

Численная модель турбулентного течения за нагретой решеткой в аэродинамической трубе *

М.К. БАЕВ, Г.Г. ЧЕРНЫХ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск 630090, Россия

e-mail: chernykh@ict.nsc.ru

Осуществлено замыкание уравнения Корсина. Построена основанная на замкнутой системе уравнений Колмогорова и Яглома численная модель локально изотропной турбулентности. Результаты расчетов структурных функций D_{LL} , $D_{LL,L}$, $D_{\theta\theta}$, $D_{L\theta,\theta}$ и одномерных спектров полей скорости и концентрации пассивного скаляра удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными. В предположении постоянства инвариантов Лойцянского и Корсина построено автомодельное решение уравнения Корсина, соответствующее бесконечно большому числам Рейнольдса и Пекле. Разработана основанная на замкнутых уравнениях Кармана-Ховарта и Корсина численная модель динамики турбулентности и флуктуаций температуры за нагретой решеткой в аэродинамической трубе.

1. Постановка задачи.

Уравнения Кармана-Ховарта и Корсина для двухточечных корреляционных функций полей скорости и температуры (пассивного скаляра) в изотропном турбулентном потоке имеют вид [1]:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(B_{L\theta,\theta} + \chi \frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Здесь B_{LL} , $B_{LL,L}$ продольные двухточечные корреляционные функции второго и третьего порядка; $B_{\theta\theta}$ – двухточечная корреляционная функция поля температуры; $B_{L\theta,\theta}$ – смешанный момент третьего порядка; ν и χ коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности (диффузии пассивного скаляра).

Следуя [1], определим интегральные масштабы турбулентности L_u , L_θ и турбулентные числа Рейнольдса и Пекле соотношениями: $L_u = (1/u^2) \int_0^\infty B_{LL} dr$, $L_\theta = (1/\theta^2) \int_0^\infty B_{\theta\theta} dr$, $Re_L = uL/\nu$, $Pe_L = uL/\chi$, $L = \min(L_u, L_\theta)$, где $u^2 = B_{LL}(0, t)$, $\theta^2 = B_{\theta\theta}(0, t)$.

Если числа Re_L , Pe_L достаточно велики, то, как известно [1], существует равновесный интервал значений $r \ll L$, в котором (1), (2) сводятся к уравнениям для структурных функций D_{LL} , $D_{LL,L}$, $D_{\theta\theta}$, $D_{L\theta,\theta}$, связанных с B_{LL} , $B_{LL,L}$, $B_{\theta\theta}$, $B_{L\theta,\theta}$ следующим образом:

$$D_{LL} = 2[u^2 - B_{LL}(r, t)], \quad D_{LL,L} = 6B_{LL,L}(r, t),$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (совместный интеграционный проект № 103 СО РАН, ДВО РАН, УрО РАН; проект № 23 СО РАН), Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00363, 10-01-00435) и гранта президента РФ НШ-6068.2010.9

$$D_{\theta\theta} = 2[\theta^2 - B_{\theta\theta}(r, t)], \quad D_{L\theta,\theta} = 4B_{L\theta,\theta}(r, t).$$

Зависимостью от времени в этих соотношениях можно пренебречь [1] и следствия уравнений (1), (2) имеют вид:

$$D_{LL,L}(r) - 6\nu \frac{dD_{LL}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (3)$$

$$D_{L\theta,\theta}(r) - 2\chi \frac{dD_{\theta\theta}(r)}{dr} = -\frac{4}{3}Nr, \quad (4)$$

где $\varepsilon = -(3/2)du^2/dt$, $N = -(1/2)d\theta^2/dt$ – скорости диссипации и выравнивания температурных неоднородностей (неоднородностей концентрации пассивного скаляра) соответственно. Вывод уравнения (3) принадлежит А.Н. Колмогорову; уравнение (4) получено А.М. Ягломом (непосредственно как следствие уравнений Навье-Стокса).

Следуя [2-4] выразим $B_{LL,L}$ и $B_{L\theta,\theta}$ через B_{LL} и $B_{\theta\theta}$ с помощью соотношений градиентного типа:

$$B_{LL,L} = 2K_1 \frac{dB_{LL}}{dr}, \quad B_{L\theta,\theta} = K_2 \frac{dB_{\theta\theta}}{dr},$$

или, для структурных функций

$$-D_{LL,L} = 6K_1 \frac{dD_{LL}}{dr}, \quad -D_{L\theta,\theta} = 2K_2 \frac{dD_{\theta\theta}}{dr}. \quad (5)$$

Здесь K_1 и K_2 – коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии. Определим K_1 и K_2 следующим образом [2-4]:

$$K_1 = \varkappa_1 r \sqrt{D_{LL}}, \quad K_2 = \varkappa_2 r \sqrt{D_{LL}}, \quad (6)$$

где \varkappa_1 и \varkappa_2 – эмпирические постоянные. С учетом (5) система уравнений (3), (4) запишется в виде

$$(K_1 + \nu) \frac{dD_{LL}}{dr} = \frac{2}{15}\varepsilon r \quad (7)$$

$$(K_2 + \chi) \frac{dD_{\theta\theta}}{dr} = \frac{2}{3}Nr. \quad (8)$$

Начальными условиями для системы (7), (8) являются

$$D_{LL} = D_{\theta\theta} = 0, \quad r = 0. \quad (9)$$

Из решения системы уравнений (7), (8) следует [1], что в инерционно-конвективном интервале $L \gg r \gg \eta$, $\eta = \max(\eta_u, \eta_\theta)$, $\eta_u = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, $\eta_\theta = (\chi^3/\varepsilon)^{1/4}$, в котором $K_1 \gg \nu$, $K_2 \gg \chi$, величины D_{LL} и $D_{\theta\theta}$ равны соответственно

$$D_{LL} = (1/5\varkappa_1)^{2/3}(\varepsilon r)^{2/3} = C_u(\varepsilon r)^{2/3} \quad (10)$$

$$D_{\theta\theta} = \left(1/\varkappa_2 \sqrt{C_u}\right) N \varepsilon^{-1/3} r^{2/3} = C_\theta N \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}. \quad (11)$$

В этих равенствах, выражающих собой закон двух третей, величины C_u , C_θ – универсальные постоянные. В [1] на основе обработки большого числа экспериментальных данных предложено значение $C_u = 1.9$; отсюда в [2,3] получено $\varkappa_1 = 0.076$. Рекомендованное в [1] значение $C_\theta = 3.0$; ему соответствует $\varkappa_2 = 0.242$.

По найденным путем решения задачи (7)–(9) структурным функциям D_{LL} , $D_{\theta\theta}$ могут быть вычислены одномерные спектры полей скорости и пассивного скаляра (k – волновое число)[1]:

$$E_{1u} = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{dD_{LL}}{dr} \sin kr dr, \quad E_{1\theta} = \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{dD_{\theta\theta}}{dr} \sin kr dr. \quad (12)$$

Переменные задачи (7)–(9) могут быть обезразмерены с применением в качестве масштабов длины величины η_u , скорости $v_\eta = (\nu \cdot \varepsilon)^{1/4}$ и температуры (концентрации пассивного скаляра) $\theta_k = (N\eta_u/v_\eta)^{1/2}$.

Задача Коши (7)–(9) решалась с применением стандартного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. При этом решение находилось в узлах сетки $r_i = r_{i-1} + h_i$, $i = 1, \dots, I$; $r_0 = 0$. Величина r_I выбиралась достаточно большой. Для вычисления одномерных спектров (12) по найденным из (7), (8) значениям $f_{1i} = (dD_{LL}/dr)_i$, $f_{2i} = (dD_{\theta\theta}/dr)_i$ строились кубические интерполяционные сплайны и применялся метод Филона. Тестирование алгоритма расчета спектров осуществлялось путем вычисления преобразований Фурье от сеточных аналогов функций e^{-x} , e^{-x^2} , $x / (\beta^2 + x^2)$, $\beta = \text{const}$. Точные аналитические значения этих величин известны. Значения волнового числа варьировались так, чтобы косинус-преобразование Фурье уменьшалось на 20, 15 и 11 порядков соответственно. Рассчитанные величины преобразований Фурье совпадали с их аналитическими значениями с точностью до 3–4 значащих цифр.

Рассчитанные с применением замкнутой системы уравнений Колмогорова-Яглома структурные функции второго порядка и на основе гипотез (5) структурные функции третьего порядка, а также одномерные спектры хорошо согласуются с многочисленными отечественными и зарубежными экспериментальными данными [5,6].

2. Автомодельное решение уравнения Корсина.

Автомодельное решение замкнутой системы уравнений (1) – (2), соответствующее $\nu = \chi = 0$ в предположении постоянства инвариантов Лойцянского и Корсина [3,14] и выполнения краевых условий

$$B_{LL,L} = 2K_1 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = B_{L\theta,\theta} = K_2 \frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r} = 0, \quad r = 0;$$

$$B_{LL} = B_{\theta\theta} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

имеет вид

$$B_{LL} = u^2 f(r/L) = u^2 f(\xi), \quad B_{\theta\theta} = \theta^2 \varphi(\xi), \quad \xi = r/L \quad (13)$$

$$-2\sqrt{1-f} + \ln(1 + \sqrt{1-f}) - \ln(1 - \sqrt{1-f}) = (2/3)\xi \quad (14)$$

$$u = A(t - t_0)^{-5/7}, \quad L = (14\sqrt{2}/3) \varkappa_1 A(t - t_0)^{2/7} \quad (15)$$

$$\varphi = \exp \left[- (2\varkappa_1/3\varkappa_2) \int_0^\xi \left(1/\sqrt{1-f} \right) d\xi \right]; \quad \theta^2 = K / L^3 Q_\theta. \quad (16)$$

Здесь $A^7 = \Lambda / \left(Q_u (14\kappa_1 \sqrt{2}/3)^5 \right)$, $\Lambda = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r, t) dr$, $K = \int_0^\infty r^2 B_{\theta\theta}(r, t) dr$ — инварианты Лойцянского и Корсина; $t_0 = const$; $Q_u = \int_0^\infty \xi^4 f(\xi) d\xi$; $Q_\theta = \int_0^\infty \xi^2 \varphi(\xi) d\xi$. Заметим, что из (16) следует, что $\varphi \approx 1 - (2\kappa_1/3\kappa_2) \xi^{2/3} = \varphi_0(\xi)$ при малых ξ . Автомоделное решение (14), (15) получено Ю.М. Лыткиным в [2]. Законы вырождения (15) согласуются с известными законами А.Н. Колмогорова [1]. График функции $\varphi(\xi)$ представлен на рис. 1.

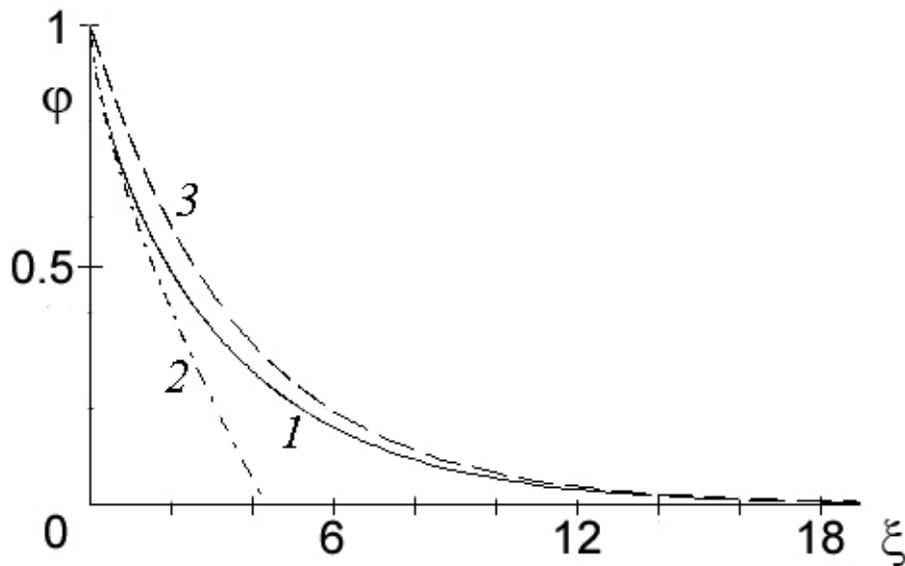


Рис. 1. Автомоделное решение уравнения Корсина, соответствующее $Q_u = 100$; 1 — функция $\varphi(\xi)$, определяемая формулой 16; 2 — функция $\varphi_0(\xi) = 1 - (2\kappa_1/3\kappa_2) \xi^{2/3}$; 3 — функция $\varphi_1(\xi) = e^{-\frac{2\kappa_1}{3\kappa_2} \xi}$.

Наряду с $\varphi(\xi)$ на рис. 1 приведена также функция $\varphi_1(\xi) = e^{-\frac{2\kappa_1}{3\kappa_2} \xi}$ — автомоделное решение уравнения Корсина, замкнутого с применением упрощенной модели Миллионщикова, в которой полагалось: $K_1 = \kappa_1 r \sqrt{B_{LL}(0, t)}$, $K_2 = \kappa_2 r \sqrt{B_{LL}(0, t)}$. Закон вырождения θ^2 был впервые указан, по-видимому, Корсиным [1].

Результаты численного моделирования вырождения турбулентности за нагретой решеткой с применением замкнутой системы уравнений (1)–(2) и их сопоставление с известными экспериментальными данными для конечных значений чисел Рейнольдса и Пекле представлены в [4].

В связи с краткостью настоящей заметки ограничимся лишь перечислением этих результатов. Известно [1], что близкую к изотропной турбулентность можно создать в лабораторных условиях, помещая в рабочей части аэродинамической трубы или гироканала турбулизующую решетку. Результаты измерений корреляционных функций в потоке за турбулизующими решетками можно использовать для сопоставления с результатами расчетов. В работе построена основанная на замкнутой системе уравнений (1)–(2) численная модель динамики изотропной турбулентности и турбулентных флуктуаций температуры в изотропном турбулентном потоке. Уравнения (1)–(2) аппроксими-

мируются с применением консервативных неявных конечно-разностных схем с итерациями по нелинейности на неравномерных сетках. Следствием этих аппроксимаций и предположения о быстром убывании двухточечных корреляционных функций полей скорости и температуры являются инварианты Лойцянского и Корсина. Рассмотрен вопрос о применении простых подвижных сеток, сгущающихся в области больших градиентов корреляционных функций. Результаты расчетов (поведение интенсивностей турбулентных флуктуаций полей скорости и температуры, микромасштабов Тейлора и Корсина, турбулентных чисел Рейнольдса и Пекле в зависимости от расстояния от решетки; двухточечные корреляционные функции полей скорости и температуры на нескольких удалениях от решетки в аэродинамической трубе) достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными Корсина и его коллег[1].

3. Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена основанная на замкнутой системе уравнений Колмогорова и Яглома численная модель локально изотропной турбулентности. Рассчитанные структурные функции второго и третьего порядков и одномерные спектры полей скорости и концентрации пассивного скаляра удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. В предположении постоянства инвариантов Лойцянского и Корсина построено автомодельное решение уравнения Корсина. Подробное изложение результатов доклада можно найти в [4-6].

Список литературы

- [1] А.С. Монин, А.М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, Издание второе, переработанное и расширенное. Том 2. Гидрометеиздат, Санкт-Петербург (1996).
- [2] Ю.М. Лыткин, Г.Г. Черных, Об одном способе замыкания уравнения Кармана – Ховарта. *Динамика сплошной среды* / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики (1976), Вып. 27, С. 124–130.
- [3] Ю.М. Лыткин, Г.Г. Черных, Расчеты корреляционных функций в изотропной турбулентности. *Динамика сплошной среды* / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики (1978), Вып. 35, С. 74–88.
- [4] М.К. Баев, Г.Г. Черных, Численное моделирование турбулентного течения за нагретой решеткой. *Прикладная мех. и техн. физ.* (2009), Т. 50, №3, с. 118 – 126.
- [5] Chernykh G. G., Baev M. K. Numerical simulation of the structure of fully developed turbulent flow in a small-scale zone // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, (2010), Vol. 25, No. 4, pp. 289-302.
- [6] Baev M. K., Chernykh G. G. On Corrsin Equation Closure // *Journal of Engineering Thermophysics*, (2010), Vol. 19, No. 3, pp. 154-169.