l-1}) &= 0, \quad l = n.\end{aligned}\tag{24}$$

Введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau = t_{\text{fin}}/m$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, m\}.$$

Производную по времени (субстанциональная) аппроксимируем с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы следующим образом [2]:

$$\frac{d\sigma_l}{dt} \approx \frac{\sigma^{k+1}(x_l) - \sigma^k(X_l^k)}{\tau},\tag{25}$$

где $X_l^k = x_l - u_l^k \tau$, поскольку за время $t = \tau$ точка X_l^k смещается по прямой в точку x_l со скоростью u_l^k на расстояние $s_l^k = u_l^k \tau$. При $u_l^k > 0$ значение $\sigma^k(X_l^k)$ определяется путем линейной интерполяции следующим образом:

$$\sigma^k(X_l^k) = \sigma^k(x_l) + (X_l^k - x_l) \frac{\sigma^k(x_l) - \sigma^k(x_{l-1})}{x_l - x_{l-1}}.\tag{26}$$

При $u_l^k < 0$:

$$\sigma^k(X_l^k) = \sigma^k(x_l) + (X_l^k - x_l) \frac{\sigma^k(x_{l+1}) - \sigma^k(x_l)}{x_{l+1} - x_l}.\tag{27}$$

Обозначим $\sigma^{k+1}(x_l) = \sigma_l^{k+1}$, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{2\tau} + \frac{1}{4}(u_{l+1}^k - u_l^k)\right) \sigma_l^{k+1} &= \frac{h}{2\tau} \sigma^k(X_l^k), \quad l = 0, \\ \left(\frac{h}{\tau} + \frac{1}{4}(u_{l+1}^k - u_{l-1}^k)\right) \sigma_l^{k+1} &= \frac{h}{\tau} \sigma^k(X_l^k), \quad l = 1, \dots, n-1, \\ \left(\frac{h}{2\tau} + \frac{1}{4}(u_l^k - u_{l-1}^k)\right) \sigma_l^{k+1} &= \frac{h}{2\tau} \sigma^k(X_l^k), \quad l = n.\end{aligned}\tag{28}$$

5. Дискретный аналог уравнения энергии. После применения метода конечных элементов к уравнению (18) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} - \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l)^2 - \\ \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) (\mu_{l+1} + \mu_l) + \frac{1}{h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \mu_l (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l) = \\ - \frac{1}{4h} \frac{P_l}{\varepsilon_l} (u_{l+1} - u_l) + \frac{1}{3h^2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} (u_{l+1} - u_l)^2, \quad l = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} - \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} ((\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l)^2 + (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})^2) + \\
& \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} ((\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})(\mu_{l-1} + \mu_l) - (\varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l)(\mu_l + \mu_{l+1})) = \\
& -\frac{1}{4h} \frac{P_l}{\varepsilon_l} (u_{l+1} - u_{l-1}) + \frac{1}{3h^2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} ((u_{l+1} - u_l)^2 + (u_l - u_{l-1})^2), \quad l = 1, \dots, n-1, \\
& \frac{1}{2} \rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} - \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})^2 + \\
& \frac{1}{2h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})(\mu_{l-1} + \mu_l) - \frac{1}{h^2} \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \mu_l (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1}) = \\
& -\frac{1}{4h} \frac{P_l}{\varepsilon_l} (u_l - u_{l-1}) + \frac{1}{3h^2} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_l}{\varepsilon_l} (u_l - u_{l-1})^2, \quad l = n.
\end{aligned} \tag{29}$$

Введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau = t_{\text{fin}}/m$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, m\}.$$

Производную по времени (субстанциональная) аппроксимируем с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы следующим образом:

$$\rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} \approx \rho_l^{k+1} \frac{\varepsilon^{k+1}(x_l) - \varepsilon^k(X_l^k)}{\tau}, \tag{30}$$

где $X_l^k = x_l - u_l^k \tau$, поскольку за время $t = \tau$ точка X_l^k смещается по прямой в точку x_l со скоростью u_l^k на расстояние $s_l^k = u_l^k \tau$. Значение $\varepsilon^k(X_l^k)$ определяется аналогично значению $\sigma^k(X_l^k)$.

Дискретный аналог уравнения количества движения строится по аналогии с уравнениями неразрывности и энергии.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей используется метод немонойтонной прогонки, который отличается высокой вычислительной устойчивостью [4].

6. Тестовые расчеты. Для тестирования полученной математической модели, функции u, σ, ε задаются следующим явным образом:

$$u(x, t) = x(x-1)^2 t, \quad \sigma(x, t) = x(x-1)^2 t + 1, \quad \varepsilon(x, t) = x(x-1)^2 t + 1 \tag{31}$$

При подстановке функций (31) в исходные уравнения и модифицированные уравнения получаются соответственно правые части $f_\rho, f_\sigma, f_u, f_e$ и f_ε , которые учитываются в системах уравнений при их численном решении. Нормы погрешности в пространстве L_2 и L_∞ , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|\delta a\|_{2,h} &= \left(\int (\delta a)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta a = |a_i^* - a_i^h|, \\
\int (\delta a)^2 dx &= \frac{h}{2} (|a_0^* - a_0^h|^2 + |a_n^* - a_n^h|^2) + h \sum_{i=1}^{n-1} |a_i^* - a_i^h|^2, \\
\|\delta a\|_{\infty,h} &= \max_i |a_i^* - a_i^h|.
\end{aligned}$$

Для $\|\delta\sigma\|_{\infty,h}$ и $\|\delta\rho\|_{\infty,h}$ можно получить соотношение:

$$\|\delta\rho\|_{\infty,h} = \|\delta\sigma\|_{\infty,h} \max_i |\sigma_i^* + \sigma_i^h|.$$

Норму $\|\delta\rho\|_{2,h}$ можно выразить через $\|\delta\sigma_i\|_{\infty,h}$ следующим образом:

$$\|\delta\rho\|_{2,h} = \left(\frac{h}{2} (\|\delta\rho_0\|_{\infty,h}^2 + \|\delta\rho_n\|_{\infty,h}^2) + h \sum_{i=1}^{n-1} \|\delta\rho_i\|_{\infty,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\delta\rho\|_{2,h} = \left(\frac{h}{2} \left[(\|\delta\sigma_0\|_{\infty,h} |\sigma_0^* + \sigma_0^h|)^2 + (\|\delta\sigma_n\|_{\infty,h} |\sigma_n^* + \sigma_n^h|)^2 \right] + h \sum_{i=1}^{n-1} (\|\delta\sigma_i\|_{\infty,h} |\sigma_i^* + \sigma_i^h|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Нормы погрешностей приведены для шага по времени $\tau = 0.0001$ в момент времени $t = k\tau$ ($k = 1000$) в табл. 1 и 2.

Таблица 1

h	0.05	0.04	0.025	0.02	0.0125	0.01
$\ \delta\sigma\ _{2,h}$	0.0000441	0.0000319	0.0000161	0.0000117	0.0000061	0.0000046
$\ \delta\rho\ _{2,h}$	0.0000882	0.0000637	0.0000321	0.0000233	0.0000122	0.0000092
$\ \delta\varepsilon\ _{2,h}$	0.0000338	0.0000278	0.0000196	0.0000172	0.0000142	0.0000133
$\ \delta e\ _{2,h}$	0.0000672	0.0000551	0.0000388	0.0000341	0.0000280	0.0000264
$\ \delta u\ _{2,h}$	0.0001450	0.0001065	0.0000575	0.0000441	0.0000275	0.0000230

Таблица 2

h	0.05	0.04	0.025	0.02	0.0125	0.01
$\ \delta\sigma\ _{\infty,h}$	0.0002482	0.0002006	0.0001282	0.0001038	0.0000670	0.0000546
$\ \delta\rho\ _{\infty,h}$	0.0004959	0.0004007	0.0002560	0.0002073	0.0001338	0.0001091
$\ \delta\varepsilon\ _{\infty,h}$	0.0002119	0.0001929	0.0001641	0.0001544	0.0001397	0.0001348
$\ \delta e\ _{\infty,h}$	0.0004206	0.0003826	0.0003249	0.0003054	0.0002760	0.0002662
$\ \delta u\ _{\infty,h}$	0.0008391	0.0006920	0.0004692	0.0003945	0.0002819	0.0002442

Нормы погрешностей приведены для шага по времени $\tau = 0.0002$ в момент времени $t = k\tau$ ($k = 500$) в табл. 3 и 4.

Таблица 3

h	0.05	0.04	0.025	0.02	0.0125	0.01
$\ \delta\sigma\ _{2,h}$	0.0000449	0.0000326	0.0000168	0.0000125	0.0000071	0.0000058
$\ \delta\rho\ _{2,h}$	0.0000897	0.0000651	0.0000336	0.0000249	0.0000142	0.0000115
$\ \delta\varepsilon\ _{2,h}$	0.0000339	0.0000278	0.0000196	0.0000172	0.0000142	0.0000134
$\ \delta e\ _{2,h}$	0.0000672	0.0000551	0.0000388	0.0000341	0.0000281	0.0000264
$\ \delta u\ _{2,h}$	0.0001477	0.0001092	0.0000604	0.0000472	0.0000312	0.0000269

Таблица 4

h	0.05	0.04	0.025	0.02	0.0125	0.01
$\ \delta\sigma\ _{\infty,h}$	0.0002530	0.0002054	0.0001330	0.0001087	0.0000719	0.0000596
$\ \delta\rho\ _{\infty,h}$	0.0005054	0.0004103	0.0002657	0.0002171	0.0001436	0.0001190
$\ \delta\varepsilon\ _{\infty,h}$	0.0002121	0.0001931	0.0001643	0.0001545	0.0001399	0.0001349
$\ \delta e\ _{\infty,h}$	0.0004210	0.0003830	0.0003252	0.0003057	0.0002763	0.0002665
$\ \delta u\ _{\infty,h}$	0.0008545	0.0007075	0.0004849	0.0004102	0.0002977	0.0002601

7. Задача о распространении теплового импульса. При решении модельной задачи тепловой импульс задается в окрестности центра расчетной области, газодинамическая постоянная γ , число Рейнольдса Re , число Прандтля Pr , число Маха M_∞ и ω имеют следующие значения: $\gamma = 1.4$, $Re = 2 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $M_\infty = 4$, $\omega = 0.8$. На рис. 1-2 представлены графики распределения плотности и температуры газа в различные моменты времени.

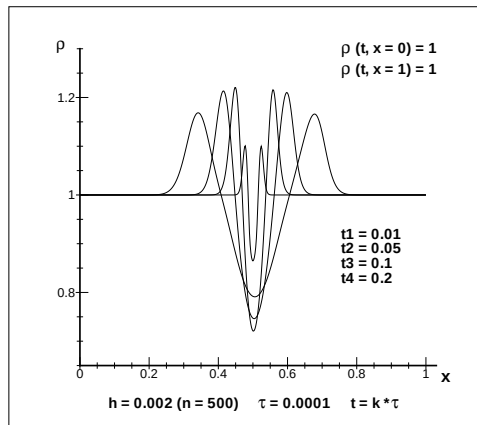


Рис. 1. Распределение плотности совершенного газа в различные моменты времени

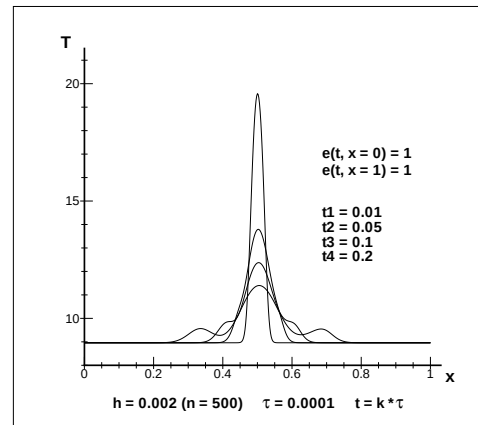


Рис. 2. Распределение температуры совершенного газа в различные моменты времени

8. Задача одномерной геодинамики. На основе полученной компьютерной модели рассматривается задача одномерной геодинамики. В качестве начальных условий берутся реальные значения плотности и температуры, отнесенные к соответствующим величинам на поверхности земного шара [5, 6]. Диаметр Земли занимает половину расчетной области. Распределение плотности вещества Земли, как следует из табличных данных [6], соответствует скачкообразному изменению последней при переходе через границы Мохоровичича и Вихерта-Гутенберга [9]. На рис. 3 представлено распределение скорости в различные моменты времени, поведение кривых отражает переход от ядра к мантии и от мантии к коре.

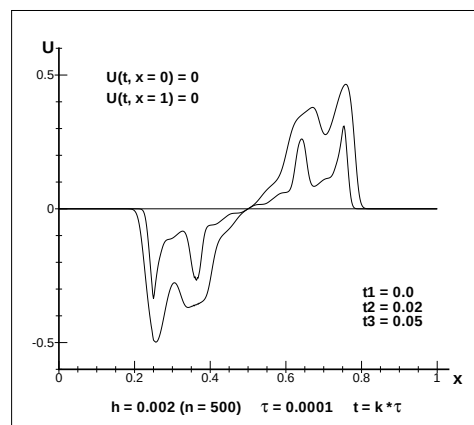


Рис. 3. Распределение скорости вещества Земли в различные моменты времени

В заключение отметим, переход к новым положительно определенным функциям для плотности и энергии обеспечивает более высокую вычислительную устойчивость

метода. Применение комбинации метода конечных элементов и метода траекторий приводит к меньшей абсолютной погрешности как в норме L_2 , так и в L_∞ . Совокупность методов не требует согласования триангуляций на соседних временных слоях, что значительно облегчает динамическое разрежение или сгущение триангуляций по времени для оптимизации вычислительной работы или улучшения аппроксимации в пограничных слоях и ударных волнах. Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейностям.

Список литературы

- [1] ANDERSON D., TANNEHILL J., PLETCHER R. Computational fluid mechanics and heat transfer. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
- [2] PIRONNEAU O. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations // Numer. Math. 1982. Vol. 38. P. 309–332.
- [3] ФЛЕТЧЕР К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
- [4] УШАКОВА О.А., ШАЙДУРОВ В.В., ЩЕПАНОВСКАЯ Г.И. Метод конечных элементов для уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат // Вестник КрасГУ. 2006. № 4. С. 151–156.
- [5] САМАРСКИЙ А.А., НИКОЛАЕВ Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [6] ШАЙДУРОВ В.В., ЩЕПАНОВСКАЯ Г.И. Газодинамическая модель внутреннего строения Земли // Вестник СибГАУ. 2008. № 1. С. 79–83.
- [7] VYATKIN A.V., SHAIUROV V.V., AND SHCHEPANOVSKAYA G.I. Numerical Spherically-Symmetric Simulation of Deep-Seated Geodynamics // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2010. Vol. 4, N 2. P. 290–297.
- [8] ШАЙДУРОВ В.В., ЩЕПАНОВСКАЯ Г.И., ЯКУБОВИЧ М.В. Одномерная модель динамики вязкого теплопроводного газа // Материалы XIV Международной научной конференции "Решетневские чтения". Красноярск: СибГАУ, 2010. С. 440–441.
- [9] JEFFREYS H. The Earth: Its Origin, History, and Physical Constitution. Cambridge University Press, 2008.