ОЦЕНКИ ОБЛАСТЕЙ ДОПУСТИМЫХ ОТКЛОНЕНИЙ И БЕЗОПАСНОСТЬ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

А.Н.Рогалев
ИВМ СО РАН Красноярск
e-mail: rogalyov@icm.krasn.ru

В докладе рассматривается применение методов, вычисляющих гарантированные границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и основанных на символьном представлении формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории решения этой системы. При использовании этих методов строятся границы множеств решений ОДУ (области допустимых отклонений) и выполняется проверка условий безопасности функционирования сложных систем, описываемых этими ОДУ. Приводятся примеры расчетов.

Надежность и безопасность технических систем связаны с состоянием систем при анализе их функционирования. В зависимости от условий решаемой задачи один и тот же объект может именоваться системой, если учитываются внутренние связи его частей, или элементом, если учитываются существующие, либо возможные связи этого объекта с частями другого, более сложного объекта. Под надежностью понимают свойство объекта сохранять во времени и в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания. Надежность сложное свойство, которой в зависимости от назначения объекта, условий применения может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость. Для анализа безопасности наиболее важным является безотказность (живучесть)— свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки под действием возмущений [1].

Действие систем и элементов их систем управления, как исправных, так и неисправных, с высокой степенью точности априори можно описать, исходя из опыта и законов теоретической механики, обыкновенными дифференциальными уравнениями. Существенно обобщить класс анализируемых систем можно, выделив показатель, стремящийся удерживать все состояния как можно ближе к некоторому состоянию (предельному состоянию). Тогда функциональное состояние можно записать в виде системы с непрямым управление [2] или управлением по производным. Диагностика функционального состояния управляемых систем получила название "дифференциальная диагностика"[3]. В основе ее лежат дифференциальные уравнения, описывающие движение исправной и неисправных систем. Для многих задач, описываемых системами ОДУ, в том числе представляющих диагностику функционального состояния систем, невозможно точно определить коэффициенты системы, начальные данные или краевые условия. Это связано с влиянием различных неопределенных факторов: внешних возмущающих сил, неконтролируемых вариаций параметров, погрешностей в определении начальных условий и некоторых других причинах. Среди классов задач, близко примыкающих к задаче безопасности сложных систем и входящих в нее, на решения которых может сильно влиять неопределенность входных данных, следует отметить задачи количественного оценивания областей практической устойчивости [4], задачи количественного оценивания областей устойчивости систем с постоянно действующими возмущениями [5], задачи нахождения множеств достижимости управляемых систем [6]. Во всех подобных случаях возможно применение двух подходов к описанию неопределенных величин. В первом их них, неопределенному вектору сопоставляется некоторое распределение вероятностей с заданной плотностью, математическим аппаратом служит теория случайных процессов. При недостаточности априорных сведений о вероятностных характеристиках ошибок исходных данных возможно ухудшение точности при увеличении количества оцениваемых параметров, а увеличение числа измерений больше некоторого числа становится бесполезным и даже вредным. Второй подход, называемый гарантированным или минимаксным, оперирует с множествами, в которых лежат неопределенные векторы. При этом предполагается, что неизвестные помехи локализованы в известных множествах, а в остальном произвольны. Отметим, что итоговая оценка в вероятностном случае применима только к совокупности реализаций, а в гарантированном - к любой из них. Поэтому в дальнейшем будет рассмотрены задачи, постановки которых содержат дифференциальные уравнения, характеризующиеся неточно заданными данными. Решения задач в рамках гарантированного подхода называются иногда минимаксными или гарантированными решениями, а сам подход к постановке и решению задач – гарантированным подходом.

Гарантированные методы, основанные на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории и символьных формулах этих приближенных решений [8]–[17], позволяют вычислять границы множеств решений и преодолеть влияние эффекта экспоненциального роста границ. Эти методы не используют ни априорные неравенства, ни мажорантные оценки, ни арифметические операции над интервальными величинами, что отличает их от интервальных и двусторонних методов. Термин гарантированный метод, а также гарантированная граница решения, означает, что в полученные методом границы включаются все точные решения ОДУ, независимо от выбора значений параметров дифференциального уравнения и вне зависимости от ошибок выполнения арифметических операций.

1. Вычисление гарантированных границ допустимых отклонений

В общем виде рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая состояние реального объекта (системы) и его эволюцию во времени

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z(t), u(t)), \tag{1}$$

где $z = (z_i(t))$, —вектор состояния объекта (системы),$u(t) = (u_j)$, —воздействия, определяемые нашим выбором, а также факторы, на выбор которых мы повлиять не можем—возмущения системы.

Выполнение гарантированных методов, основанных на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории, разделено на два этапа.

На первом этапе происходит построение (запись) символьных формул $\mathcal{S}(t, h, \mathcal{Y}^0) = \mathcal{S}_h(t, \mathcal{Y}^0)$ приближенных решений как векторных функций

$$\mathcal{S}_h(t^n, \mathcal{Y}^0) \circ \mathcal{S}_h(t^{n-1}, \mathcal{Y}^0) \circ \ldots \mathcal{S}_h(t^0, \mathcal{Y}^0),$$

где вектор $\mathcal{Y}^0(t) = (\mathcal{Y}^0_1, \mathcal{Y}^0_2, \ldots, \mathcal{Y}^0_n)$–вектор начальных значений, рассматриваемых как символьные величины.

На втором этапе выполняются две операции. Первая операция–вычисление числового значения границ множества приближенных решений. Это осуществляется на основе алгоритма определения экстремальных значений функций, заданных символьными формулами приближенных решений $\mathcal{S}_h(t, \mathbf{Y}^0) = (\mathcal{S}_i(t, h, \mathcal{Y}^0)_{i=1,n})$. В качестве символьной формулы $\mathcal{F}$ метода сдвига вдоль траектории можно выбрать формулы, числовые оригиналы которых соответствуют приближенным методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (например, линейным одношаговым и многошаговым методам, коллокационным методам). Принципиальное отличие заключается в способе реализации этих методов, то есть получении числовых оригиналов символьных формул $\mathcal{F}$. В процессе конструирования символьной формулы целесообразно использовать экономичные символьные формулы, то есть последовательности имен переменных и действий, позволяющие хранить формулы в памяти машины и обрабатывать их за минимальное время и с разумными затратами памяти. Указанные свойства означают, что само построение формул и их исполнение существенно изменяются по сравнению с численными алгоритмами, изучаемыми в разделе численного решения систем ОДУ.

Вторая операция — определение гарантированной оценки глобальной ошибки приближенного решения. Эта оценка глобальной ошибки получается как включение решения уравнения для глобальной ошибки, выписанного в некоторой промежуточной точке интервала $[y(t^i), y(t^{i+1})]$. Для нахождения этого включения предварительно строится "коридор"точных решений, а затем определяется оценка множеств значений глобальной ошибки. Главное свойство такой оценки глобальной ошибки заключается в том, что в методе не суммируются значения оценок приближенных решений и оценок глобальной ошибки (или не суммируются интервальные решения с интервалами, включающими глобальную ошибку, как это делается в интервальных методах Тейлора) от шага к шагу. Это означает, что устраняется экспоненциальный рост ширины двусторонних границ, проявляющийся практически для всех известных интервальных и двусторонних методов решения ОДУ с неточно заданными данными.

В завершение второго этапа мы объединяем два множества значений: множество значений приближенных решений и множество всех возможных глобальных ошибок, заданных своими границами. В итоге получена требуемая гарантированная оценка множества точных решений $\mathcal{Y}(t) \subseteq \mathbf{Y}(t)$ [9], [10], [12]. Такие границы обеспечивают возможность формулировать математически строгие результаты об оценках областей допустимых отклонений (безопасности систем) для достаточно широких классов задач.

Гарантированные методы могут быть охарактеризованы следующим образом. Для всех подобных методов общим является введение определенных функциональных связей между областями всех решений системы ОДУ в начальный момент времени t_0 и при t_k в пределах конечного интервала времени. Можно выделить два вида описания множества систем: ансамбли систем дифференциальных уравнений, имеющие одну структуру систему (вид правой части системы) и отличающиеся лишь значениями параметров, и возмущенные системы, для которых варьируются все характеристики

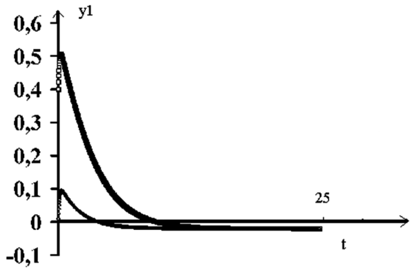

Рис. 1. Гарантированные границы y1 - угла, характеризующего положение ротора в задаче (2)

системы — правые части, значения параметров, единственным ограничением является близость значений правых частей или начальных данных в метрике. Для возмущенных систем имеет место значительное изменение, как видов возмущенных систем, так и изменения динамики решений.

2. Примеры применения

1) Области безопасности при противоаварийном управлении.

При больших возмущениях в электроэнергетических системах (ЭЭС) возникают электромеханические переходные процессы, характеризующиеся взаимными движениями роторов синхронных машин в системе, существенными изменениями напряжений в узлах и токов в элементах ЭЭС. Если динамическая устойчивость не нарушается, то в процессе электромеханических колебаний взаимные движения роторов синхронных машин происходят в некоторой ограниченной области. В случае нарушения динамической устойчивости разности углов, определяющих пространственное положение роторов синхронных машин, неограниченно возрастают. Подобные процессы происходят при системных авариях. С ними связано понятие живучести ЭЭС, определяемой как свойство системы противостоять возмущениям [1], не допуская их каскадного развития с массовым нарушением питания потребителей. При исследовании электромеханических переходных процессов система дифференциальных уравнений, описывающих динамику состояний ЭЭС, включает уравнения следующих динамических элементов системы: движения роторов синхронных и асинхронных машин; электромагнитных переходных процессов в обмотках роторов: динамики регуляторов возбуждения и скорости синхронных машин; динамики регуляторов выпрямительных нагрузок и электропередач постоянного тока.

Вычислялись границы множества решений в простейшей модели энергосистемы: станции — шины бесконечной мощности

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\
\frac{dy_2}{dt} &= -16.52(y_2 + 1.134)sin(y_1 + 1.256) + 2.161sin2(y_1 + 1.256) + 16.05, \qquad (2) \\
\frac{dy_3}{dt} &= -0.257y_3 + 0.0674cos(y_1 + 1.256) + 0.023553
\end{aligned}$$

В (2) y_1 — угол, характеризующий положение ротора относительно вращающейся оси

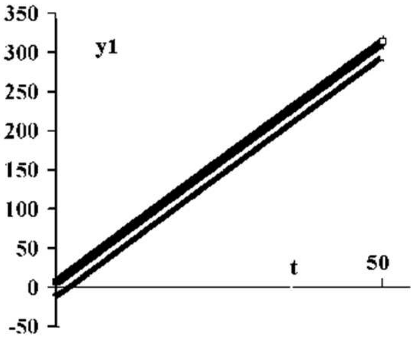

Рис. 2. Включение области полярных координат точки в задаче (3)

(вектора ЭДС); y_2 — скольжение ротора двигателя; y_3 — магнитный поток, сцепленный со статорной оболочкой.

2) Пример стабилизации в поле центральной силы кругового движения материальной точки, управляемой реактивной силы.

Пример стабилизации в поле центральной силы кругового движения материальной точки, управляемой реактивной силы. Для оценки практической устойчивости мы вычисляем гарантированные границы множества решений возмущенного движения, уравнения которого описаны в [7]

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\mu_0}{(r_0+y_1)^2} + \frac{((\mu_0 r_0)^{1/2}+y_3)^2}{(r_0+y_1)^3} - bu, \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{r_0+y_1}{r_0}u, \\ u &= r_0 c_\phi \frac{d\ln m}{dt}, \quad b = \frac{c_t}{c_\phi r_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $y_1 = r - r_0$, $y_2 = \frac{dr}{dt}$, $y_3 = r^2\frac{d\varphi}{dt} - (\mu_0 r_0)^{1/2}$, $\mu_0 = \gamma M$, r, ϕ — полярные координаты точки, r_0 — радиус невозмущенной круговой орбиты, γ — постоянная всемирного тяготения, M — масса притягивающего центра, c_r, c_ϕ — проекции относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление, m — масса точки. Для расчетов были выбраны следующие параметры возмущенного движения материальной точки $\mu = 1$, $r_0 = 150$, $b = 0.8$.

Стабилизация движений системы с ПДВ была отмечена при $t \in [0, 50]$, $t \in [0, 100]$, $t \in [0, 200]$. Однако движение является практически устойчивым только относительно координат y_2, y_3. Относительно координаты y_1 решения наблюдается стабилизация реш ения на конечном интервале или локальная ограниченность решения.

Список литературы

[1] Руденко Ю.И., Ушаков И.А. К вопросу оценки живучести сложных систем энергетики // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979, №1. с. 20–30/

[2] Minorsky N. Directional Stability of Automatically Steering Bodies// J. Amer. Soc. Navel Engineers. 1992. v.34, № 3. P.280–309.

[3] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. т.5, вып.3. С.775–790.

[4] Воробцов С.П. Оценивание опасности полета самолетов в условиях сдвигов пространственного ветра. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002, № 5. С.33–45.

[5] Воронов А.А.Устойчивость, управляемость и наблюдаемость. - Москва: Наука, 1979. 335 с.

[6] Черноусько Ф.Л., Оценивание фазового состояния динамических систем, М.: Наука, 1988. 319 с.

[7] Румянцев В.В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. т.34, вып.3. С. 440–456.

[8] Новиков В.А., Рогалев А.Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 1993. Т.3, № 2. С. 219–231.

[9] Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. т.8, № 5. С. 102–116.

[10] Рогалев А.Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. т.9, № 1. С. 86–93.

[11] Рогалев А.Н. Гарантированные оценки безопасного функционирования технических и электроэнергетических систем // Труды Всероссийской конференции с международным участием "Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф". Красноярск:ИВМ СО РАН. 2003, т.3. С. 42–48.

[12] Рогалев А.Н. Включение множеств решений дифференциальных уравнений и гарантированные оценки глобальной ошибки // Вычислительные технологии. 2003. т. 8, № 6. С.80–94.

[13] Рогалев А.Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифферецниальных уравнений с интервальными начальными данными //Вычислительные технологии. 2004. т.9. № 1. С. 86-93.

[14] Рогалев А.Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах //Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2006. т.4, вып. 1. С.56-62 .

[15] Рогалев А.Н. Исследование безопасности сложных систем и оценки областей допустимых отклонений // Труды Всероссийской конференции "Безопасность и живучесть технических систем". Красноярск, 2009. С. 65–72.

[16] Rogalyov A.N. Research of reliability of complex systems and an acceptable deviates bands estimations// Zbornik radova konfencije MIT 2009, ISBN 978-86-7412-052-1. Beograd, 2010. P.354–357.

[17] Rogalyov A.N. Computation of reachable sets guaranteed bounds // Proceedings of the IAST-ED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ACIT - CDA 2010). Canada, Calgary: ACTA Press. 2010. P.132–139.